イプシロン　2010. Vol.52, 131 − 136

進化的に安定な戦略とレプリケータダイナミクスの関係

<修士論文要旨>

愛知教育大学　大学院　教育学研究科
数学教育専攻　数学科内容学領域
鈴　木　亮　央

1　はじめに

進化ゲーム理論では，生物の進化の過程を二つの側面から考察しようとしていた．その一つが先ほどの“進化的に安定な戦略”であり，もう一つが“レプリケータダイナミクス”である．“進化的に安定な戦略”とは生物の進化が最終的にどこで安定するかを示すものであり，“レプリケータダイナミクス”とは生物はどのような進化を辿るのか，その過程を常微分方程式で示したものである．

後で示すように，“進化的に安定な戦略”と“レプリケータダイナミクス”の安定解では導出の仕方が異なっている．そこで私は，進化的に安定な戦略とレプリケータダイナミクスの安定解が同じとなっていることを示したいと思い，研究していくことにした．

また私は，すでに他で示されている複数集団のレプリケータダイナミクスを表す常微分方程式では，それぞれの集団内での戦略の変移はわかるが，どの集団が繁栄するのか，絶滅するのか，あるいは共存していくのかということがわからないのではないかと疑問に思い，複数集団のレプリケータダイナミクスについても研究していくことにした．

2　進化的に安定な戦略について

集団のすべての主体が，ある既存戦略を取っているとき，突然変異などによりそれとは異なる戦略をとる主体が現れたとき，異なる戦略が既存戦略よりも利得が低いならばその異なる戦略は広まることなく淘汰される。この既存戦略のように，それ以外の戦略を進化的に侵入させない性質をもつ戦略を“進化的に安定な戦略（ESS : evolutionary stable strategy)”と呼ぶ。この進化的に安定な戦略である為の条件を定式化することができる．

いま，集団（主体 A）が既存戦略 $\vec{x} = (x, 1-x)$ をとっているときに，それとは異なる戦略 $\vec{y} = (y, 1-y)$ $(\forall\vec{y} \neq \vec{x})$ をとる主体 B が現れたとして，既存戦略が進化的に安定な戦略となる為の条件を求める．主体 A と主体 B の割合は $(1-\varepsilon, \varepsilon)$ (ε: 小さな正数) とする．このとき次の命題が成り立つ．

命題 2.1.　$\vec{x}$ が進化的に安定な戦略である，すなわち $U_L(\vec{x}, (1-\varepsilon)\vec{x} + \varepsilon\vec{y}) > U_L(\vec{y}, (1-\varepsilon)\vec{x} + \varepsilon\vec{y})$ であることと，２条件

(均衡条件)　$U_L(\vec{x}, \vec{x}) \geqq U_L(\vec{y}, \vec{x})$　$(\forall\vec{y} \neq \vec{x})$

(安定条件)　$U_L(\vec{x}, \vec{x}) = U_L(\vec{y}, \vec{x})$ ならば $U_L(\vec{x}, \vec{y}) > U_L(\vec{y}, \vec{y})$　$(\forall\vec{y} \neq \vec{x})$

が成り立つことは同値である．

3 単一集団のレプリケータダイナミクス

“レプリケータダイナミクス”とは，ある範囲内に存在する生物が繰り返しゲームを行うことによりどのような戦略へと変化していくのか，それぞれの戦略の割合の瞬間増加率を求めて，進化の過程を利得行列を用いて表そうとしたものである．レプリケータダイナミクスの導出には，マルサス成長モデル，ロジスティック成長モデル，ロトカ・ヴォルテラ方程式が必要になってくる．今述べた全てのモデルは，ある範囲内に生息している集団の平均個体数の瞬間増加率を常微分方程式を用いて表される．

n 集団のそれぞの個体数を $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とし，それぞれの内的自然増加率を $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ とすれば，n 集団のロトカ・ヴォルテラ方程式は次のように表すことができる．

$$\dot{p}_i = (\gamma_i + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} p_j) p_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

