Bulletin of Aichi Univ. of Education, 64（Natural Sciences）, pp. 11 − 13, March, 2015

類似関係によるファジィ集合族の分割

佐々木 守寿

情報教育講座

Partition of Fuzzy Subsets by Similarity Relations

Moritoshi SASAKI

Department of Information Sciences, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1. 記法と用語

実数の部分集合Kに対して，Kの上限を∨K，Kの下限を∧Kで表す．ふたつの実数a，bに対しては，∨{a, b}をa∨b，∧{a, b}をa∧bで表す．

集合SからTへの写像f：S→Tを考えたとき，Sをfの始域，Tをfの終域とよぶ．

考察対象全体の集合Xを定める．この考察対象全体の集合をuniverseとよぶ．

Xの要素sが，X上の概念Aにあてはまる度合いを表す写像mA：X→［0, 1］を，ファジィ集合Aを特徴づけるメンバシップ関数とよぶ．mA（s）の値が大きいほど，Xの要素sが概念Aにあてはまる度合いが大きい，と解釈する．

概念Aを否定した「Aではない」と言う概念を，A^Cで表し，これを特徴づけるメンバシップ関数mA^C：X→［0, 1］を，任意のs∈Xに対して，

$$mA^C(s) = 1\text{-}mA(s) \qquad (1)$$

と定義する．A^CをAの補ファジィ集合とよぶ．

A，BをX上のファジィ集合とする．「AまたはB」と「AかつB」いう概念を，それぞれA∪BとA∩Bで表し，和ファジィ集合と積ファジィ集合とよぶ．それぞれのメンバシップ関数を，任意のs∈Xに対して，

$$m[A \cup B](s) = mA(s) \vee mB(s) \qquad (2)$$

$$m[A \cap B](s) = mA(s) \wedge mB(s) \qquad (3)$$

と定義する

X上のファジィ集合全体をF（X）と書く．

2. 距離性類似によるF（X）の分割

我々は，同じ自然言語による表現に対応させるファジィ集合どうしを「距離性類似である」とみなす関係を，それらのファジィ集合を利用する目的に応じて導入する方法を次のように提案した．[3]

X：考察対象全体の集合（universe）

A, B：X上のファジィ集合

とする．

目的に応じて，順序集合Yと，単調非減少な写像g：［0, 1］→Yを定める．任意のx∈Xに対して，

$$g(mA(x)) = g(mB(x)) \qquad (4)$$

が成立するとき，AとBは距離性類似であるという．

距離性類似には，次の性質がある．

［命題1］

距離性類似は同値関係である．

〈証明〉

Xを考察対象全体の集合とする．Yを順序集合とし，g：［0, 1］→Yを単調非減少な写像とする．

∀A∈F（X），∀x∈Xに対して，

$$g(mA(x)) = g(mA(x)) \qquad (5)$$

が成立するので，距離性類似は反射的である．

式（4）の対称性から，距離性類似は対称的であることがいえる．

AとB，BとCがそれぞれ距離性類似であるとする．このとき，任意のx∈Xに対して

$$g(mA(x)) = g(mB(x)) \qquad (6)$$

かつ

$$g(mB(x)) = g(mC(x)) \qquad (7)$$

が成立するので，

$$g(mA(x)) = g(mC(x)) \qquad (8)$$

となり，AとCは距離性類似である．よって，距離性類似は推移的である．

以上より，距離性類似は同値関係である．

〈証明終〉

ある集合X上のファジィ集合は無限個定義できる．つまり，F（X）は無限集合である．しかし，自然言語による表現は有限個である．

命題1より，距離性類似であるという関係をを用い

て，F（X）を同値類に分割することができる．もし，有限個の同値類に分割できれば，各同値類に自然言語による表現を対応させることが可能になる．

ここでいう「分割」とは，通常の集合論における次のような概念である．

集合Sの分割とは，P（S）の部分集合Tで，次を満たすものである．

（p1）$S = \cup\{L \mid L \in T\}$

（p2）$L, M \in T$ かつ $L \neq M \Rightarrow L \cap M = \varphi$

ファジィ集合AとBが距離性類似である場合，

$$mA(s) < mA(t),\ mB(s) > mB(t) \tag{9}$$

のようにメンバシップ関数の値の大小関係が異なっていても，

$$g(mA(s)) = g(mB(s))\ (\leftarrow この値をyとおく) \tag{10}$$

であれば，mA（s）とmB（s）は $g^{-1}(y) \subseteq [0, 1]$ という同じ区間に属している．gが単調非減少な写像なので，$g^{-1}(y)$ は［0, 1］の部分区間になることに注意したい．そのため，

