イプシロン　2016. Vol.58, 1 – 6

中等教育における数学教育パラダイム

愛知教育大学　**佐々木　徹　郎**

１．はじめに

中学校や高等学校は，中等教育段階に位置づけられる。これは，大衆教育と専門教育の間にあり，義務教育と自主教育に分かれており，さらに進路選択や受験という大きな使命をもっている。つまり，職業選択に大きくかかわっているのである。この中で，数学教育が果たす役割は大きい。まさに，能力や個性が顕著になり，理系・文系選択の鍵になっている場合が多い。そのため，どこまでの学習内容を必修とするかといった問題がある。

このような中で，中等教育の社会的役割や環境も変化している。少子化や高等教育への高い進学率，あるいは生涯学習，学習社会，またICTや物流など学習環境の充実などである。実際，大学など高等教育段階でも「教育」を重視する姿勢が，かつてないほど求められている。そして，アクティブラーニングに象徴されるように，具体的な指導方法の転換が求められている。これらの変化は，「高大接続とアクティブラーニング」と表現されることがある。しかし，進路指導，受験という大義をかかえている中等教育では，現場が率先してアクティブラーニングに転換するというようなシナリオはあまり想像できない。

本稿では，文化人類学の観点から中等教育段階の数学教育を考察した研究を紹介する。そこでは，数学教育のパラダイムが提示される。これは，わが国の中等教育段階における数学教育に対しても示唆に富むものである。

２．数学教育への文化人類学の視点

価値観や規範に基づいた議論の前に，中等教育の数学教育の構造をとらえることが必要である。数学教育において，社会的な実在への研究方法を提唱したのは，フランス Aix-Marseille 大学　シュバラールである。Chevallard(2012)の教授人類学(Anthropological Theory of the Didactics, ATD)は，まさに教授という文化的行為を考察する立場である。

次のような用語が使われる。ある状況において学びたいことがある。これを教授内容(didactic stake)と呼ぶ。まず形式的に，２人の人物を設定する。第一の人物を文字 x で表し，第二の人物を y で表す。そして，x が何かを学ぶのを y は支援しようとしている。もちろん，x とy が同一人物であることもあり得る。x の自己学習では，教授内容を自分で探究する。y の行為が，教授行為(didactic gesture)であり，まさに教授の一部分である。基本的に，教授学とは，ある「教授状況」を制御する条件を研究する科学である。そのような文化的状況は，x とy そして教授内容O からなる，教授の三

つ組 (x, y, O) で表す。数学教育では，教授内容 O は，数学に関するものである。(宮川健，2013)

ここで注目されるのは，教授という行為は，まず子どもが学びたい内容があるという前提である。これは，教育目標ということもできる。また，学びの主体があって，教師がいるという構図が基本になっている。つまり「人が何かを学ぼうとして，教える人がいる」という素朴な単位から，授業，学校，数学教育を組み立てている。このことは，中等教育において重要な要素である。

実際，中学校の数学教育は，戦後際だって変わってきた。昭和30年代の系統学習における指導内容は，今日の高等学校の必修科目　数学Ⅰの大部分までを含んでいた。ところが，中学校の教科書は，その単元の導入，教材，絵図や装丁まで大きく変わってきた。また，実際の授業における指導も丁寧になっている。このように中学校が変わった理由は，「子どもが学びたいもの」，つまり学習意欲や関心を重視しているからである。中等教育の中で，中学校は義務教育である。高等学校は，生徒の主体性による教育組織とされている。つまり，制度上の差異を，教授行為つまり授業を単位として考えなければならないのである。

さらに，Chevallard(2012)によれば，一般的に人物 x を人の集合 X にすると，教育の三つ組 (X, y, O) になり，これは学校の授業モデルになる。X を生徒のグループとすると，教材 O を教える教師 y となる。Y を教育関係者のティームとすると，(X, Y, O) という形式の組を考察することになる。そして，探究するものつまり教授内容 O と，それを探究する様式における規則の集まりを教育パラダイムと定義している。

「教育パラダイム」というのは，新しい言葉である。本来パラダイム論は，科学研究に対するものである。ここでは，生徒が探究する内容やその方法であり，カリキュラム論や教育運動と理解できる。しかし，これらよりも広く，大雑把なものである。Chevallard(2012)は，「中等数学教育の最古のパラダイムは，19世紀を通して姿を消した。そのパラダイムでは，数学の体系は人類史の遺産とされ，ユークリッドの原論を学んだのである」と述べている。ユークリッド原論のような数学体系やその教授が数学教育パラダイムの典型である。。

