Bulletin of Aichi Univ. of Education, 63（Natural Sciences）, pp. 21 − 23, March, 2014

ファジィ部分集合族上の類似関係

佐々木 守寿

情報教育講座

Similitude Relations on Fuzzy Subsets

Moritoshi SASAKI

Department of Information Sciences, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1. 準備と記法

人間は，自然言語を用いて，意思の伝達や考察を行っている．自然言語の単語の中には，本質的な曖昧さを含むものがある．ある人が「元気な青年」にあてはまるかどうかは，年齢，50 m走のタイム等を詳しく聞いても判定が困難である．「元気な」や「青年」という単語が，曖昧さをもつからである．さらに，そこには，「元気な青年」という言葉を使用する者の主観による曖昧さも存在する．

ファジィ集合は，上述のようなあいまいさを含む概念を，数学的に表現する道具のひとつである．

「大きい人」という概念を考えてみる．この概念を表すファジィ集合を定義する場合，まず，考察対象全体の集合Xを定める．身長が同じでも，対象が幼稚園児か大学生かでは，大きいと感じるかどうかが異なるからである．この考察対象全体の集合をuniverseとよぶ．次に，写像

$$m_{\text{大きい人}} : X \to [0, 1]$$

を定義する．この[0, 1]を，$m_{\text{大きい人}}$の終域とよぶ．値域という用語は，$m_{\text{大きい人}}(X) = \{m_{\text{大きい人}}(x) \mid x \in X\}$を表すことがあるので，用いない．$m_{\text{大きい人}}(x)$は，$x \in X$が「大きい人」にあてはまる度合いである．1に近いほど，あてはまる度合いが大きいことを表し，各人が主観的に決めてよい．このとき，X上に「大きい人」という名前のファジィ集合が定義された，という．写像$m_{\text{大きい人}}$を，ファジィ集合「大きい人」を特徴づけるメンバシップ関数とよぶ．

以下では，X上の概念をA，B，C等で表す．

Xの要素sが，概念Aにあてはまる度合いが0.8である場合，$mA(s) = 0.8$と表現される．概念Aを否定した「Aではない」と言う概念を，A^cで表し，これを特徴づけるメンバシップ関数$mA^C : X \to [0, 1]$を，任意の$s \in X$に対して，$mA^C(s) = 1\text{-}mA(s)$と定義する．A^cをAの補ファジィ集合とよぶ．

X上のファジィ集合全体をF（X）と書く．さらに，「大きい」と「小さい」のように，対義語が一意に定まるX上の概念に対応するファジィ集合全体をG（X）と書く．

2. 類似関係の必要性

ファジィ集合を出力とするシステムが，種々提案されている．その出力の意味を人間が解釈する場合，ファジィ集合を自然言語による表現に対応させることが必要になる．ある集合上にファジィ集合は無限個定義できるが，自然言語による表現は有限個である．従って，ひとつの自然言語による表現に複数のファジィ集合を対応させなければならない．

我々は，X上の，対義語が一意に定まる概念に対応するファジィ集合全体の族G（X）上に，「同種である」という同値関係を導入することを試みた[3]．2つのファジィ集合が似ている度合いを求める方法は，複数個提案されている[1]．しかし，それらは，いずれもメンバシップ関数の値に注目したもので，対応する自然言語表現は考慮されていなかった．

ファジィ集合を表現するメンバシップ関数のとる値において，0.5は特別な意味をもつことがある．通常の集合論における，集合に属すことを表す1と属さないことを表す0の，ちょうど中間の値だからである．「長い」というファジィ集合において，$m_{\text{長い}}(x)$の値が0.5より小さい場合，xは「短い」という概念にあてはまる度合いが大きいと解釈できる．このように，対義語が存在する概念においては，0.5は重要な意味を持つ．

ところが，「黄色い」というファジィ集合を考えた場合，$m_{\text{黄色い}}(x)$の値が0.5より小さくても，xは「白い」とか「青い」とかは言えず，「黄色くない」と言うしかない．一般に，対義語が存在しない概念については，同様である．

本論文では，対義語が一意に定まる概念に限定せず，同じ自然言語による表現に対応するファジィ集合どうしを「類似である」とみなす関係を，それらのファ

ジィ集合を利用する目的に応じて導入する方法を提案する．

3. 利用目的に応じた類似関係とは

ファジィ集合のメンバシップ関数どうしの，関数のグラフの距離が近いという概念とは異なった，利用目的に応じた「類似性」を導入したい．

ここで，

X= {s, t, u} ：食べ物の集合

を考える．A，B，Cを，それぞれA君，B君，C君の好物を表すX上のファジィ集合とし，各々のメンバシップ関数を次のようにする．

mA（s）= 0.4　mA（t）= 0.6　mA（u）= 0.7

mB（s）= 0.3　mB（t）= 0.8　mB（u）= 0.7

mC（s）= 0.1　mC（t）= 0.2　mC（u）= 0.9

まず，各自，好きな順に食べることに利用すると，次のようになる．

A君は，u，t，sの順

B君は，t，u，sの順

C君は，u，t，sの順

これは，メンバシップ関数の値の順序に注目しており，A君とC君が同じ行動をしている．この場合，ファジィ集合AとCは，どちらも「u，t，sの順に食べる」という自然言語の表現に対応しており，類似であると解釈できる．

