イプシロン　2016. Vol.58, 7 - 19

作図ツールを用いた「四平方の定理」に関する指導に向けて－12/12の山中実践に向けた教材研究－

愛知教育大学　数学教育講座　**飯　島　康　之**

0.　はじめに

今年のGC活用研究会は，昨年に続いて12月に山中先生に授業をしていただくことになった。授業の詳細はまだ確定していないが，今回山中先生が選択された教材は，「四平方の定理」である。「四平方の定理」は造語だが(もちろん，四平方の定理とは，三平方の定理を基に発展させた内容を意味している。)，20年以上前に，川崎市で地曳先生が4時間構成で実施された実践の「四平方の定理」に刺激され,1時間構成でどういう授業が可能かを検討している。本稿では，この教材の背景や,GCを使う場合にはどういう活動が可能かという点や，授業設計の選択肢をいくつか検討し，実際に授業をされる山中先生に，また，この教材に関心を持たれた先生に資することを期待している。なお，今年は月曜日の 12/12 ということなので，このイプシロンが配布される日の2 日後に研究会を実施することになる。関心を持っていただいた方はぜひ当日参加していただければ幸いである。

1.　三平方の定理から四平方の定理で注目可能な等式

原問題あるいは原定理として，三平方の定理に注目する。つまり次が成り立つ。

△ＡＢＣが（∠Ｃ＝∠Ｒの）直角三角形のとき，$a^2+b^2=c^2$　が成り立つ。

この命題に似た四角形の４つの辺の２乗に関する命題をつくりたい。
すると，等式に関する候補として，次の３つが考えられる。

(1) 隣り合う２つずつの和 つまり，$a^2+b^2=c^2+d^2$

(2) 向かい合う２つずつの和 つまり，$a^2+c^2=b^2+d^2$

(3) 3つの和が残りの一つと等しい つまり $a^2+b^2+c^2=d^2$

なお，三平方の定理を「3つの辺の長さの平方の和に関する式」としてでなく，ピタゴラスの定理の3次元への一般化として考えると,3つの座標軸に射影した座標を使うことで，長さを表現することが最も妥当であり，その式では(3)のように，平方が4つの式になる。しかし，ここでは「平面内での四角形」に関する定理との関わりについて話を限定することにしたい。

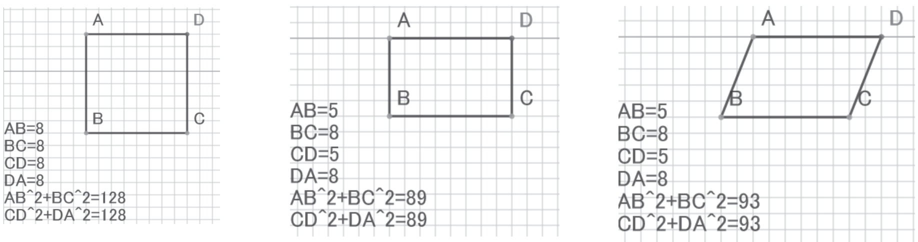
2.　「条件を満たす形」を考える。

三平方の定理が，等式を満たすための条件として，「直角三角形」が登場することを考えると，最も基本的なスタンスは，「どんな形だったら，それぞれの等式は成り立つのだろうか」という問

いであろう。中学生にとって標準的な四角形について考察すると，どんな形が「条件を満たす形」として登場するかについて，まとめておく。

2.1 $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2 + d^2}$

次図のように，正方形，長方形，平行四辺形に関しては，次の性質があるので，必ず等式が成り立つことがわかる。



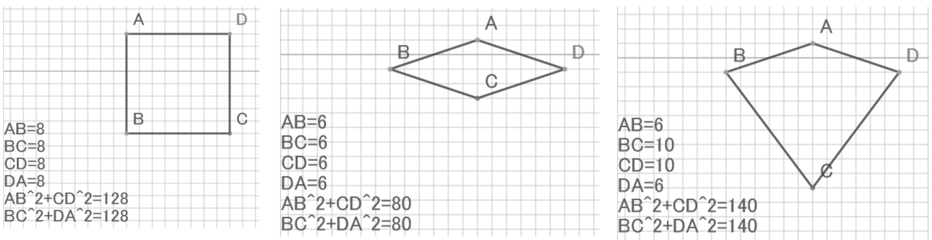
図−1 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$　が成立する代表的な四角形

・正方形・ひし形はすべての辺の長さが等しい。（すべての辺の長さが等しいのは，ひし形）

・長方形・平行四辺形は対辺の長さが等しい。（対辺の長さが等しいのは平行四辺形）

2.2 $\boldsymbol{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$

2.1 と同様に，まず，4 つの辺の長さがすべて等しい形，つまり正方形・ひし形について成り立つがわかる。平行四辺形に関しては成り立たないけれども，対角線 AC に関して線対称な図形，つまりたこ形の場合, a=d, b=c となることから，等式が成り立つことがわかる。



図−2 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$　が成立する代表的な四角形

・正方形・ひし形はすべての辺の長さが等しい。（すべての辺の長さが等しいのは，ひし形）

・たこ形は二組の隣り合う辺の長さが等しい。（一つの対角線に対して線対称なのはたこ形）

2.3 $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 = d^2}$

代表的な形(正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，台形，等脚台形，たこ形)において，「いつもなりたつ」場合はない。逆に，この等式が成り立つためには, d は真の意味で他のどの辺よりも長くなければいけないため，どの辺も他に同じ長さをもつ形，つまり，正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，たこ形においては，この等式が成立することはない。

