学籍番号		論文題目	和音の選択 C —和音進行の数理的考察—
氏名	村松 央道		

1　音程差，和音進行

様々な音律によって音階が作られているが，数理的な明確さから平均律によって定められた 12 音音階を扱うこととする．これにより 12 音音階の楽音は $\mathbf{Z}$ で表し，特にオクターブによる楽音の同一視を考える場合は $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ の元として扱い，下の表によって対応 θ を与え，2 音 $X, Y \in Ch$ 間の距離を

$$|X - Y| = |\theta(X) - \theta(Y)| \tag{1}$$

と定める．以下では特に断らない限り，**音程差**とは (1) で与えられるものを意味する．(1) で与えられた番号について $\pmod{12}$ の意味で $(k, k{+}3, k{+}6, k{+}10)$ または $(k, k{+}4, k{+}6, k{+}10), (k, k{+}4, k{+}6, k{+}11)$ と表される和音を三度堆積和音と呼ぶ．また，和音進行は時代や地域，文化によって様々であるが，現在よく使用されている和音進行は図 1 にまとめられる．

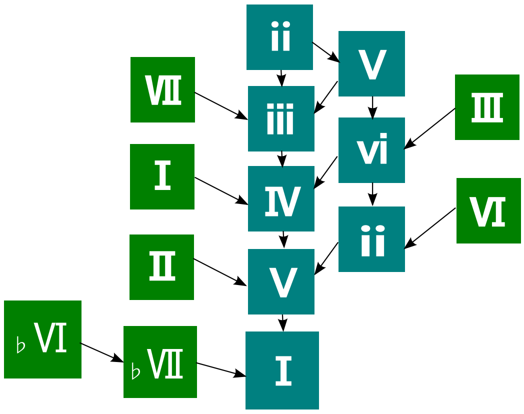

図 1　基本的な和音進行

Semitone encoding $\theta : Ch \to \mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$												
音名	C	C♯	D	D♯	E	F	F♯	G	G♯	A	A♯	B
番号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

2　和音間距離

以下では 1 オクターブが c 音からなる一般的な音階を考える．各音は $\mathbf{Z}$ の元で表され，d 音からなる和音を $s_i \in \mathbf{Z}$ を小さい順に並べた有限部分集合 $S = [s_1, \ldots, s_d]$ と表すことにする．c 音から得られる d 和音 $S = [s_1, s_2, \ldots, s_d]$ を 1 回転回した和音を $S(1) = [s_2, s_3, \ldots, s_d, s_1 + c]$ と定め，l 回転回した和音を $S(l) = (S(l-1))(1)$ と定める．また $S = [s_1, s_2, \ldots, s_d]$ を r 回転回したときの和音を $S = [s_1^r, s_2^r, \ldots, s_d^r]$ と表すことにする．

定義 2.1　2 つの d 和音 $S = [s_1, s_2, \ldots, s_d], T = [t_1, t_2, \ldots, t_d]$ において，和音間距離を $d(S, T) = \max_{1 \leq i \leq d} |\, s_i - t_i \,|$ と定義する．また転回の違いを同一視した和音間距離を $D(S, T) = \min_{0 \leq r \leq d-1} d(S, T(r))$ と定義する．特に，$D(S, T) \leq 2$ を満たすとき進行 $S \to T$ は **smooth** であるという．

3　J 関数と極大均等性

定義 3.1　$0 < d \leq c$ を満たす $c, d, m \in \mathbf{Z}$ に対し，$\mathbf{Z}$ 上の関数を $J^m_{c,d}(k) = \left\lfloor \dfrac{ck + m}{d} \right\rfloor$ と定め，これを **J-関数**と呼ぶ．またこれに付随する d 個の元からなる集合 $\mathcal{J}^m_{c,d}$ を $\mathcal{J}^m_{c,d} = \{J^m_{c,d}(0), J^m_{c,d}(1), \ldots, J^m_{c,d}(d-1)\}$ と定め，これを和音の **J-表示**と呼ぶ．また，k 回転回した和音を $\mathcal{J}^m_{c,d}(r) = \{J^m_{c,d}(r), J^m_{c,d}(r+1), \ldots, J^m_{c,d}(r+d-1)\}$ と表す．特に $\mathcal{J}^m_{c,d}(0) = \mathcal{J}^m_{c,d}$ である．J 表示された集合 $\mathcal{J}^m_{c,d}$ は**極大均等**であるという．

