

# 代数的推論を促す教材とその指導に関する研究

## <修士論文要旨>

愛知教育大学 教育学研究科 数学教育専攻

石黒友巳

### 論文構成

序章 本研究の目的と本論文の構成

1. 本研究の目的
2. 本論文の構成

第1章 代数的推論とそれから見た日本の算数教育

1. 代数的推論とその分類
  - 1.1. 代数的推論
  - 1.2. 代数的推論の分類
  - 1.3. 代数的推論の分類より
2. 数と式及び数量関係領域における算数教育の現状
  - 2.1. 記号と式の扱い
  - 2.2. 等号の意味理解
  - 2.3. 変数についての意味理解
  - 2.4. 日本の算数教育の現状より

第2章 代数的推論を促し得るアプローチと先行研究

1. プレ代数指導
2. 擬変数指導
3. 早期代数指導
  - 3.1. Carraher らの先行研究
  - 3.2. Carpenter らの先行研究

4. 代数的推論を促し得るアプローチの比較

第3章 代数的推論を促す教材及び指導の枠組み

1. 日本のカリキュラム内容と代数的推論を促す教材内容との整合性
2. 代数的推論を促す指導の基準
  - 2.1. 等号の指導の意義と基準
  - 2.2. 記号を積極的に用いて問題場面を記述させる活動を取り入れた指導の意義

第4章 代数的推論を促す指導の具体化

1. 等号の意味理解を深める指導例
  - 1.1. 教材観及び学習目標
  - 1.2. 学習計画
  - 1.3. 考察
2. 記号を用いて式を記述させる活動を取り入れた指導例
  - 2.1. 教材観及び学習目標
  - 2.2. 学習計画
  - 2.3. 考察

終章 本研究のまとめと今後の課題

### 本研究の目的

藤井 & Stephens(2002)が、「中等教育段階での文字式の指導が困難であることは国際的にも定説になっている」(p.163)と述べているように、文字式や方程式の理解に困難を示す児童・生徒は多い。詳細は第1章で述べるが、

筆者は、文字式の学習を困難にしている1つの原因が、小学校の算数指導にあるのではないかと考える。その考えからすると、中学校からこの問題を解決することは困難であるため、小学校の段階から文字式や方程式の理解を深めるための指導が必要となってくる。平

成 10 年の学習指導要領改訂で小学校算数科から削除されてしまった文字・文字式の指導が、平成 20 年改定の新学習指導要領で再び小学校に戻されることになった。しかし、文字・文字式の指導が小学校から行われていた平成 10 年以前からも文字式の学習における困難は指摘されていたため、文字・文字式の指導をそのまま戻しても、過去から継続する問題が解消するわけではないとも考えられる。また、平成 20 年版の『中学校学習指導要領解説 数学編』に、「今回の改訂では、義務教育としてのまとまりが強く意識され、これまで以上に小学校と中学校の関連や連携について配慮することが要請されている」と示されていたり、文字・文字式の指導内容とつながりの深い「数量関係」領域において重点を置くべき指導として、平成 20 年版の『小学校学習指導要領解説算数編』に、「数量についての事柄を、言葉や数、式、表、グラフなどによって表現すること、二つの数量の間の変化や対応を調べるなど関数の考えを育てること」と示されている点、そして、「D 数量関係」が、小学校低学年から設けられることになった点から考え、平成 20 年の学習指導要領の改訂は数量についての事象や関係を様々な表現、特に言葉や式などによって表現したり、読み取ったりするという教育目標が、小学校低学年から中学校との連携を意識して構想されているとも解釈できる。こうした状況を考えると、文字・文字式の学習内容が小学校に単純に復活したと考えるわけにはいかないだろう。現在まで指摘されてきた文字式の学習の困難を解消し、理解の深まりを図るとともに、既存の指導の良い点は活かしながら、小学校算数科の記号や文字指導を拡張し、中学校以降の学習を強

く意識した教材及び指導が望まれるところであろう。そこで本研究では、文字式の理解の困難性を解決することを目的とし、それを可能ならしめるものとして代数的推論に着目する。そして、代数的推論を促す教材及び指導のあり方について考察し、日本の小学校算数科にそれを取り込む際の枠組みを検討することにする。

