

# 算数教育における「説明する力」の育成 － 証明への接続を意識した指導を目指して－

## <修士論文要旨>

教育学研究科 数学教育専攻 数学科教育学領域

高田 安希子

### 序章 本研究の目的と方法

平成20年3月に告示された学習指導要領では、小学校から高等学校までの算数・数学科授業において、思考力・判断力・表現力の育成に関わる言語活動がより一層重視されている。ここで挙げられている言語活動とは、中学校・高等学校数学では「証明」がこれに相当し、小学校算数では、「説明する活動」が相当する。よって、「説明する活動」がどのように理解され、どのような形で実現させるべきか明確にする必要がある。

また、証明指導からもその必要性が窺える。全国学力・学習状況調査の結果では、「証明」に関する問題の正答率が低く、「証明」に対して苦手意識を持っている生徒が多い。このような状況を打開するための方策として、小学校算数科から「証明」に繋がるような言語活動の指導を、つまり、「証明」を意識した「説明する活動」の指導を提案したい。

以下では、「証明」への接続を目指した「説明する力」を育成するための指導の手立てとその具体的な教材例を検討することを研究目的とする。また、研究方法は先行研究を手がかりとした、文献的方法とする。

### 第1章 算数教育における説明と証明に関する指導の現状と課題

新学習指導要領では、新たに算数的活動という文言が明記され、そのひとつの要素として、児童の言語活動の充実を重視している。「説明する活動」は、算数科における具体的な言語活動として考えられるようになり、思考力・判断力・表現力を育む活動のひとつとして位置づけられているが、中でも表現力の育成という側面が強い。

#### 1.1 全国学力・学習状況調査からみる指導の現状

「説明」と「証明」に関する指導の現状をみるために、全国学力・学習状況調査の問題とその結果を分析することとする。「説明」に関しては、主に「活用」に関する問題である算数Bについて、「証明」に関しては、数学A、Bにおける論証に関わる問題とその結果について分析することで、指導の現状について考察することとする。

##### (1) 「説明」について

「活用」に関する問題の記述の内容については、「事実」「方法」「理由」の三種類の記述内容に関わる問題を出題している。

	事実の説明	方法の説明	理由の説明
平成20年度	19.6%	38.5%	30.3% 17.6% 33.4%
平成21年度	45.9%	30.5% 56.3%	33.8% 17.9%
平成22年度	32% 61.6%	33.5% 14.9%	17.4% 14.9%

表より、記述に関する問題の正答率が低く、中でも「理由の説明」に関する問題の正答率が最も低いことが窺える。

## (2) 「証明」について

文字式の論証に関しては、平成20年度実施の数学Bにおける文字を用いて説明する問題の正答率は39.7%と低く、これは文字を用いた式で数量をとらえ説明することを理解できておらず、文字を用いた式に表現することに引き続き課題があることを示している。

図形の論証に関しては、平成22年度実施の数学Aにおける図形の証明に関する設問において、一般的な命題が証明されていれば、その仮定を満たすように条件を加えた特殊な場合でも、同じ結論が成り立つことが保証されているという証明の意義を問う問題については50%を大きく下回る結果となっている。