定義 3.2　0 と 1 からなる無限列 $\boldsymbol{v} \in \{0, 1\}^\infty$ の部分語 $\boldsymbol{\omega} \in \{0, 1\}^l$ について $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_l)$ に対し $|\, \boldsymbol{\omega} \,| = l$ を $\boldsymbol{\omega}$ の長さ，$|\, \boldsymbol{\omega} \,|_1 = \sharp\{i \mid \omega_i = 1\}$ を $\boldsymbol{\omega}$ に含まれる l の個数とする．$\boldsymbol{v}$ の部分語 $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}'$ が $|\, \boldsymbol{\omega} \,| = |\, \boldsymbol{\omega}' \,|$ かつ $||\, \boldsymbol{\omega} \,|_1 - |\, \boldsymbol{\omega}' \,|_1| \leq 1$ であるとき $\boldsymbol{v}$ は **Myhill 性**をもつという．

図 1 を J 関数を用いて表したものが図 2 であり，モード m において $+$ の変化が多いことがわかる．

命題 3.3　c と d が互いに素であれば $\{J^m_{c,d}(k+1) - J^m_{c,d}(k) \mid k \in \mathbf{Z}\} = \left\{ \left\lfloor \dfrac{c}{d} \right\rfloor, \left\lfloor \dfrac{c}{d} \right\rfloor + 1 \right\}$ となる．

命題 3.3 によって隣接二項間がつくる列 $\{J^m_{c,d}(k+1) - J^m_{c,d}(k) - \lfloor \frac{c}{d} \rfloor\}_{k \in \mathbf{Z}}$ は 0 と 1 のみからなるが，この列が Myhill の性質をもち，逆に Myhill 性をもつ列から J 関数が構成できること，すなわち，J 関数が定める極大均等性と Myhill 性は同値であることは石田 [2] で示されている．Myhill 性から推察されるように，極大均等性とは音をできる限り均等に配置するという考え方である．実際，$\mathcal{J}^m_{12,7}$，$\mathcal{J}^m_{12,5}$ で表される 7 音音階や 5 音音階，$\mathcal{J}^m_{7,3}$，$\mathcal{J}^m_{7,4}$ で表される三和音と四和音は極大均等になっている（図 3）．

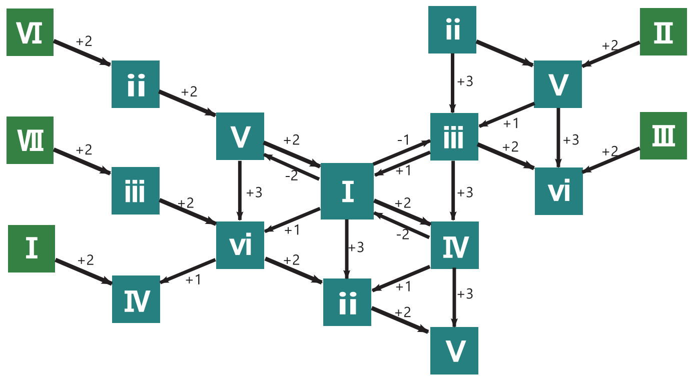

図 2　和音進行による J 表示の変化．辺に付した +2 等の数字はモードの変化 $\mathcal{J}_{7,3}^{m} \to \mathcal{J}_{7,3}^{m+2}$ 等を表す．