ところで，単一集団の相互作用は一つのゲームであると考えることができる．それは，単一集団の中に n タイプの小集団が存在している場合，ゲームのプレイヤーが n 種の純粋戦略をとっている状況と読み替えることができるからである．よって，２人ゲームにおいて対戦相手が混合戦略 $\vec{x}$ をとっていることと形式的には同等の意味を持つ．
このようにして集団同士の相互作用による増加率を，ゲームにおける利得行列を用いて表せば，単一集団の中の n 小集団のそれぞれの瞬間増加率は次のような常微分方程式で表される．

$$\frac{dx_i}{dt} = (U_L(\vec{e_i}, \vec{x}) - U_L(\vec{x}, \vec{x}))x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

これを“単一集団のレプリケータダイナミクス (Replicator-Dynamics)”という．

4 複数集団のレプリケータダイナミクス

次に，初めに述べたように他で示されている複数集団，特に２集団でのレプリケータダイナミクスを載せる．集団１の戦略の割合を $\vec{x} = (x, 1-x)$, 集団２の戦略の割合を $\vec{y} = (y, 1-y)$ とし集団１と集団２の利得行列は表 1(a) であるとするが，(a) に局所的シフトを施した利得行列 (b) を用いる．また，$A = \begin{pmatrix} \alpha_A & 0 \\ 0 & \beta_A \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_B & 0 \\ 0 & \beta_B \end{pmatrix}$ とする．

(a) 集団 2

集団 1	S_B^1	S_B^2
S_A^1	a_A, a_B	b_A, c_B
S_A^2	c_A, b_B	d_A, d_B

$$\alpha_i = a_i - c_i, \quad \beta_i = d_i - b_i \longrightarrow$$

(b) 集団 2

集団 1	S_B^1	S_B^2
S_A^1	α_A, α_B	0,0
S_A^2	0,0	β_A, β_B

表 1

このときの２集団でのレプリケータダイナミクスは次の常微分方程式で表される．

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ((\alpha_A + \beta_A)y(t) - \beta_A)x(t)(1 - x(t)) = (\alpha_A + \beta_A)(y(t) - \theta_A)x(t)(1 - x(t)) \\ \dot{y}(t) = ((\alpha_B + \beta_B)x(t) - \beta_B)y(t)(1 - y(t)) = (\alpha_B + \beta_B)(x(t) - \theta_B)y(t)(1 - y(t)) \end{cases} \tag{3}$$

4.1 アリとアブラムシのレプリケータダイナミクス

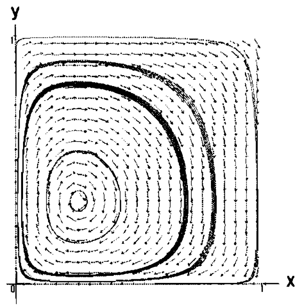

図 1 アリとアブラムシのレプリケータダイナミクス

上の図は一つのモデルとして，ある環境の中でのアリとアブラムシとのレプリケータダイナミクスの関係を表している．アリはアブラムシを”常に助ける”と”助けない（無視する）”の2つの戦略を，アブラムシは”何もしない”と”攻撃する”の2つの戦略をとるとしき，そのときの利得行列を次のように表す．

		アリ	
		助ける	助けない
アブラムシ	何もしない	$\underline{10}$, 5	2, $\underline{8}$
	攻撃する	8, $\underline{10}$	$\underline{3}$, 9

表 2

このときのレプリケータダイナミクスは次のように表される．

$$\dot{x}(t) = (3y(t) - 1)(1 - x(t))x(t)$$
$$\dot{y}(t) = (-4x(t) + 1)(1 - y(t))y(t)$$