## 1. 代数的推論とそれから見た日本の算数教育

Carraher & Schliemann(2007)は、代数的推論を、「生徒が代数を教えられる以前に、自ら算術の規則や変数を使って、代数的な表現を行うこと」(p.670)であると示している。また、Blanton & Kaput(2005)は、「生徒が特定の例の集まりから数学的アイデアを一般化し、生徒の年齢相応の方法で形式的に表現するプロセス」(p.413)であると説明している。そこで、本稿における代数的推論を、両者の代数的推論の定義で共通すると考えられる点と、代数的推論を小学校算数に取り入れることを考えているという 2 点から、「児童がその年齢に応じた方法で、数学的な考えを記号や文字を使って一般化し、代数的に表現すること」として捉える。

日本の小学校算数の教科書の中にも代数的推論を促し得る教材を扱っていることがわかるが、そこでは、代数的推論が十分に促されていない可能性があり、また、そこでのある種の指導が、児童・生徒の文字式や方程式の理解を困難にしている可能性があると考えられる。例えば、代数を学習するときには、等式の両辺を関係的に捉えることが必要となる。しかし、日本の小学校の算数指導においては、

教科書の紙面の構成から、等式の左に演算があり、その計算を実行させるために等号が書かれ、等式の右側に答えを書かせるような指導が一般的にされていると考えられる。子どもがこのような指導を受け、繰り返し学習をしていくことで、数量の間の関係を正しく捉えることができなくなり、文字式や方程式の学習が困難になる可能性がある。

また、変数についての意味理解に関して、変数に気付かせ、一般性を読みとらせることを意図した指導目標になっているはずであるが、教科書紙面では、式が書かれてしまっており、その一般性を推論するまでもなく、式を求めることができってしまうため、代数的推論を促しているとは考え難い面がある。これら代数的推論という観点から見た日本の算数教育の問題点を検討するために、諸外国で指導・研究がされている代数的推論を促しうるアプローチを考察する。

## 2. 代数的推論を促し得るアプローチと先行研究

### ①プレ代数指導

Carraher & Schliemann(2007)は、プレ代数指導とは、算術と代数を別教科として区別し、代数を学ぶ1、2年先立って、算術からの記号の拡張された用法や意味を指導していくものであると説明している。プレ代数指導は、算術が先で代数指導がその後といった教授の方向性を考え、代数学習へ円滑に進んでいくことができるように、算術の終わりや代数の始めの架け橋として指導される。藤井 & Stephens(2002)は、文字式の指導が困難であることは国際的にも定説となっているにもかかわらずその具体的な改善策が見出せない理由

は、「小学校算数と中学校数学との乖離をいわば暗黙に容認し、それぞれの指導が展開されてきた実態がある」(p.163)ためだと指摘している。この指摘から考えると、プレ代数指導は、算術と代数とを区別し、別教科であるという立場からそれぞれの指導が展開されているため、文字式の理解の困難性を解消できるかどうかは疑問である。

### ②擬変数指導

我が国の算数では、従来から数を変数的に扱いつつ指導を進めるようなアプローチが多く見られた。そのようなアプローチは擬変数指導と呼ばれる。藤井 & Stephens(2002)は、擬変数とは、「表記としては具体的な数字であるが、表記内容として一般性が意図的に内包されている数」(p.164)であると説明している。擬変数は、学習者が数式の中に見出していくものであるため、指導法によっては数式を扱う小学校低学年からでも指導していくことができる。現在の日本の算数教科書の中にも、擬変数が暗黙的に導入されている。しかし、擬変数指導の問題点として、擬変数は、児童・生徒にとっては、「数の式」であり、無意識にかつ自然に計算の対象となってしまうため、意図的に計算せずに式の構造や、その式が示す内容の一般性を読むことは非常に困難であるということが考えられる。

### ③早期代数指導

Carraher & Schliemann(2007)は、算術は、特定の数や量がより一般的な例として扱われるような代数の一部を扱うものとする。そして、幼い頃(およそ6-12歳児)から記号や文字を使用した代数的推論や代数に関連した教授のことを早期代数指導と表すと説明している。早期代数は、プレ代数指導や擬変数指

