

図形の移動・変換における学習用Webコンテンツの開発

<修士論文要旨>

愛知教育大学 教育学研究科 数学教育専攻
水谷直紀

論文構成

序章 本研究の目的と方法	第3章 「どんな変換だったらいい？」の問題に関するWebコンテンツ化
第1章 数学教育における「図形の移動・変換」	第1節 「移動」に関する既存の教具を使った実践
第1節 「図形の移動・変換」に関する歴史的考察	第2節 合同変換に関するコンテンツ
第2節 指導の現状と問題点	第3節 相似変換に関するコンテンツ
第3節 解決のためのWebコンテンツ開発	第4章 対称移動の合成に関するコンテンツ
第4節 本論文における研究課題と研究方法	第1節 コンセプト
第2章 図形の移動・変換に関する考察	第2節 実装
第1節 エルランゲンプログラムと変換群	第3節 指導案
第2節 合同変換	第4節 考察
第3節 相似変換	第5章 複素数を用いた変換に関するコンテンツ
第4節 行列を用いた変換の表現	終章 本研究で明らかになったことと今後の課題
第5節 複素数を用いた変換の表現	

序章 本研究の目的と方法

Webコンテンツ開発とは、目的に合わせてコンピュータプログラムを用い、Web上で操作・探求できるシステムを開発することである。誰がどのような状況で操作するというような作者の意図を表現したデザインが可能であり、ボタン・入力・出力する場所などのコンポーネント設計を自由に行うことができる。

学習指導要領が改訂され、「図形の移動」や「複素数平面」などの変換に関する位置づけの変化がみられる。そこで、図形の移動・変換に関するWebコンテンツ開発を行うことを目的とする。

1. 数学教育における「図形の移動・変換」

1.1 「図形の移動・変換」に関する歴史的考察

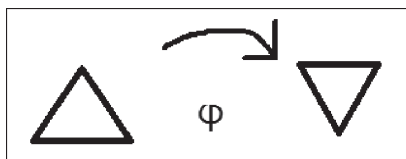
平成20年度改訂中学校学習指導要領では「図形の移動」、平成21年度改訂高等学校学習指導要領では「複素数平面」が追加された。その一方で、平成21年度高等学校学習指導要領では、「行列」が削除された。このように、変換に関する内容に改訂が見られる。「図形の移動」に関して言えば、小学校で「ずらす」「まわす」「うらがえす」などの操作を自然に行っており、これによって形や大きさが変わらないことは認め

ていることから、図形の移動が学習指導要領から削除されたときがある。一方で、合同の概念の基礎を作るための素地指導として学習指導要領に位置づけられたこともある。次に「行列」に関して言えば、計算技能面が重視されていたり、一次変換なども扱われたり、写像の部分も位置づけられたりすることもあった。しかし、今回の改訂では、ほぼ完全に行列は扱われなくなってしまうこととなった。さらに、「複素数平面」の変遷を見ると、昭和30年度・昭和35年度・平成元年度の学習指導要領では位置づけられていたが、昭和45年度・昭和53年度・平成11年度の学習指導要領では位置づけられていなかった。そして、今回の改訂では、位置づけられることとなったのである。

このように、移動・変換についての位置づけの変化が大きいといえる。

1.2 指導の現状と問題点

図形の移動・変換が学習指導要領に位置づけられていた頃の指導では、ある図形をどのような移動で移動すればよいか、というような移動を意識させて考える問題が少なかったり、移動を実際に手で扱って考えたりする問題が薄い。すなわち、下の図のように移動・変換前の図形の位置を x 、移動・変換後の位置を $\phi(x)$ としたとすると、 ϕ の部分を意識させて考える活動が少ないのである。



1.3 解決のための Web コンテンツ開発

移動・変換を直接扱えるような教材

を、Flash を用いて Web コンテンツ開発する。Web コンテンツは、マウスの動きやキーボード入力に瞬時に応答するインタラクティブなコンテンツである。また、紙と鉛筆では移動・変換の様子を観察することが困難であったのに対して、図形を実際に扱うことができるようになり、移動・変換の部分を意識して考えることができるようになる。さらに、相似変換以降の変換も、Web コンテンツ化することによって、さまざまな変換を手で扱うことが可能となる。