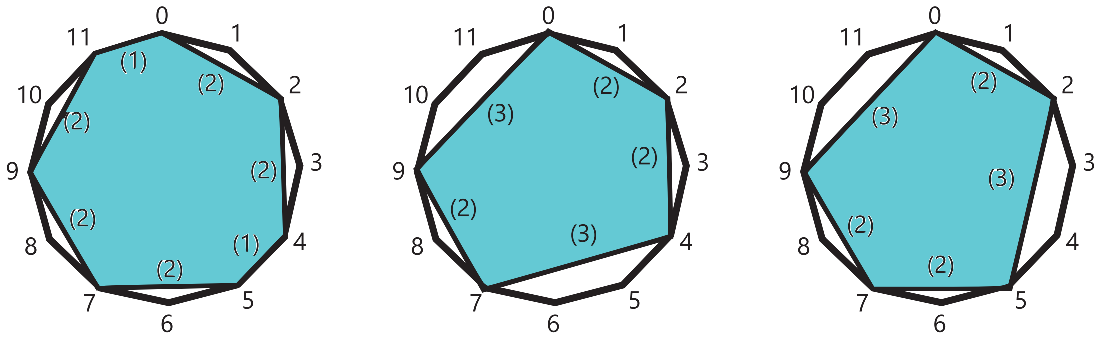

図 3　極大均等集合 $\mathcal{J}_{12,7}^{m}$，$\mathcal{J}_{12,5}^{m}$．(n) は semitone encoding の意味での音程差を表す．

定理 3.4　c と d が互いに素だとする．任意の l, m に対し $D(\mathcal{J}_{c,d}^{l}, \mathcal{J}_{c,d}^{l+m}) \leq \left\lfloor \frac{\lfloor c/d \rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 1$ が成りたつ．

定理 3.5　c と d が互いに素だとする．$c \equiv 1 \pmod{d}$ ならば任意の l, m に対し $D(\mathcal{J}_{c,d}^{l}, \mathcal{J}_{c,d}^{l+m}) \leq \left\lfloor \frac{\lfloor c/d \rfloor + 1}{2} \right\rfloor$ が成りたつ．

12 音音階での隣り合う 2 音の音程差を半音，12 音から 7 音音階を取ったときの 7 音音階の隣り合う 2 音の音程差を全音と呼んだのに倣い，これを一般化した意味で c 音から d 音を選んだ際，元の c 音の隣り合う 2 音の音程差を**半音**，選んだ d 音の隣り合う 2 音の音程差を**全音**と呼ぶことにする．したがって定理 3.4 は，一般的に c 音から d 和音を極大均等性を満たすようにとってきた場合，その和音間距離は一般化された意味での $\left\lfloor \frac{\lfloor c/d \rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 1$"全音"以下になることを表している．また 7 音音階における任意の三度堆積三和音同士の距離は定理 3.5 から $\left\lfloor \frac{\lfloor 7/3 \rfloor + 1}{2} \right\rfloor = 1$ 全音以下であり，一方命題 3.3 からこれは 12 音音階の中では $\lfloor \frac{12}{7} \rfloor + 1 = 2$ 半音以下であることを表している．したがって 12 音音階から極大均等に 7 音音階を選び，さらにその 7 音音階から三度堆積三和音を選ぶと，三度堆積三和音同士は互いに高々 2 半音=1 全音程度のずれしか生じず，結果的にあらゆる三度堆積三和音の進行は自然に smooth になることを意味している．組合せ論的に得られたこの結果は，聴衆に受け入れられやすい滑らかな和音進行が容易に得られることを表しており，音楽に大きな自由度を与えたとも言える．12 音からなる音階が作られ，その中に 7 音音階を選び，そして三度堆積和音が形成されたことは，ある種のより"近い"関係にあるように思われる．数理的に振り返ると一つの奇跡であったように思われる．

参考文献

[1] N. Cook, and T. Fujisawa, The psychophysics of harmony perception: Harmony is a three-tone phenomenon, Empirical Musicology Review **1**(2), pp. 106-126, 2006

[2] 石田 奈々, ピタゴラスの主題による変奏曲－音律と音階に現れる数論的現象－, 2013 年度卒業論文, 愛知教育大学教育学部, 2014.

[3] John Clough, and Jack Douthett, Maximally Even Sets, Journal of Music Theory, Vol.35, No. 1/2(Spring - Autumn,1991) pp. 93-173, 1991.

[4] 外崎 幹二, 島岡 譲, 和声の原理と実習, 音楽之友社 1958.