導のような、代数学習のための準備的な指導とは異なり、記号や文字も小学校低学年から積極的に導入し、カリキュラム自体の大幅な変革が求められるものになっている。

Carpenter ら(2003)は、代数的推論を促進させるために、小学校低学年から指導していく5つの段階的な活動を早期代数指導の具体的な例として示している。

- ①数式の真・偽を問う活動、オープンな数式を使った活動
- ②推測を表現し、洗練し、編集する活動
- ③複数の変数と繰り返された変数がある方程式に関わる活動
- ④推測を記号的に表現する活動
- ⑤正当化の活動

Carpenter ら(2003)の先行研究の結果より、日本の小学校の算数指導においても、①から④までの活動を低学年から系統的に行っていくことで、低学年の子どもでも代数的推論によって命題を正当化する段階まで到達させられる可能性があると考えられる。そして、子どもに代数的推論をさせたり、本格的な代数学習を始める際に文字・文字式の扱いに困難を抱かせないようにするために、①のような活動を通し、等号の意味理解を十分に深めさせることが必要と考えられる。

代数的推論を促し得る3つのアプローチを比較可能な観点から比較すると、代数的推論を小学校低学年から一貫して促すためには、擬変数指導と早期代数指導が参考になると考えられよう。さらに、低学年から「数量関係」が重要視されるようになった平成20年改訂の学習指導要領を考慮すると、早期から記号や文字を導入し代数的推論を促す指導を想定

している、早期代数指導が代数的推論を就学初期から促すために有効であると考えられる。

### 3. 代数的推論を促す教材及び指導の枠組み

現在の小学校算数科の中には、早期代数指導の先行研究の中で扱われていた代数的推論を促し得る教材と類似する教材が存在することがわかる。しかし、低学年の計算指導における等号の使用形態は、代数的推論における関係の記述の基本である等号の意味理解を阻害する可能性が高い点、そして、教科書中の教材には、既にその推論の核となり、子どもたちに考え出してほしいような考え方や式、あるいは図形などがすでに示されてしまっているという2つの問題点を残したまま、現行の高学年の教材を低学年に下ろしたとしても、結局、現行の中学校での代数学習の困難に対して行われているような対処療法が低学年に移行するだけであろう。

早期代数の考え方や教材を活かすという立場からすれば、本節で取り上げたような現行の教材の構成やその指導原理の見直しなどが図られなければならないだろう。そのために、代数的推論を促すための等号の指導及び式を記述させる活動を取り入れた指導の基準について検討していく。

#### ①等号の指導

等号の捉え方を発達させる指導は、代数的推論を促す指導の出発点として、またその後の指導の素地として十分機能するものと考えられる。Carpenter ら(2003)は、等号の捉え方を発達させるためには、次の4つの基準を努力すべき目標として示している。

- (1) 子どもたちが考える等号が意味していることについて、子どもたちが明確に言語化しておくこと
- (2) 子どもたちが、 $a+b=c$  という形式ではない幾つかの数式を正しいと容認する
- (3) 子どもたちが、等号は 2 つの等しい数の間の関係を表すということを認識する
- (4) 子どもたちが、実際に計算することなしに数学的な表現を比較することができる

以上の目標基準を参考に、日本の算数教育を見てみると、真・偽の数式を提示し等号の意味について話し合う活動、 $a+b=c$  という形式ではない数式を扱う指導、そして等式の両辺の 2 つの数量関係を比較するような指導などは、積極的にには行われていないように思われる。そこで、代数的推論を促す指導の素地となる、等号の指導の基準として、次のように示す。

- (i) 数式の真・偽を問う活動を扱う
- (ii)  $a+b=c$  という形式以外の数式についても扱う
- (iii) 等式の両辺の数量を比較させる

## ②記号を積極的に用いて問題場면을記述させる活動を取り入れた指導

代数的推論の典型例としては、問題場面における数量間の関係を式で記述し、それらの関係を思考するような推論があげられるため、式の機能を強調する指導が十分に行われれば、代数的推論を促す指導になり得るところである。式を記述するという活動が重要でありながらも、その指導を積極的に推奨するような教科書紙面が構成されない現状を招いている大きな原因の 1 つとして、多くの児童にとっ