このレプリケータダイナミクスの $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ のベクトル場が図 1 となる．図 1 をみると，集団 1・集団 2 どちらもある戦略へと収束していくことなく，刻々と戦略が変わっていくのを見て取れる．つまり，アリとアブラムシはどこか一つの戦略へと収束されることなく常に増減を繰り返しているので，アリとアブラムシが共存して生活していることを示している．しかしながら，ここで私はこのベクトル場は，本当にアリとアブラムシが共存していることを示しているのか，という疑問が浮かんできた．なぜならば，例えば $x = 1, y = 0$ の点についてである．この点はアリが絶滅したわけではなく，戦略が片寄っただけである．従って，これではアリとアブラムシの増減がどうなっているのかはわからないのではないかと考えた．

5 2集団の 4×4 の利得行列を用いたレプリケータダイナミクス

いま，集団 1 で戦略 A を取る人数を N_1，戦略 B を取る人数を N_2，集団 2 で戦略 C を取る人数を N_3，戦略 D を取る人数を N_4 とする．また，集団 1 と集団 2 の割合をそれぞれ $(1-\alpha)$ と α であるとし，集団 1 の戦略の割合を $\vec{x} = (x, 1-x)$，集団 2 の戦略の割合を $\vec{w} = (w, 1-w)$ とする．集団 1・集団 2 の出生率をそれぞれ γ_1, γ_2 とし，集団 1 と集団 2 の出生率をそれぞれ γ_1, γ_2，死

亡率をそれぞれ δ_1, δ_2 と表し，利得行列 P を以下のように表す．

プレイヤー2

プレイヤー1		A	B	C	D
	A	a,a	b,c	i,j	k,r
	B	c,b	d,d	m,n	p,q
	C	j,i	n,m	e,e	f,g
	D	r,k	q,p	g,f	h,h

$$P = \begin{pmatrix} a & b & i & k \\ c & d & m & p \\ j & n & e & f \\ r & q & g & h \end{pmatrix}$$

このとき，以下のような命題が成り立つ．

命題 5.1. ある範囲内に２つの集団が生存していて，それぞれが戦略を２つ有していたとき，レプリケータ・ダイナミクスは次で表される．但し，集団１で戦略 A と戦略 B を取る割合を $x:(1-x)$ で表し，集団２で戦略 C と戦略 D を取る割合を $w:(1-w)$ で表す．また，集団１と集団２の割合を $(1-\alpha):\alpha$ で表す．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = U_P(\vec{e_1} - \vec{x}, (1-\alpha)\vec{x} + \alpha\vec{w})x \\ \dfrac{dw}{dt} = U_P(\vec{e_3} - \vec{w}, (1-\alpha)\vec{x} + \alpha\vec{w})w \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = \Big((\gamma_2 - \delta_2) - (\gamma_1 - \delta_1) + U_P(\vec{w} - \vec{x}, (1-\alpha)\vec{x} + \alpha\vec{w})\Big)\alpha(1-\alpha) \end{cases}$$

5.1 十進 BASIC

実際にプログラムを走らせ，x, y, α の動向を見てみる．今回はプログラム言語として十進 Basic を使った．
ここで出生率と死亡率，つま内的増加率は集団１も集団２も同じ値であるとする．また，利得行列 P を次のように置いた．

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 10 & 6 \\ 5 & 6 & 8 & 3 \\ 5 & 5 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

このとき複数集団のレプリケータダイナミクスを求めてみると，それぞれ次式となる．

$$\frac{dx}{dt} = 4(1-\alpha)\left(\frac{\alpha(2-w)+1}{4(1-\alpha)} - x\right)x(1-x)$$

$$\frac{dw}{dt} = -3\alpha\left(\frac{\alpha(5-x)+x-2}{3\alpha} - w\right)w(1-w)$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (4x^2 + 2x(2-w) - 3w^2 + 16w + 8)\left(\frac{4x^2 + (1-w)x + 2w - 3}{(4x^2 + 2x(2-w) - 3w^2 + 16w + 8)} - \alpha\right)\alpha(1-\alpha)$$

このときそれぞれの均衡点，瞬間増加率が０となるのは次のようになる．

$$\frac{dx}{dt} = 0 \text{ となるのは } x = 0,\ 1,\ \frac{\alpha(2-w)+1}{4(1-\alpha)}$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 \text{ となるのは } w = 0,\ 1,\ \frac{\alpha(5-x)+x-2}{3\alpha}$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 \text{ となるのは} \alpha = 0,\ 1,\ \frac{4x^2 + (1-w)x + 2w - 3}{(4x^2 + 2x(2-w) - 3w^2 + 16w + 8)}$$

レプリケータダイナミクスのベクトル場を十進 Basic で表すと, 図 2 となる.