1.4 本論文における研究課題と研究方法

以上のことから、

1. 図形の移動・変換についての数学的背景を明らかにする。
2. 既存の教具を Web コンテンツ化し、Web コンテンツ化することの可能性を明らかにする。
3. さまざまな移動・変換に関する Web コンテンツを開発する。

この3点を課題とする。

2. 図形の移動・変換に関する考察

2.1 エルランゲンプログラムと変換群

まずは、変換にはどのようなものがあるのか、また、変換の特徴や相互関係についてのまとめる。その際には、F.Klein のエルランゲンプログラムの観点から、さまざまな変換(群)を分類する。変換群には次のものがある。

- (1) ユークリッド群 (合同変換群)
- (2) 相似変換群
- (3) アフィン変換群
- (4) 射影変換群
- (5) 位相変換群

上記の幾何学を定める変換群は射影変換群の部分群であり、記号 \supset で図示すると、

(4)射影変換群 \supset (3)アフィン変換群 \supset (2)相似変換群 \supset (1)合同変換群

となる。

2.2 合同変換

(1) 合同な図形

移動の概念があるかないかで、合同の定義が変わる。

移動して重なる2つの図形A、B・・・①

①となるときAとBは合同であるという。AとBを平面上の図形としたとき、Aを平行移動・回転移動・対称移動を繰り返すことによってBに重なる場合、AとBは合同であるという合同変換を意識した定義である。

しかし、移動の概念がなければこのような定義はできない。そのため合同を、

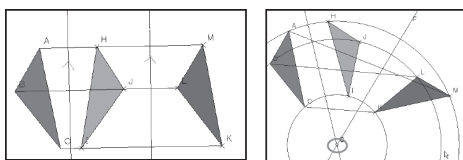
2点間の長さを変えない変換・・・②

②のような等長変換を意識した定義の仕方である。例えば、三角形の合同条件の1つである「3辺の長さがそれぞれ等しいとき」というのは、②の等長変換を意識しているのである。

そして、この①と②は同値であることがわかった。

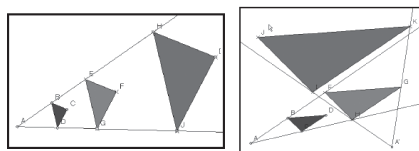
(2) 合同変換の生成元

対称移動だけに限定してみる。すると、対称移動では以下の図の通り、それらの合成で平行移動や回転移動を表現できる。よって、対称移動は合同変換の生成元となっている。



2.3 相似変換

中学校で扱われる相似拡大変換では、相似の中心を固定点とするか固定点としないかで群をなすかが変わる。



2.4.2.5 行列・複素数を用いた変換の表現

合同変換で代表的な平行移動・回転移動・対称移動をはじめ、相似変換、アフィン変換、射影変換を、行列や複素数を用いて表すとどのように表現されるのかまとめる。例として、以下の複素数の一次分数式

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

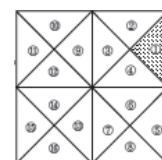
($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$)

これらの a, b, c, d の値によって、平行移動・回転・反転・相似拡大、またそれらの合成を表現することができる。

3. 「どんな変換だったらいい？」の問題に関する Web コンテンツ化

3.1 「移動」に関する既存の教具を使った実践

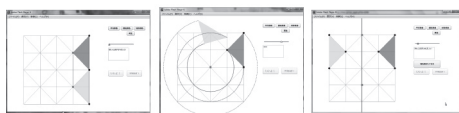
Web コンテンツ開発を行うにあたって、平成20年10月に附属名古屋中学校において実施された「図形の移動」に関する指導を参考にする。この実践では、三角形がたくさん描かれた大きなシートと移動用三角形を用いて、(問題文)「以下の図の①の三角形を②から⑯の位置に重ねるためにはどのような移動を考えればよいでしょう」