て式を記述することが困難であることが考えられる。そこで、この問題を解消する指導方法として、□を含んだ式を早期から導入することが有効ではないかと筆者は考える。

未知数としての□や文字が含まれる数式を取り扱うことは一般的には高度であると捉えられているかもしれないが、実際に、問題場面を素直に表現しようと式を記述する児童にとっては、未知数に□や文字を当てて記述することの方が自然であるとも考えることができる。このことに関して、例えば中島(1969)は、次のような小学校低学年の逆思考問題「何個かあったみかんを 6 個たべたが、まだ 8 個残っている。」という具体的な問題場面を例示して、「逆算にあたる場合／答えを求めるための立式は比較的困難なものであるが、この場合も (x を用いることによって) 容易に式によって表現することができる。(括弧内筆者)」(p.70) と説明している。逆思考問題などでは、未知数を□や文字で表現させる指導をすることで、子どもたちが問題場面の関係を記述するのを助けたり、問題中の数量間の関係を関係的に思考することを促し得ると考えられる。

## 4. 代数的推論を促す指導の具体化

本章では初めに、上述した等号の捉え方を発達させる指導の基準のうち、(iii) 等式の両辺の数量を比較させる指導を取り入れた指導例を構成し、指導上の問題点などについて検討する。一般的に、 $a+b=c+d$  のような形式の等式についてはあまり扱われないと考えられる。そこでまず、 $a+b=c+d$  のような形式の等式を正しいと認識させるために、それぞれの辺を計算させ、同じ値になることから確

認させるようにした。そして、次に  $13+8=8+13$  の等式を提示し、計算しなくとも同じ数字を足していることから等式は正しいことに気付かせ、等式の両辺の数量が等しい関係にあることを考えさせるようにした。 $3+8=3+8$  の等式の右辺が、 $4+7$  のように変化しても、3 から 1 大きくなり 4 に、8 から 1 つ小さくなり 7 になっただけで、右辺の数量は  $3+8$  の量から変化していないということを、子どもにとって身近なシーソーの模式図上で数図ブロックを移動させながら確認させる。

次に、記号を積極的に用いて問題場面を記述させる活動を取り入れた指導例を構成し、指導上の問題点などについて検討する。多くの教科書の逆思考の問題場面では、テープ図やブロック図と一緒に、未知数を□の記号を用いて表現していることがわかる。そこで、その□を積極的に用いて式を記述させる活動を取り入れる。そうすることで、問題場面を逆思考で思考することができない児童でも、順思考で思考することができ、比較的容易に問題場面の関係を式で記述することができると考えられる。課題の提示後すぐに、数図ブロックを操作して数量の関係を考えるのではなく、□を積極的に用いて立式させる活動を取り入れ、問題場面の把握をするようにした。問題場面を□-6=8 と立式し、その式や思考した問題場面の関係を数図ブロックを操作して表現することで、数量の関係をより推論することができると考えられる。

### 研究のまとめと今後の課題

本研究を通して、小学校低学年から代数的推論を促す意図的な指導をすることが、文字式学習で頻繁に取りざたされる困難を不必要

に助長しないことを明らかにした。しかしながら、日本の算数教育のカリキュラムの問題や多くの教科書の紙面上の問題から、小学校低学年から代数的推論を促す指導を常に展開していくことは容易ではない。故に、代数的推論を促す教材及び指導の枠組みを示すことが必要である。そこで本研究では、子どもに代数的推論をさせるための基本の指導として、等号の指導の意義と指導基準を示し、さらに、実際に代数的推論をさせるための指導として小学校低学年から記号を積極的に用いて問題場面を記述する活動を取り入れた指導の意義と指導例の構成を行った。

今後の課題としては、等号の指導や、記号を積極的に用いた指導の他に、Carpenter ら (2003) が示した 5 つの活動を日本の算数教育のカリキュラムに合うように改善した教材や指導例を、できるだけ多く作成することであろう。そして、本研究の内容を実践し、検証することが必要であると考ええる。

### 主要参考文献

- Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practices that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), pp.412-446.
- Carpenter, T.P., Franke, M.L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically : Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Heinemann.
- Carragher, D.W. & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F.K. Lester, Jr.(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 669-705. National Council of Teachers Mathematics.
- 藤井齊亮, Stephens, M. (2002). 「数と計算の学習指導における擬変数の役割」に関する研究. 『第 35 回数学教育論文発表会論文集』, 163-168. 鳥取大学.