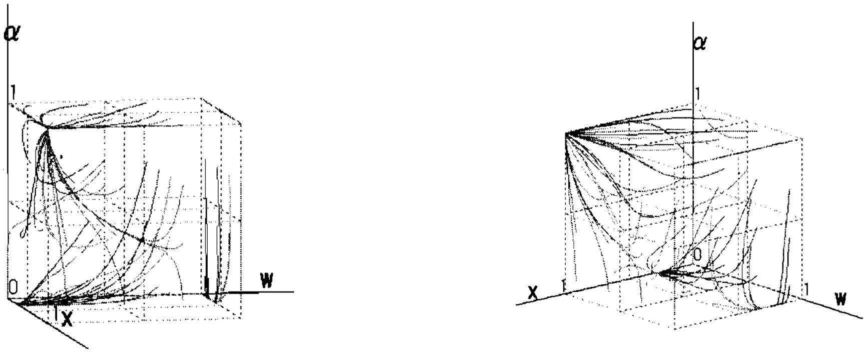

図 2　レプリケータダイナミクス

x, w, α 全てが均衡点となるのは, それぞれの均衡点を組み合わせた $3^3 = 27$ 通りのうち, それぞれの範囲が $0 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq w \leqq 1, 0 \leqq \alpha \leqq 1$ であるので, 以下の 20 通りとなる. ただし,

$$a = \frac{\alpha(2-w)+1}{4(1-\alpha)}, b = \frac{\alpha(5-x)+x-2}{3\alpha}, c = \frac{4x^2+(1-w)x+2w-3}{(4x^2+2x(2-w)-3w^2+16w+8)}$$

とする.

$$\begin{array}{lll}
(x,w,\alpha)=(0,0,0) & (x,w,\alpha)=(0,b,0) & (x,w,\alpha)=(0,1,0) \\
(x,w,\alpha)=(1,0,0) & (x,w,\alpha)=(1,b,0) & (x,w,\alpha)=(1,1,0) \\
(x,w,\alpha)=\left(\frac{1}{4},0,0\right) & (x,w,\alpha)=\left(\frac{1}{4},1,0\right) & (x,w,\alpha)=\left(\frac{1}{4},b,0\right) \\
(x,w,\alpha)=(0,0,1) & (x,w,\alpha)=(a,0,1) & (x,w,\alpha)=(1,0,1) \\
(x,w,\alpha)=(0,1,1) & (x,w,\alpha)=(a,1,1) & (x,w,\alpha)=(1,1,1) \\
(x,w,\alpha)=\left(1,0,\frac{1}{8}\right) & (x,w,\alpha)=\left(1,1,\frac{1}{9}\right) & \\
(x,w,\alpha)=(a,0,c) & (x,w,\alpha)=(a,1,c) & (x,w,\alpha)=(a,b,c)
\end{array}$$

6　複数集団の進化的に安定な戦略とレプリケータダイナミクスについて

進化的に安定な戦略とレプリケータダイナミクすの関係を考察していきたいが, 進化的に安定な戦略である為には, Nash 均衡であることが必要である為, まずは Nash 均衡とレプリケータダイナミクスの関係について考察した.

いま, 複数集団が存在していたとき戦略が全部で n 個あるとする. このとき世界がとる混合戦略 $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の集合を $\Delta = \{\vec{x} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \geqq 0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$ と表し, 利得行列を P とする.

