

## 二次特殊線型群のモジュラー表現

### <修士論文要旨>

愛知教育大学大学院 福田 靖 弘

本論文の目的は、二次特殊線型群  $SL(2, F)$  の通常既約指標が標数 2 において既約ブラウア指標にどのように分解されるかを考察することである。目的達成のために特別な行列を定義後、行列と通常既約指標の対応を明示して、行列について考察を行った。

$F$  を  $\mathbb{Z}_2$  の位数  $q$  である  $n$  次拡大体とする。このとき  $SL(2, F)$  の共役類別は以下の通り。 ( $\mathcal{A} := \{a \in F \mid t^2 - at + 1 \text{ が } F \text{ 上で既約}\}$ )

固有多項式	相異なる根	重根		根なし
共役類の代表元	$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 1$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$ $a \in \mathcal{A}$
共役類の位数	$q^2 + q$	1	$q^2 - 1$	$q^2 - q$
元の位数	$(q - 1)$ の約数	1	2	$(q + 1)$ の約数
共役類の個数	$\frac{q - 2}{2}$	1	1	$\frac{q}{2}$

先ず  $SL(2, F)$  のは標数が 0 の場合、既約表現の個数は共役類の個数に等しい。一方で標数が  $p$  の場合、既約モジュラー表現の個数は位数が標数で割りきれない共役類の個数に等しい。よって  $SL(2, F)$  の既約通常指標は  $(q + 1)$ 、既約ブラウア指標は  $q$  個存在する。

標数が 0 の場合の表現について。  $SL(2, F)$  の位数  $q - 1$ ,  $q + 1$  の元を  $h, k$  とする。  $SL(2, F)$  で  $h$  は対角化され、  $k$  は対角化されない元である。論文 [2] 記載の通常既約指標の表現及び指標表をあらわす。ただし  $\xi$  は 1 の原始  $q^2 - 1$  乗根とする。

	代表元の位数	1	$q-1$	$q+1$
表現の個数	既約指標	$E$	$h$	$k$
1	1	1	1	1
$q/2$	$\rho_i$	$q-1$	0	$-\xi^{i(q-1)} - \xi^{-i(q-1)}$
1	$\eta_0$	$q$	1	-1
$(q-2)/2$	$\eta_j$	$q+1$	$\xi^{j(q+1)} + \xi^{-j(q+1)}$	0

続いて  $SL(2, F)$  の既約ブラウア指標について表す.  $F$  上の 2 次元ベクトル空間を  $V = \{^t[\alpha \ \beta] \mid \alpha, \beta \in F\}$  とする. そして  $SL(2, F)$  から  $GL(V)$  への恒等写像で定まる表現を  $A$  とする. また  $\text{Gal}(F/\mathbb{Z}_2)$  のフロベニウス写像  $\theta$  に対して,  $\det(g^\theta) = \det(g)^\theta$  より次のように定義できる.

$$g^\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}^\theta = \begin{bmatrix} \alpha^\theta & \beta^\theta \\ \gamma^\theta & \delta^\theta \end{bmatrix} \in SL(2, F)$$

$\Omega = \{0, 1, \dots, n-1\}$  とする. そして  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  に対して

$$[X] = \left\{ \sum_{i=1}^r \epsilon_i 2^{x_i} \mid \epsilon_i = 1 \text{ 又は } -1 \ (1 \leq i \leq r) \right\}$$

と定める. そして, 自然数  $m$  に対して  $[X]$  の元をすべて  $m$  を法として考えた重複集合を  $[X]_m$  と表す. また  $X \subset \Omega$  に対して次のように定める.

$$\Phi_X = \bigotimes_{x \in X} A^{\theta^x}$$

**定理** 既約モジュラー表現全体は  $\{\Phi_X \mid X \subset \Omega\}$  である.

$\Phi_X$  のブラウア指標を  $\phi_X$  とする. すると既約ブラウア指標の値は次の通り.

$$\phi_X(E) = 2^{|X|}, \quad \phi_X(h) = \sum_{x \in [X]_{q-1}} \xi^{(q+1)x}, \quad \phi_X(k) = \sum_{x \in [X]_{q+1}} \xi^{(q-1)x}$$

そして  $SL(2, F)$  の通常既約指標と集合の対応を考察する.

$\eta_0^0 = \phi_\Omega$  と対応している, よって次数が  $q-1, q+1$  である  $\rho_i^0, \eta_j^0$  の既約ブラウア指標への分解を考える.