$$|mA(s) - mB(s)| \leqq \vee g^{-1}(y) - \wedge g^{-1}(y) \tag{11}$$

となり，mA（s）とmB（s）の距離が一定値で押さえられる．つまり選好順序が異なっても，選好程度が同じという解釈ができる．

ここで，

$$v = \wedge g^{-1}(y) \tag{12}$$

$$w = \vee g^{-1}(y) \tag{13}$$

とすると，区間［v, w］にyというラベルをつけたと考えることができる．

このことから，たとえばYを{1, 2, 3, 4, 5}とした場合，［0, 1］を $g^{-1}(1)$，$g^{-1}(2)$，$g^{-1}(3)$，$g^{-1}(4)$，$g^{-1}(5)$ という5つの区間に分割することになる．先ほどと同じ「分割」が話題であるが，ここでは，分割する対象がF（X）とは異なることに注意したい．

Yにおける順序は，

$$1 < 2 < 3 < 4 < 5 \tag{14}$$

とする．

$mA : X \rightarrow [0, 1]$ と $mB : X \rightarrow [0, 1]$ に $g : [0, 1] \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ をかぶせることで，メンバシップ関数の終域を要素数が有限である全順序集合{1, 2, 3, 4, 5}に変更したとも解釈することができる．

F（X）あるいはF（X）の部分集合族の，距離性類似の関係による分割を，少し具体的に考えてみたい．

考察対象全体の集合Xを，食べ物の集合とする．人間のある集合Mを固定する．Mに属する各人に，それぞれの主観で，「おいしいもの」というファジィ集合を作ってもらう．$a \in M$ が作成したファジィ集合をD-aで表すことにする．これらのファジィ集合の族，

$$\{D\text{-}a \mid a \in M\} \subseteq F(X) \tag{15}$$

を距離性類似の関係によって分割して得られる各々の同値類に，「甘くて柔らかい果物が好き」等の自然言語による表現を対応させたい．

このために，たとえば，つぎのような単調非増加関数 $g : [0, 1] \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ を定義する．

$$g(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leqq s \leqq 0.3 のとき \\ 2 & 0.3 < s \leqq 0.4 のとき \\ 3 & 0.4 < s \leqq 0.6 のとき \\ 4 & 0.6 < s \leqq 0.7 のとき \\ 5 & 0.7 < s \leqq 1 のとき \end{cases} \tag{16}$$

ここで，{1, 2, 3, 4, 5}は，式（14）を満たす全順序集合とする．

距離性類似であるという関係を用いて，$\{D\text{-}a \mid a \in M\}$ を同値類に分割する．各同値類から代表元を選び，それぞれに自然言語による表現を対応させることができれば，目的は達成される．

しかし，自然言語による表現がうまくできない場合，次のような方法を用いることも考えられる．

同値類の代表元を見てからではなく，あらかじめ，

しょっぱい魚介類が好き

煮た野菜が好き

などの，用いる自然言語による表現を用意する．

次に，用意した表現に現れる，しょっぱいもの，かたいもの，魚介類，野菜，焼いた物，ゆでたもの等をラベルとするファジィ集合を定義する．これらのファジィ集合のいくつかから，和，積，補の演算を用いて，各々の自然言語による表現に対応させる標準のファジィ集合を作成する．この場合，演算の和，積，補は，それぞれ自然言語による表現では，「または」，「かつ」，「〜ではない」に対応させる．

このような準備をしておき，$\{D\text{-}a \mid a \in M\}$ を距離性類似であるという関係を用いて分割した各同値類には，代表元に「近い」標準ファジィ集合に対応する言語による表現と同じものを対応させる．ここで，代表元と距離性類似な標準ファジィ集合が存在すれば，それを「近い」とすれば問題ない．しかし，そうではない場合は，ファジィ集合どうしが「近い」という概念を新たに導入する必要がある．

3. メンバシップ関数の終域について

ファジィ集合は，「おいしい」や「長い」などの形容詞そのものが含む曖昧さを表現する道具のひとつである，という解釈ができる．

考察対象の世界になる，ある食べ物の集合Xを決め，評価する主体となる人を選び，その人にX上の「おいしいもの」というラベルのファジィ集合を定めてもらうことを考える．この場合，各々の食べ物に対して，「おいしいもの」に当てはまる度合いを0以上1以下の実数を対応させるわけであるが，多くの人は0.14159265358979などという値は用いない．しかし，ファジィ集合を特徴づけるメンバシップ関数の終域が