$\vec{u}$ が Nash 均衡であるとは $\forall \vec{v} \in \Delta$ に対して

$$U_P(\vec{u}, \vec{u}) = \vec{u} P {}^t\vec{u} \geqq U_P(\vec{v}, \vec{u}) = \vec{v} P {}^t\vec{u}$$

すなわち,

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot P {}^t\vec{u} \geqq 0 \tag{4}$$

となることである. ここで n 次元空間を考えれば, h 番目の純粋戦略 $\vec{e_h}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ は Δ の頂点である.

特に，n 個の純粋戦略の内 k 個の純粋戦略には正の確率が，それ以外には 0 の確率が与えられているような混合戦略集合，つまり $1 \leqq i_1 < \cdots < i_k \leqq n$ とすれば

$$\Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}}) = \{x_{i_1}\vec{e_{i_1}} + \cdots + x_{i_k}\vec{e_{i_k}} \mid x_{i_j} > 0, x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = 1\}$$

を考えたとき，$\vec{u} \in \Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ が Nash 均衡である為には $^\forall\vec{v} \in \Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ に対して (4) が成り立たなければならない．$\vec{u}$ は $\Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ の定義よりその内部に存在しているベクトルであるので，$\vec{u} - \vec{v}$ は $\Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ 上のあらゆるベクトルが考えられる．よって (4) ぱ条件を満たす為に $P{}^t\vec{u}$ は，

$$\Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}}) \perp P{}^t\vec{u}$$

である必要がある．

次に，Nash 均衡点とレプリケータダイナミクスについて考察する．いま世界を一つの集団と捉えているので，単一集団のレプリケータダイナミクスを用いることができる．世界が混合戦略 $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を持っているとき i 番目のレプリケータダイナミクスは

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= \Big(U_P(\vec{e_i}, \vec{x}) - U_P(\vec{x}, \vec{x})\Big)x_i \\ &= \Big((\vec{e_i} - \vec{x})P{}^t\vec{x}\Big)x_i\end{aligned}$$

で表された．よって混合戦略 $\vec{x} = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ のレプリケータダイナミクスは

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \begin{pmatrix} x_1 & & O \\ & x_2 & \\ O & \ddots & x_n \end{pmatrix} {}^t\Big(E - (\vec{x} \ \ldots \ \vec{x})\Big) P\vec{x} \tag{5}$$

と表される．Nash 均衡点を $\vec{u} \in \Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ とすれば，$\vec{x}(t) \equiv \vec{u}$ が (5) となることが次のようにして分かる．

$\Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}}) \perp P{}^t\vec{u}$ であるので ${}^t\Big(E - (\vec{u} \ \ldots \ \vec{u})\Big) P\vec{u} = 0$ となり，$e_{i_j} \in \Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ ならば (5) の右辺の i_j 成分は 0 となる．また $e_{i_j} \notin \Delta(\vec{e_{i_1}}, \ldots, \vec{e_{i_k}})$ ならば $u_{i_j} = 0$ であるので (5) の右辺の i_j 成分も 0 となる．

従って，$\vec{x}(t) \equiv \vec{u}$ はレプリケータダイナミクスの均衡点となる．

以上より，次の命題が示された．

命題 6.1. *ある範囲内に複数集団が生存していたとき，ゲーム理論での Nash 均衡解はレプリケータダイナミクスの均衡解となっている．*

7 おわりに

本研究では，複数集団が存在していたときに集団内の戦略の変移だけでなく，集団の増減についても述べた複数集団のレプリケータダイナミクスを示すことができた．残念ながら，ある範囲内に複数集団が生存していたときの進化的に安定な戦略とレプリケータダイナミクスの安定解について示すまでには至らなかったが，ある範囲内に複数集団が生存していたときのゲーム理論での Nash 均衡解はレプリケータダイナミクスの均衡解となっていることを示すことができた．

参考文献

[1] 生天目章, ゲーム理論と進化ダイナミクス, 森北出版 (2005)

[2] 松原望,{ 意思決定の科学 1 } 意思決定の基礎, 朝倉書店 (2002)

[3] 石原英樹/金井雅之,{ 意思決定の科学 5 } 進化的意思決定, 朝倉書店 (2002)