このような学力調査から、現行でできる限り最善の指導をしているものの、まだまだ証明指導に関する課題が存在することを示しているといえる。

## 1.2 現行の指導の様相

ここでは、平成20年度改訂小学校学習指導要領の各学年の内容に記されている算数的活動のうち、説明する活動に関する文言を取り

出し、その内容を事実・方法・理由の3つに分類し、その内容についてみていく。下の表は、各学年の説明する活動を算数科の4領域に整理したものである。

領域 学年	数と 計算	量と 測定	図形	数量 関係
1				
2				事実
3	方法			
4		方法		
5	方法	方法	理由	
6	方法			

表より、全体として説明する活動の活動数が少なく、また、方法の説明に偏っており、事実・理由の説明に関しては一度ずつしか指導されていないことがわかる。

## 第2章 「証明」と「説明」

### 2.1 証明に関する先行研究

本節では、証明に関する課題を明らかにし、第3章で述べる、証明を意識した「説明する力」について考える手立てとしたい。

#### (1) 国宗進の研究

#### (2) 小関熙純の研究

以上の先行研究より、証明指導の現状を踏まえると、次の2点が大きな課題として考えられる。

- 証明できない、読み取れないといった証明する際の論証能力が身につけていない
- なぜ証明するのかという証明の必要性が感じられない

## 2.2 算数教育における説明に関する先行研究

ここでは、先行研究や学習指導要領解説をもとに、説明する活動が教授学習場面において担うと期待される役割を、説明の機能として具体的に列挙し、整理・分類する。

ここでは、授業に説明する活動を取り入れる際に、機能として働くと予想される順序に並べて番号をふった。

- (F 1) 情報を分析し、状況を把握する
- (F 2) 既習事項を想起しあてはめ、問題の見通しを立てる
- (F 3) 自分の考えの正誤を確認する
- (F 4) 筋道を立てて考える
- (F 5) 自分の考えを表現し、他人を説得する
- (F 6) 他の考えを自分の考えと比較したり、結合させたりする
- (F 7) 自分の考えについて反省する
- (F 8) 確かな知識・技能を習得する
- (F 9) 考えを整理し、表現を洗練する

ここで、説明の3つのタイプ「事実の説明」「方法の説明」「理由の説明」のそれぞれの特徴を踏まえて、先に分類した9つの機能との関係をみると、それぞれの説明のタイプの特徴によって、説明の機能は異なるが、中でも「理由の説明」は(F 1)～(F 9)すべての機能をもつことから、「理由の説明」ができることを算数科における「説明する力」の育成の最終目標とする。

## 2.3 「証明」と「説明」の関係性

「説明する」とは一体どんな営みであろうか。一般的な意味では、「事柄をよくわかるように

述べること」が説明の要点である。専門的な意味では「事柄を推論により演繹的に把握すること」であり、証明に連なるものといえる。

上述のことを踏まえると、一般的には、物事をよくわかるように工夫して述べることができなくてはならない。さらに、物事を、根拠とするものを明らかにし、それをもとに推論して述べることができなくてはならない。このことができ、「筋道を立てて説明すること」ができるというよいだろう。「筋道を立てて説明すること」は証明に繋がるものであり、説明の機能から考えると、「理由の説明」が最も適当である。

また、説明は、納得と説得のためになされるのが一般的である。したがって、筋道が通っていないならば、そうでない場合に比べてよりよく納得や説得ができるということである。授業の場面では、そうしたことの実体験を重ね、筋道を立てることがいかに精神的な労力の負担を軽減してくれるかを明らかにしていく必要がある。

以上より、子どもにとって「筋道が通っている」と感じられるような説明、つまり、よりよく納得や説得ができる説明を目指せば、自ずと証明に繋がるような説明にたどり着き、そのために必要な「説明する力」も身につくのではないだろうか。よく納得や説得ができる説明とは、以下の2点が満たされればよいと考えた。

- ・正しいことの根拠が妥当であるか  
(正当化の認識)
- ・いつでも、どんな場合でも正しいといえるか  
(一般性の認識)

### 第3章 証明を意識した「説明する力」とその育成

#### 3.1 正当化の認識

算数教育の説明から中学校数学の証明に移行する上で、正当化にも段階があると考えられる。正当化を「教室でなされる、あることながら理由をつけて説明するというすべての行為」を、教室における証明としての正当化という言葉で捉えることとし、Schifter (2009) の授業分析で用いられた「『二つの偶数の和は、偶数である』ことを話し合っただけで推測しよう」という問題の解答例をもとに、以下のように正当化の分類を行った。