３．記念碑訪問(visiting works, visiting monuments)パラダイム

「ユークリッド原論」をパラダイムとする数学カリキュラムは，20世紀初頭の改造運動，わが国では戦後の系統学習や現代化などの運動を経て，相当に改革された。ところが，Chevallard(2012)は,，パラダイムとしては本質的に変わっていないととらえている。

つまり，ユークリッドに留まらずピタゴラス，ターレス，ヘロン，さらに近代のデカルト，ニュートン，ライプニッツやガウス，オイラーなどの輝かしい業績は，数学の記念碑というべきものである。そして，それらを訪問して回るかのような数学教育，これを「記念碑訪問パラダイム」と呼んでいるのである。

《この訪問は，生徒が喜んで受け入れると期待されてきた。しかし，昔から，生徒はその記念碑の存在理由を知らないまま，教えられてきたのである。教師や教育関係者は，その知的な巡礼を続け，生徒はそれに従ってきたにもかかわらず，そのパラダイムは現在衰退しつつある。というのも，「なぜこ

れを学ぶのか」「何に役立つのか」といった問いに，答えられていないままだからである。(p, 867)》

カリキュラム改革という視点からは，ユークリッド原論を手本とする数学カリキュラムと関数概念を中心として，微分積分，ベクトル，確率・統計につながるカリキュラムを，一つのパラダイムにまとめてしまうのは，かなり大胆である。しかし，*(x, y, O)* つまり数学の授業を単位とするパラダイムでは，それらは同一のものととらえことは，それだけ授業改革の必然性を示唆しているからである。

というのも，フランスでも受験の問題は大きいようである。

《今日の生徒は，「公的な」学校の知識を「空瓶／リサイクル瓶」の法則に結びつけている。つまり，教えられた知識は，試験が終わると，忘れ去られ，無視される。(p. 868)》

受験で生徒に知識を詰め込み，試験が終わると忘れ去られる，まさにリサイクル瓶のような状況は，かつてはわが国でも指摘されていた。しかし，今日入試の多様化などで，あまり聞かなくなった。むしろ，大学生の教養や知識の不足が指摘される。これは，大学教育の問題ととらえるべき時代になっている。中等教育での問題は，教える知識量の問題ではなく，教え方つまり授業の質や教育学的な問題である。

３．世界を問う(questioning the world)パラダイム

中等数学教育の新しいパラダイムを，Chevallard(2012)は次のように説明している。3つの組 *(X, Y, O)* にもどって考察する。従来の教育の伝統では，*X* のメンバー *x* は，子どもや青年など，伝統的に成人する前の若者に限られていた。しかし，新たな「世界を問うパラダイム」では，教育の過程は生涯を通したものである。3つの組 *(x, y, O)* の *x* は，幼児から大人でも，老人でもいいのである。

次に，このパラダイムの中心思想は，*x* が *O* を学ばなければならないのであり，*y* はそれを支援するということである。このパラダイムが創始しようとしているのは，新しい認知論である。問題 *Q* があると，*x* はそれに取り組み，価値ある答え *A* に達する。この中で，*y* が支援することもある。つまり，*x* は見たことも，解いたこともない問題状況を系統的に取り組むことが期待されている。このような答えのない問いや未解決の問題を受け入れる態度を，ヘルバルト的と呼んでいる。ヘルバルトは，ドイツの哲学者で教育学の創設者 Johann Heinrich Herbart (1776-1841)である。そのような探究の態度は科学者の研究では当然のことであり，市民は日常の活動の態度にしなければならないと述べている。(p. 869)

つまり，生涯学習を想定し，生徒の関心や意欲を重視して，問いや探究を中心とした数学教育が，「世界を問うパラダイム」といえる。つまり，過去の記念碑よりも，教育学的な立場から問題解決や探究を重視したものである。もちろん，わが国でもよく知られたものであり，中学校までは問題解決指導として，従来から実践研究されてきた。しかし，高等学校では，問題が与えられているのであり，問題解決だけでは不十分である。新しいパラダイムとしてとらえることには，価値がある。

そこで，問題 *Q* に対する答え *A* をどのように構成し，正当化するかについて，次のように説明されている。基本的に，問題 *Q* を追究するには２つの段階が必要である。第一に，「探究者」*x* は問題 *Q* の答えに関連する文献を探す。ATDでは，ある組織がつくり，普及させた現在の答えを $A^{\Diamond}$ 表す。その