［0, 1］であるため，ある$s \in X$に対して

$$mA（s）= 0.14159265358979 \quad (15)$$

となるファジィ集合がF（X）の要素として存在する．

実数値全体と等しい濃度をもつ［0, 1］は，メンバシップ関数の終域としては要素数が多すぎる感じがする．ある食べ物が「おいしいもの」に当てはまる度合いを0.7に決めたときに，0.695ではいけないのですかと言われた場合，どのように答えればよいのだろうか．有理数だけでも，このような疑問が生じるのであるが，［0, 1］には循環小数としても表現できない$\pi/4$のような無理数まで含まれている．

ファジィ集合を特徴づけるメンバシップ関数の終域には，要素が有限個の順序集合が適切であると思われる．

距離性類似という関係を定義する際，ファジィ集合のメンバシップ関数 $mA : X \to [0, 1]$ に，単調非減少な関数$g : [0, 1] \to Y$をかぶせることで，メンバシップ関数の終域を要素数が有限である全順序集合Yに変更した背景には上記の考えがある．

4. まとめ

距離性類似であるという関係を用いて，F（X）を同値類に分割し，得られた各々の同値類に自然言語による表現を対応させることを考察した．

その手順を吟味した結果，ファジィ集合どうしが「近い」という概念を新たに定義する必要が生じる可能性があることがわかった．この定義に，fuzzy function[2]が応用できないか検討したい．

また，距離性類似の定義は，ファジィ集合を特徴づけるメンバシップ関数の終域［0, 1］をいくつかの区間に分割して考えている，と解釈できることがわかった．通常の集合Sの分割とは，P（S）の部分集合Tで，次を満たすものである．

（p1）$S = \cup \{L | L \in T\}$

（p2）$L, M \in T$かつ$L \neq M \Rightarrow L \cap M = \varphi$

ある$V \in P(S)$を選び，$T = \{V, V'$（←Vの補集合）$\}$とすると，TはSの分割である．この場合，Vを特別なファジィ集合とみなし，上の（p1）をメンバシップ関数を用いて表すと，次のようになる．

$$\forall x \in X に対して mV(x) \vee mV'(x) = 1 \quad (17)$$

さらに，（p2）の結論にあたる部分は，

$$\forall x \in X に対して mV(x) \wedge mV'(x) = 0 \quad (18)$$

となる．しかし，X上のファジィ集合Aを考えた場合，一般的には，

$$\forall x \in X に対して mA(x) \vee mA^C(x) = 1 \quad (19)$$

は成立せず，

$$\forall x \in X に対して 0.5 \leqq mA(x) \vee mA^C(x) \leqq 1 \quad (20)$$

となる．ただし，通常の集合論にはない，

$$\forall x \in X に対して mA(x) + mA^C(x) = 1 \quad (21)$$

という性質を持っている．さらに，

$$\forall x \in X に対して mA(x) \wedge mA^C(x) = 0 \quad (22)$$

は成立せず，

$$\forall x \in X に対して 0 \leqq mA(x) \wedge mA^C(x) \leqq 0.5 \quad (23)$$

となる．

ファジィ分割という概念は確立されているとは言えないが，次のような定義が提案されている．[1]

X上のファジィ集合のn-組（A_1，A_2，…，A_n）で，

$$\forall i に対して A_i \neq \varphi \quad (23)$$

$\forall x \in X$に対して

$$mA_1(x) + mA_2(x) + \cdots + mA_n(x) = 1 \quad (24)$$

を満たすものを，Xのファジィ分割という．

本論文では，いくつかの場面で分割を用いている．これらの分割をファジィ分割に置き換えて，新たな概念を得ることが今後の課題である．

5. ［引用文献］

［1］Didier Dubois, Henri Prade, Fuzzy Sets and ystems : Theory and Applications, Academic Press New York 1980

［2］Moritoshi Sasaki, Fuzzy Functions, Fuzzy Sets and Systems, International Fuzzy Sysytems Association, vol. 55, pp. 295–301, 1993

［3］佐々木守寿，ファジィ部分集合族上の類似関係，愛知教育大学研究報告，第63輯（自然科学編），2014，pp. 21–23

（2014年9月24日受理）