- ・権威的正当化 … 教科書や教師など権威に頼る。
- ・帰納的正当化 … いくつかの例から類推する。尾崎 (2003) の経験的正当化にあたる。
- ・演繹的正当化 … 既習の知識を用いる。

Schifter (2009) の授業分析では、以上の解答例がでてきたが、図形に関する問題の場合では、「見るからに正しい」とする、視覚的正当化も多くみられるため、ここに加えたい。

- ・視覚的正当化 … 図や表などから読み取れる視覚的な情報を根拠とする。

ここで、帰納的な正当化と演繹的な正当化こそ、「筋道が立った説明」であるとし、子どもが自然に主張の妥当性を判断できるようになるためには、子どもが説明の対象とする問題・課題は、結論が明示されておらず、子どもが結論を推測し、そこからどうしてそうなるのか考えることができるものである必要があると考えた。そのような経験を積み重ね、より納得できる、より説得できる説明を求めて、

推測し正当化することによって、直感による根拠に頼った、権威的正当化や視覚的正当化から、論理的な推論を必要とする、帰納的正当化や演繹的正当化へと変化していく。また、自分の立てた推測を正当化するために説明する子どもからは、「なぜ説明するのか、なぜ証明するのか」という言葉は出てこないであろう。

#### 3.2 一般性の認識

「一般性」とは何か。ここでは、説明する事象が属する変域で常に成り立つことを意味すると考える。つまり、「子どもが一般性を認識する」ことは、「子どもが、説明する数学的な事象が属している変域において、その推測が成立することを認識する」ことを意味する。

証明の学習において、命題あるいは推測の一般性を保証するものとして、生徒が演繹的な証明を認めることが挙げられる。算数科の説明でも同様に考えることができ、子どもの一般性の認識を保証するものは、子どもが演繹的な説明を認めることであると考えられる。しかし、先にも述べたように、演繹的な説明、つまり演繹的な正当化ができるということは、論理的な思考に慣れていない子どもにとって非常に困難である。そこで、「例による説明」を考えた。ここで扱う「例による説明」とは、いくつかの例を根拠とする帰納的な説明を指すのではなく、ある具体的な例を用いながらも、演繹的な説明の図式に一致する解釈や操作の系列を示すものである。

#### 3.3 指導への示唆

##### —教師の役割について—

以上で述べたような説明を子どもができる

ようになるためには、教師の役割が大きいと考えられる。教師は3つの説明のタイプを認識し、それを意識して授業に取り込むことが重要であり、権威的な正当化や視覚的な正当化のような直感に頼る正当化から、帰納的な正当化や演繹的な正当化のような論理的な正当化を用いた説明へという説明の系列を意識しなければならない。第4章で挙げる授業案の中には表現されていないが、以下の2点を意識した指導が必要であると考えられる。

一つ目は、教師の問いかけである。教師が説明の系列をとらえておくことで、子どもの現状が直感に頼る正当化による説明であれば、論理的な正当化による説明へ向けて指導していけばよいことがはっきりする。そのため、論理的な正当化による説明へ向けた適切な問いかけができるようになるだろう。

二つ目は、説明の仕方を比べることによって、それぞれの説明の特徴を話し合うことである。今までの算数の授業において、「似ている考えや違う考えはどれでしょう」など説明の内容の類似性や相違点を話し合うことは行われてきたと思われる。しかし、論理的な正当化を用いた説明、さらに帰納から演繹へと認識を変化させるためには、説明の仕方を話し合うことも必要であると思われる。そのような説明の比較を行うことによって、それぞれの説明の仕方の特徴を、子どもたちはよりはっきりととらえることができるようになる。