知識がその答えを権威づけているのである。もちろん，$A^{\diamond}$ は「正しい」必要も，「確かである」必要もない。しかし，x は答え $A^{\diamond}$ が適切かどうかを評価しなければならない。学校では，教師が答えを与え，そのうえ保証までする。真の答えに達すると，これを $A^{\blacktriangledown}$ で表す。追究者 x は，数学だけでなく何らかの「道具」を使う。「太鼓判の」答え $A^{\diamond}$ と課題 O を組み合わせて，答え $A^{\blacktriangledown}$ を追究する過程が始まる。x が問題 Q を追究することで，研究の道筋をつけることになる。この道筋をたどることで，研究ティーム X は答え $A^{\diamond}$ と課題 O に関する知識を使うことになる。この知識はメンバーには未知のもので，答え $A^{\blacktriangledown}$ を得るには欠かせないものである。この観点からすると，X とそのメンバー x は新しい知識や活動を求めることが必要になる。

このなかで，Chevallard(2012)は，つぎのような教育的意義を強調している。

第一に，世界を問うパラダイムでは，研究の道筋に沿って，新しい知識に出会うか，あるいはは古く忘れていた知識に再会する。これが，追究者 x が「学ぶ」ということである。つまり，答え $A^{\diamond}$ や活動ツール0を，学習あるいは再学習することで，答え $A^{\blacktriangledown}$ を学ぶ。明らかに，この中の学習内容は，予め計画されたものではない。これは，記念碑訪問のパラダイムとは反対である。また，学習内容は，2つの要素で決定される。まず問題 Q であり，次に探究の道筋であり，これは答え $A^{\blacktriangledown}$ を構築するために出会い，追究する $A^{\diamond}$ や O によって決まる。

第二に，課題 O を追究することは，答え $A^{\blacktriangledown}$ を目指すプロジェクトによって決まる。答え $A^{\diamond}$ についても同様にそのプロジェクトで決まる。

このような教育の観点は，ヘルバルト教育学である。これは，生涯教育の観点にもなっている。訪問パラダイムでは，カリキュラムは学習内容 O から定義される。これに対して，世界を問うパラダイムでは，カリキュラムは問題 Q から規定される。しかし，問題 Q を探究する中で，学習内容 O はカリキュラムを規定し，改善するために重要であることは変わりない。つまり，「当初の」問題のセット Q から始まり，カリキュラム内容 C には，問題 $A^{\diamond}$ や学習内容 O と共に，問題 Q や答え $A^{\blacktriangledown}$ が含まれるということである。(pp. 870-871)

4．わが国における「世界を問うパラダイム」

Chevallard (2012)の「記念碑訪問パラダイム」は，わが国の従来の数学教育にみられるものである。このパラダイムは，数学の歴史遺産から重要な数学知識をカリキュラムとして再構成し，それを伝達という授業を指している。今日の高等学校の数学内容は，大学の数学への接続を念頭に，構成されている。また中等教育，特に高等学校では，生徒が「なぜこれを学ぶのか」「何に役立つのか」といった問いは，一般にほとんど答えられていない。

したがって，わが国の中等数学教育においても，「世界を問うパラダイム」が重視されていかなければならないことは確かである。このパラダイムの本質は，まず生涯学習者として生徒をとらえる観点から数学教育を見ていることである。これは，不可欠な観点である。さらに，教育的観点としてヘルバルト教育学をあげている理由は，問題解決を重視した学習を目指していることにある。

わが国の数学教育において，世界を問うパラダイムはどのように実践していくかということである。

もちろん，記念碑訪問パラダイムを批判するだけでは，不可能である。また，それはパラダイム転換といった劇的な変化ではなく，むしろ静かな授業改革になるはずである。したがって，新しいパラダイムといっても，かなり粘り強い取り組みが必要になる。

この 2 つのパラダイムの関連について，Chevallard (2012)自身は，問題 Q に対する答え A をどのように導き出すかということに着目して，2 段階で説明し直している。

第一段階は，「探究者」x が問題 Q の答えに関連する文献を探すことである。この答えは，学校などで学ぶような，普及している現在の答えであり，$A^{\diamond}$ で表している。学校では，教師がその答えを与えて，正当性を保証する。この答えは，記念碑訪問パラダイムに入るものである。