次に，好みの食べ物（メンバシップ関数の値が0.5以上のもの）を持ち帰ることに利用すると，次のようになる．

A君は，tとuを持ち帰る

B君は，tとuを持ち帰る

C君は，uを持ち帰る

これは，メンバシップ関数の値が属す範囲に注目しており，A君とB君が同じ行動をしている．この場合，ファジィ集合AとBは，どちらも「tとuを持ち帰る」という自然言語の表現に対応しており，類似であると解釈できる．

4. 類似関係の定義と解釈

メンバーシップ関数の終域 [0, 1] は，実数全体の集合Rの部分集合である．そのため，我々は，実数の全順序関係と距離

|s−t|　　　s, t∈R

を暗黙のうちに想定している．

従って，2つのファジィ集合のメンバシップ関数を比較したときの順序と距離については，次の4パターンが考えられる．

（1）順序が保存されており，距離の差も小さい

（2）順序が保存されているが，距離の差が大きい

（3）順序は保存されていないが，距離の差が小さい

（4）順序が保存されておらず，距離の差も大きい

2つのファジィ集合に対して，（1）の場合は類似であり，（4）の場合は類似ではないと判断できる．

さきほどの食べ物の集合の例において，好きな順に食べる場合は (2) に対応し，順序があっていれば距離の差が大きいことは問題にしていない．

持ち帰る場合は（3）のパターンに対応し，メンバシップ関数の値がある同じ区間にはいっていれば，順序が異なることは問題にしていない．

そこで，まず，（2）の場合でも類似であるケースを含む定義を提案する．

［定義1］

X：考察対象全体の集合（universe）

A, B：X上のファジィ集合

とする．

狭義単調増加な写像，f：［0, 1］→［0, 1］が存在し，

任意のx∈Xに対して，

f（mA（x））= mB（x）

が成立するとき，AとBは順序性類似であるという．

fが狭義単調増加な写像であるとは，次を満たすことである．

s＜t ⇒ f（s）＜f（t）　　　s, t∈［0, 1］

この定義は，対義語が一意に定まる概念に対応するファジィ集合全体の族G（X）上の「同種である」という同値関係の定義[3] から，

f（0）= 0

f（0.5）= 0.5

f（1）= 1

という条件を省いて，対義語が存在しない概念にも適用できるようにしたものである．上記の条件がないのは極端と思えるかもしれない．その場合には，「uぐらい」（uは0以上1以下の実数）を表すメンバシップ関数m_uを用意し，fによって，0は0のそばに，0.5は0.5のそばに，1は1のそばに移る度合いを表す，m_0 (f (0))，$m_{0.5}$（f（0.5）)，m_1（f（1））の値に閾値をもうけるという定義も考えられる．

次に，（3）の場合でも類似であるケースを含む定義を提案する．

［定義2］

X：考察対象全体の集合（universe）

A, B：X上のファジィ集合

とする．

目的に応じて，順序集合Yと，単調非減少な写像g：[0, 1]→Yを定める．

任意のx∈Xに対して，

$$g(m_A(x)) = g(m_B(x))$$

が成立するとき，AとBは距離性類似であるという.

定義2においては，Yとgを目的に応じて固定して判断する．一方，定義1においては対象のファジィ集合のペアごとに，fが変わってもよいことに注意したい.

gが単調非減少な写像であるとは，次を満たすことである.

$$s \leqq t \Rightarrow g(s) \leqq g(t) \qquad s, t \in [0, 1]$$

さきほどの食べ物の例のAとBの場合，

$Y = \{1, 2\} \qquad (1 < 2)$

$0 \leqq x < 0.5$　のとき　$g(x) = 1$

$0.5 \leqq x \leqq 1$　のとき　$g(x) = 2$

と定めると

$$g(m_A(x)) = g(m_B(x))$$

が成立し，AとBは距離性類似になる.

距離性類似の定義は，メンバシップ関数の値の大小関係が逆転しても，ある同じ区間に属していればよいという解釈もできる．つまり選好順序が異なっても，選好程度が等しいという解釈である.

定義2において目的に応じて定めるgとYについて考えてみる．$\forall b \in Y$に対して，gによるbの原像は

$$g^{-1}(b) = \{x | x \in X \text{かつ} g(x) = b\} \subseteq X$$

である．ここで,

$v = \inf \; g^{-1}(b)$

$w = \sup \; g^{-1}(b)$

とする．このとき，区間［v, w］にbというラベルをつけたと解釈することができる．従って，Yを｛1, 2, 3, 4, 5｝とすれば，5段階評価を表現することができる.

5.　まとめ

対義語が一意に定まらない概念に対応するファジィ集合も含めた中で，2つのファジィ集合が類似であると判断する方法を提案した.

メンバシップ関数の終域である［0, 1］における全順序と距離に注目して考察をすすめた.

今後，［0, 1］の中で，要素が概念には全く関連がないことを表す0，完全に関連することを表す1，どちらとも言えないことを表す0.5という重要な意味を持つ数値にかかわる考察を加味することが必要と思われる.

また，［0, 1］のファジィ分割，［0, 1］×［0, 1］上のファジィ関係，［0, 1］からYへのファジィ関数［2］を用いた定義について考えを進めたい.

6.　［引用文献］

［1］Didier Dubois, Henri Prade, Fuzzy Sets and ystems: Theory and Applications, Academic Press New York 1980

［2］Moritoshi Sasaki, Fuzzy Functions, Fuzzy Sets and Systems, International Fuzzy Sysytems Association, vol. 55, pp. 295–301, 1993

［3］佐々木守寿，ファジィ集合の同値類について，愛知教育大学研究報告，第57輯（自然科学編），2008，pp. 21–24

（2013年9月30日受理）