という発問によって、移動を意識させる指導が展開されていた。この実践で扱われた移動用三角形を実際に移動させてみて、移動の様子を試行錯誤しながら問題に取り組めることや、この大きなシート1つでたくさんの問題を作ることができるなどの利点があると感じられる。このような方法で、「図形の移動」つまり合同変換を指導可能であることが分かる。まずは、上記の実践で扱われた教具の Web コンテンツ化を試み、実物と同様の教具が Web コンテンツによって開発が可能かどうか検討する。

3.2 合同変換に関するコンテンツ

図形の移動で扱われる、平行移動・回転移動・対称移動を実際に画面上で行って見て、合同変換であることを確かめることのできるコンテンツを開発する。附属名古屋中学校の実践で扱われた教具の Web コンテンツ化をおこなう。以下の図は、開発した Web コンテンツの機能の図である。



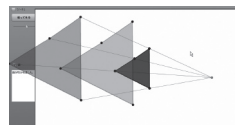
(問題文)「赤い三角形を〇〇の位置に移動させるためにはどうすればよいでしょうか」という問題を与えられたときの生徒の反応として、2つの図形が同じ向きであれば、平行移動すれば重ねることができると予想して、平行移動機能を用いて実際に正しいかどうか確かめることができる。また、向きが違ったときには、1本の線を引いてみて折り返したら重なりそうだと予想したときは、対称移動機能を用いることで重なるかどうか確認することができる。さらに、1点を中心に回転させたとき重なりと予想したときには、回転移動機能を用いて確認

することができる。このように、実際の教具を Web コンテンツ化しても同等な教材が開発可能であることがわかった。

他にも、お絵かき機能を用いて予想・出題したり、軸移動機能によってさまざまな対称の軸を調べることができたり、再生機能によって移動の様子を観察したりすることができるコンテンツとなった。

3.3 相似変換に関するコンテンツ

相似な図形で扱われる、相似の中心を動かすことのできるコンテンツを開発する。相似の中心を動かすことにより、正しい相似の中心を見つけることができるようになる機能を取り入れる。



(問題文)「青い四角形をピンク色の四角形に合わせるにはどのようにすればよいでしょう」という問題に対して、相似の中心の位置や、倍率の値を考えることができる。

という問題に対して、相似の中心の位置や、倍率の値を考えることができる。

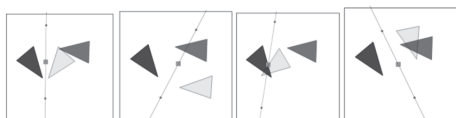
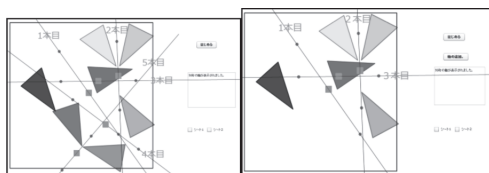
本コンテンツにおいて、2つの相似な図形における相似の中心は、対応する頂点を結んだ直線の交点が相似の中心となることを観察することができる。

しかし、平面状の固定点をもたない相似拡大変換を考えており、相似の中心が違う場合にはうまく重ね合わせることができない問題点が存在する。

4. 対称移動の合成に関するコンテンツ

図形の移動で扱われる対称移動の合成を実際に画面上で行って見て、対称移動の合成で移動可能な位置を確かめることのできるコンテンツ

について開発する。本コンテンツにより図形が伴って変化する様子を表示させることを可能にする。以下の図は、開発した Web コンテンツの機能の図である。



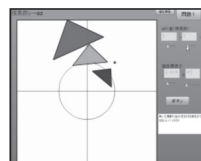
(問題文)「青い三角形を赤い三角形の位置に動かすためには対称移動を何回行えばよいでしょう。」

という問題の中で、どのような合成を考えればいいのか取り組むことができる。問題を与えられた生徒の反応として、対称移動をどのように行えば、平行移動や回転移動と同様な動きができるのか考えることができる。また、軸を動かすとともに、青い三角形が移動する様子を確認できるので、対称移動を行った後の変化の様子を確認することが可能である。

5. 複素数に関するコンテンツ

5.1 複素数の積に関するコンテンツ

図形の移動・変換は複素数でも表現することができる。1つの複素平面で移動・変換する場合、複素数の表現方法として、(1)式、(2)極座標形式、(3)平面から選択した値、の3通りの方法が考えられる。そこで、1つの複素数があたえられたとき、図形がどのように移動・変換されるのか観察できるコンテンツにすること、また、この3つが一致することを確認することができるコンテンツを開発する。