第二段階は，x が答え $A^{\diamond}$ が適切かどうかを評価することから始まる。つまり，x はさまざまな「道具」を使って，「太鼓判の」答え $A^{\diamond}$ と課題 O を比較検討する。このようにして，真の答え $A^{\heartsuit}$ に達する。このように，世界を問うパラダイムは，記念碑訪問のパラダイムを踏まえた問題解決を構想している。

つまり，「問う」パラダイムでは問題解決の文脈の中で，生徒自身が従来の数学知識を評価し，さらなる解決過程を想定している。わが国の数学教育で，このような生徒が目的意識をもち，主体的に問題に取り組むことは，「数学的活動」あるいはアクティブラーニングとして強調されている。しかし，これらの重要性は分かっているものの，未だ実践のための鍵にはなっていない。

現実的な解決策について，Chevallard (2012)は，次のように提唱している。

《生徒にとって，数学無しのままでは，自然や社会の世界を理解し，そこに関わっていく質を下げることになる。…

数世紀にわたり，文化としての数学は 2 つの形態で成長した。一方は，「純粋」数学であり，他方は「複合」数学であり，広がりがあり，帝国的なところもある。「複合」は後年，「応用」と呼ばれるようになり，ここ数十年間，学校数学として衰えてきたものである。ところが，前者の純粋数学は残り，初等であっても，古い「帝国」となって，保持されている。このような現状は，終わりを迎えていると，私は考える。今日，複合数学の精神を復活させなければならない。しかし，文化的傲慢ではなく，政治的・社会的に，数学は人間にとって解決の手段であって，問題を与えられるものではないという思想を再生させなければならない。(p. 877)》

確かに，従来の数学教育は，いわゆる純粋数学に偏った内容になっている。このように，数学が物理学などの科学とは分離されたのは，19 世紀になってからである。今日の応用数学は，かつては他の科学と混合した，複合数学そのものであった。17 世紀のニュートンやライプニッツは，物理学や哲学，言語学などと一連のものとして微積分学を創始したことは，よく知られている。まさに「数学は，世界を理解するための言葉」なのである。

これは，応用数学を教えるということではなく，本来の数学的探究を取り戻すことである。つまり，「生徒は将来，どこでこの数学に関わるのだろう」「この数学は，どのような問題から生まれたのか」といった数学の探究を観点として，数学教育を進めることである。

５．まとめ

中学生や高校生，さらに大学生が，最も多くもつ問いかけは，「なぜ数学を学ばなければならないのか」「数学が何の役に立つのか」といった根本的な問いである。これには，まさに「訪問パラダイム」による数学教育の結果である。

例えば，2 次関数は落下運動や放物運動に関係している。物を落とす，投げるといった運動が，単純な 2 次関数で表現できることは，驚異である。しかも，式変形によって，最大値や最小値を求めることができる。今日では，車の速度と制動距離，速度と燃費などが身近な事象である。このような事象に対する問いかけへの「道具」として，2 次関数があることを学習することが，「世界を問うパラダイム」である。

また，2 次方程式は遙かに古くから知られていた。これは，「長方形の面積と周囲の長さが分かっているとき，2 辺の長さを求める」といった問題から生まれたのである。約 3 千年前のバビロニア数学にみられる。アラビア数字や小数表記，図形の論証などよりも，古くから 2 次方程式の解の公式は求められていた。

また，三角比は測量に関係している。図形の相似が基礎になっている。さらにピタゴラスの定理や三角形の合同条件に関係している。1970 年代の現代化運動では，三角関数の周期性が強調されたものの，かえって親しみのないものになった。三角関数は円運動に関係しているものの，まずは三角形の合同条件に関連して，鈍角への拡張から一般角へとつながっていることに留意しなければならない。さらに，微分・積分は，速度や求積から生まれたものであり，それらが函数概念によって統合されることに意義がある。また，応用の観点からは，ごく初歩的な微分方程式の考え方は重要である。

このように，高校数学では，数学的な発展だけではなく，概念の構成や活用についての知識が重要であることを，「世界を問うパラダイム」は示唆している。本稿では，教材や授業事例について述べることはできなかったものの，上記のように数学教育への視点であるパラダイムを転換することで，実践することは難しくない。

引用・参考文献

①Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow’s society: a case for an oncoming counter-paradigm. *12th International Congress on Mathematical Education Regular Lectures 4-11,* 865-878.

②宮川健(2009).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格　―わが国における「学」としての数学教育研究をめざして―」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第 91 巻，Vol.94.