#### 第4章 「説明する力」を育成する指導事例の構成

第3章では、子どもの説明に関する正当性の認識と一般性の認識に焦点を当て、「筋道が立っている説明」を目指すことによって、証

明への接続を目指した「説明する力」を育てるとした。ここでは、第3章で述べた指導の留意点を踏まえ、具体的な指導内容を考えていく。

##### 4.1 指導場面の設定と指導上の工夫

ここでは、算数手品を用いた数の性質に関する問題を取り上げる。算数手品とは、算数や数学で扱われるきまりや法則を手品のタネにしたものである。子どもはもともと手品などのゲーム感覚で楽しめる問題を好むため、算数や数学の内容でも抵抗なく問題に取り組むことができると考えた。

このように、結論が明示されておらず、しかもゲーム感覚で取り組むことができるような問題では、子どもが自ずと他人に伝えたい、説明したいと思い、その説明の仕方を工夫するようになると考えられる。そして、それはよりわかりやすく伝えようとするだろうし、より他人を説得するような説明、つまり論理的正当化を用いた説明を求めるようになるだろう。

また、数の性質に関する問題では、第3章2節で述べたように、図式を用いて説明することが可能であり、「いつでも成り立つか」という一般性について考える上でも適当であると考えられる。

対象は、第4学年とする。関連する学習内容は2位数の引き算であるので、3学年以降であれば指導可能である。

##### 4.2 展開例

###### (1) 本時の目標

1から9の9個の数から2個を選んでできる2けたどうしの引き算の答えに潜むきまり

をみつけることができる。また、このきまりが成り立つ理由を考えようとする。

(2) 指導計画 (1時間扱い)

特設単元として扱う。

(3) 本時の指導

○ 足場のある授業展開

足場作りでは、個人追求の場面で、考える手掛かりとなるよう、いくつか計算をやって見せることによって、問題の調べ方の理解や課題を生み出すことを目的とする。

○ 考えることを促す手掛かりを与える

帰納的に見出したきまりの成立するわけを考えることは4年生には困難であることが予想できる。そこで、27が $9 \times 3$ で表現できる理由を考えるための手がかりを⑩と①を用いた式表現を提示することにした。

## 終章 まとめと今後の課題

全国学力・学習状況調査の文言より、説明する活動を、事実・方法・理由の3つに説明のタイプを分類した。すると、新学習指導要領での明記は、その説明の内容にかなり偏りがあることがわかった。説明の機能から考えると現行の指導では、説明に関する指導が不十分であることが明らかになった。

これらの先行研究より、証明と説明の関係性について考察し、証明に繋がる説明とは、「筋道が立った説明」であり、これはより納得できる、より説得できる説明であることが分かった。この説明を可能にする柱として、正当性の認識と一般性の認識について考察し、その指導の留意点を踏まえて具体的な指導例を挙げた。しかし、本研究では、数の性質に関わる問題についてのみの考察にとどまっている。中学校数学での証明では、文字の論証と図形

の論証の2種類の論証が存在するため、図形についての説明する活動の取り入れについて考察の余地があり、これを今後の課題とした。

## 主な引用・参考文献

- 文部科学省初等中等局学力調査室国立教育政策所教育課程研究センター研究開発部学力調査課 (2010), 平成22年度全国学力・学習状況調査【中学校】報告書
- 小関熙純 (1998), 「『論証指導』に関するいくつかの問題点」, 数学教育論文発表会論文集, 第31巻, p87-90
- 小松孝太郎 (2009), 学校数学における証明する活動のあり方, 筑波大学教育学系論集 33号, p 1-24
- 国宗進 (1987), 「『論証の意義』の理解に関する発達の研究」, 日本数学教育学会誌. 臨時増刊, 数学教育学論究第47・48巻, p 3-23
- 国宗進 (1998), 「図形の論証指導改善の視点」(発表, 論証研究会, 「テーマ別研究部会」発表集録), 数学教育論文発表会論文集, 第31巻, p91-96
- Schifter Deborah (2011), Representation-based Proof in the Elementary Grade], Teaching and Learning Proof Across the Grade, Edit by Despian A. stylianou, Maria L.Blanton, and Eric J.Knuth, p71-86