$X, Y \subset \Omega$  に対して  $i \in \Omega \setminus (X \cup Y), i+1 \in (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$  を満たす  $i$  が存在する (ただし  $n=0$  とする.) とき  $X, Y$  は  $(01)$  を含むという.

**A の定義** 次を満たす  $\Omega$  の部分集合族を  $\mathcal{A}$  という。

- a1)  $X, Y \in \mathcal{A}$  ( $X \neq Y$ ) ならば  $X, Y$  は (01) を含む。  
 a2)  $\sum_{X \in \mathcal{A}} 2^{|X|} = q - 2$ .

**B の定義** 次を満たす  $\Omega$  の部分集合族を  $\mathcal{B}$  という。

- b1) 異なる  $X, Y \in \mathcal{A}$  は  $X \cup Y = \Omega, X \cap Y = \emptyset$  の場合を除いて  $X, Y$  は (01) を含む。  
 b2)  $\sum_{X \in \mathcal{B}} 2^{|X|} = q$ .  
 b3) b1) における唯一の例外  $X, Y$  は  $X \cup Y = \Omega, X \cap Y = \emptyset$

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  の定義を満たす元全体を  $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B$  で表す。

**定理**

- (1)  $\rho_i^0 = 1 \oplus \sum_{X \in \mathcal{A}} \phi_X$  を既約ブラウア指標の分解とするとき  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_A$ .  
 (2)  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_A$  とするとき  $1 \oplus \sum_{X \in \mathcal{A}} \phi_X = \rho_i^0$  を満たす  $\rho_i^0$  が存在する。

**定理**

- (1)  $\eta_j^0 = 1 \oplus \sum_{X \in \mathcal{B}} \phi_X$  を既約ブラウア指標の分解とするとき  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_B$ .  
 (2)  $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_B$  とするとき  $1 \oplus \sum_{X \in \mathcal{B}} \phi_X = \eta_j^0$  を満たす  $\eta_j^0$  が存在する。

**定理**  $\rho_i^0$  をブラウア指標へ分解した場合二次の成分は奇数個現れ、 $\eta_j^0$  の分解では二次の既約ブラウア成分は偶数個現れる。

以上から通常既約指標  $\rho_i, \eta_j$  と集合  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  が 1 対 1 で対応している。これより  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  を行列で表す。行列の表し方は集合  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  の成分を縦に並べたものであり、行の入れ替えは同一視する。ただし、横にスライドさせて得られた行列が異なるものであれば、別の行列として考える。そして  $\mathcal{A}$  に対応した行列を  $A$  で表す。 ${}_i A_j$  は横にスライドさせて得られる異なる行列の個数を表し、 $j$  は 1 がひとつのみである行ベクトルの個数を表す。

$n = 6$  の場合の  $\mathcal{F}_A$  について記す。 $\mathcal{F}_A$  の位数は 32 であり、 $\sum_{X \in \mathcal{A}} 2^{|X|} = 62$ 。また次の  ${}_6 A_1$ 、そして右にひとつスライドさせた行列に対応する通常既約指標は次の通り。ただし  $X_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}, X_2 = \{1, 2, 3, 4\}, X_3 = \{2, 3, 4\}, X_4 = \{3, 4\}, X_5 = \{4\}$  とする。

$$1 \bigoplus_{i=1}^5 \left( \bigotimes_{x \in X_i} A^{\theta^i} \right) = \rho_{32}, \quad 1 \bigoplus_{i=1}^5 \left( \bigotimes_{x \in X_i} A^{\theta^{(i+1)}} \right) = \rho_1$$

${}_{6}A_1$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	,	${}_{6}A_3$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	,	${}_{6}A_3$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	0	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0																																																																																										
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	1	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
${}_{6}A_3$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	,	${}_{2}A_3$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	,	${}_{6}A_5$	<table style="border-collapse: collapse; width: 100%; text-align: center;"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> </table>	0	1	2	3	4	5	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	2	3	4	5																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
1	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	1	0	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	1	0	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	1	0	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	1	0																																																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0	0	0	1																																																																																																																																																																																																																																																																				

[参考文献]

[1] Shun'ichi Tanaka : Construction and classification of irreducible representation of special linear group of second order over a finite field, Osaka J.Math. 4(1967), 65-84.

[2] 和田俱幸 : 集中講義 , 2007

他 5 篇.