(問題文)「青い三角形を赤い三角形に合わせるためには、どんな複素数をかければよいでしょう」という問題に対して、変換を意識しながら、どのような複素数を考えればよいか、3通りの方法で試行錯誤することができる。さらに、最初の図形を動かすことができ、動かした位置での変換の様子を確認することができる。最初の図形を動かすことができることにより、あらゆる位置での図形の変化の様子を観察することが可能である。

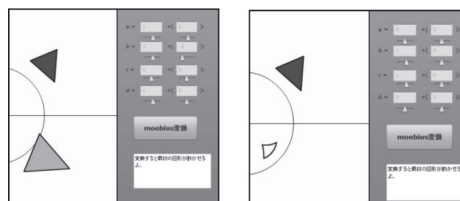
5.2 一次分数変換に関するコンテンツ

移動・変換の合成も複素数の式

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

($a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{C}, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$)

で表されることを2章で述べた。この式の a, b, c, d の値によって、1回の変換や、変換の合成を表現することができる。そこで、この a, b, c, d の値を動かしてみて、図形の様子が変わるのか確認できるコンテンツを開発する。



(問題文)「青い三角形を、他方の図形の重ねるためにはどのようにすればよいでしょう」という問題の中で、 z の値をどのようにすれば重ねることができるか考えることができる。また、 z の値を変えたときに、それぞれの値によって平

行移動・回転移動・相似拡大・反転，またそれらの合成によって変換される図形を表示することができる。さらに，元の図形を動かすと同時に， ϕ の値によって変換される図形を表示することができる。

終章 明らかになったこと

以下の3点を本研究の研究課題とした。

1. 図形の移動・変換についての数学的背景を明らかにする。
2. 既存の教具を Web コンテンツ化し，Web コンテンツ化することの可能性を明らかにする。
3. さまざまな移動・変換に関する Web コンテンツを開発する。

研究課題1について

第2章において，さまざまな変換の相互関係，2通りある合同の定義が同値であること，対称移動が合同変換の生成元となること，相似の中心を固定する場合としない場合とでは群をなすかなさないのか変わること，行列や複素数を用いて変換を表現することができることが明らかになった。

研究課題2について

第3章において，長谷川実践で扱われた教具をそのまま Web コンテンツ化し，Web コンテンツ化することの可能性を述べた。

(問題文)「2つの図形に対して，一方の図形を他方の図形に重ねるにはどのような変換が考えられるか」

という問題に対して，どんな変換だったらよいか考えることのできるコンテンツを開発した。このコンテンツでは， x と $\phi(x)$ があり，そこから平行移動機能・回転移動機能・対称移動機能によって， ϕ の部分を直接扱うことができる

移動を意識したコンテンツが開発できた。また，教具の良さを残したままのコンテンツになったことにより，実物と同等のコンテンツが開発できることがわかった。

研究課題3について

第2，3章を基に，相似変換に関するコンテンツ，合同変換の生成元である対称移動の合成に関するコンテンツや，複素数の積に関するコンテンツ，一次分数変換に関するコンテンツを開発することができた。

今後の課題

本研究において移動・変換に関する Web コンテンツの開発を行ったが，Web コンテンツの開発だけにとどまってしまったので，実際に授業実践を行っていく必要がある。授業実践をして，より利用者にとって使いやすいようにコンテンツの改良を行うことも必要であろう。さらには，変換についての問題をもっと増やしていくと同時に，他の変換についての開発も行っていく。

主要参考文献

- 飯島康之 (1999). 「作図ツールを用いた複素数に関する数学的探究 — ケーススタディを中心に」. イプシロン. 4 1. pp.81-95.
- クライン (1970). 「エルランゲンプログラム」. 共立出版.
- コセクター (1982). 「幾何学入門 第三版」. 銀林 浩 (訳) 明治図書.
- 古藤怜 (1974). 「幾何学教育と変換の考え」. 近代新書出版社刊.
- 小松醇郎 (1977). 「いろいろな幾何学」. 岩波書店