平成２８年度卒業研究概要

オイラーの ϕ 関数についての考察

中等教育教員養成課程　数学専攻　柴田　藍

本論文の目標は, $a \in \mathbb{N}$ に対し, $S_a := \{n \in \mathbb{N} \mid \phi(n) = a\}$ と定義して a に条件を与えたとき, $|S_a|$ がどのような値をとるのかを考察することである. 具体的には以下の定理を示す.

定理 1. l を平方因子を持たない正の偶数とする. このとき, $|S_l| = 0$ または $|S_l| = 2$ または $|S_l| = 4$ である. また, 奇素数 p_i を用いて, l の素因数分解が

$$l = 2p_1p_2\cdots p_k \ (p_1 < p_2 < \cdots < p_k)$$

と表されたとし, 次の 2 つの条件を考える:

(i) $2p_1p_2\cdots p_k + 1$ が素数である,

(ii) $2p_1p_2\cdots p_{k-1} + 1 = p_k$.

このとき,

$$|S_l| = 2 \Leftrightarrow \text{(i), (ii) のどちらか一方を満たす},$$
$$|S_l| = 4 \Leftrightarrow \text{(i), (ii) のどちらも満たす}.$$

さらに,

$$S_l = \begin{cases} \{l+1, 2(l+1)\} & \text{((i) のみを満たす)} \\ \{(l/p_k+1)^2, 2(l/p_k+1)^2\} & \text{((ii) のみを満たす)} \\ \{l+1, 2(l+1), (l/p_k+1)^2, 2(l/p_k+1)^2\} & \text{((i), (ii) の両方を満たす)} \end{cases}$$

である.

また, この定理の特殊な場合として, $l = 2p$ とする. このとき, 条件 (i) を満たすのは p がソフィー・ジェルマン素数であるときであり, 条件 (ii) を満たすのは $p = 3$ の場合に限る. このことから次が成り立つ.

定理 2. p を 3 より大きい素数とし, $l = 2p$ とおく. このとき, $|S_l| = 0$ または $|S_l| = 2$ が成り立ち, さらに,

$$|S_l| = 2 \Leftrightarrow p \text{ がソフィー・ジェルマン素数}, S_l = \{2p+1, 2(2p+1)\}$$

が成り立つ.

本論文では, ソフィー・ジェルマン素数になるための必要条件についても考察している.