3. 三平方の定理の利用で見つかる特殊な場合

3.1 三平方の定理の変形

三平方の定理は，次のような形で解釈しなおすことができる。

(1) $a^2+b^2=c^2$

斜辺を c とする直角三角形をつくれば，他の 2 辺の 2 乗の和を斜辺の 2 乗と等しくすることができる。

(2) $c^2-\ a^2=b^2$

斜辺を c とする直角三角形をつくれば，斜辺の 2 乗から他の 1 辺の 2 乗の差を斜辺の 2 乗と等しくすることができる。

3.2 $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2+d^2}$

この式は，変形すると，$a^2-d^2=c^2-b^2$ と解釈することもできる。

a,b あるいは c,d が共有する頂点について考えると，頂点に隣接する 2 辺の 2 乗の和が問題となっており，a,d あるいは b,c が共有する頂点について考えると，頂点に隣接する 2 辺の 2 乗の差が問題となっている。

(1) 隣接する 2 辺の 2 乗の和が問題となる頂点に注目すると

2 組の 2 辺の 2 乗の和が一致すれば等式は成立するので, 2 組の直角三角形が斜辺を共有するようになっていればよいことが推論できる。つまり，次のような四角形ならば等式は成立する。

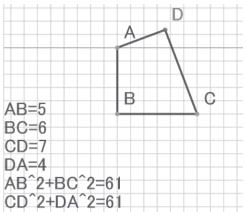


図-3 斜辺を共有する 2 つの直角三角形で構成した四角形

(2) 隣接する 2 辺の 2 乗の差が問題となる頂点に注目すると

2 組の 2 辺の 2 乗の差が一致すれば等式は成立するので, 2 組の直角三角形が斜辺を共有するようになっていればよいことが推論できる。ただし，斜辺は向かい合う位置にある必要があるので，次のような四角形ならば等式は成立する。

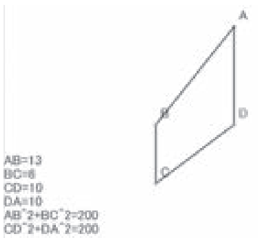


図-4 直角を反対側にもち，一つの辺を共有する 2 つの直角三角形で構成した四角形

3.3 $\boldsymbol{a^2+c^2=b^2+d^2}$

この式は，変形すると，$a^2-b^2=d^2-c^2$ と解釈することもできる。

つまり，四角形のどの頂点についても，2 組の 2 辺の 2 乗の差が問題であり，それらが一致すれば等式は成立するので，2 組の直角三角形が斜辺を共有するようになっていればよいことが推論できる。ただし，斜辺は隣り合う位置にある必要があるので,次のような四角形ならば等式は成立する。

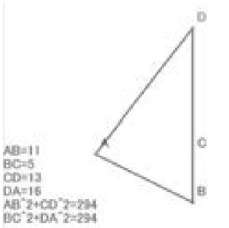


図-5 同じ側に直角をもつ二つの直角三角形で構成された四角形

3.4 3 つの和と 1 つ つまり，$\boldsymbol{a^2+b^2+c^2=d^2}$

一度直角三角形によって，2 辺の 2 乗の和が斜辺の 2 乗の和となり，さらにそれを含む 2 辺の 2 乗の和が斜辺の 2 乗に等しくなる場合を考えると，次のような四角形ならば等式は成立する。

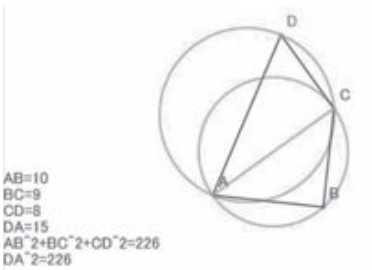


図-6 直角三角形 ABC とその斜辺 AC を一辺とする直角三角形で構成された四角形

すなわら,AD を直径とする円周上に点 C をとると，∠ACD=∠R となり，さらに AC を直径とする円周上に点 B をとることでできる四角形 ABCD である。∠B=∠R, ∠BCD>∠R, ∠D<∠R となるので，ABCD は上記で考えた標準的な四角形，つまり，正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，たこ形，等脚台形になることはないことがわかるし，円に内接する四角形にもならないことがわかる。

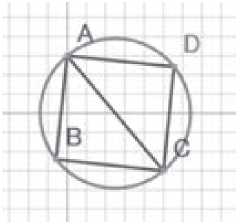
4. 特殊な場合を動かして気づくこと

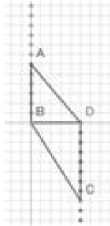
上記の 2，3 で見いだした特殊な図形を GC 上で動かすことによって，気づきそうなことをまとめてみる。

4.1 $\boldsymbol{a^2+b^2=c^2+d^2}$

2.1 からは，すべての平行四辺形が条件を満たすことがわかるが，GC 上での操作としては，二

つの点を同時に動かすことが必要になるので，GC の操作から見いだすことはあまり容易ではない。むしろ，平行四辺形が条件を満たすことに気づき，それを確認するために GC を使うという可能性の方が高いと思われる。3.1(1)からは,AC を直径とする円の周上を 2 点 B,D を自由に動かしても等式は成立することがわかる。また, 3.1(2)からは,図-7 のように線分 BD に対して垂直な直線上で A,D をそれぞれ動かしても等式は成立することがわかる。

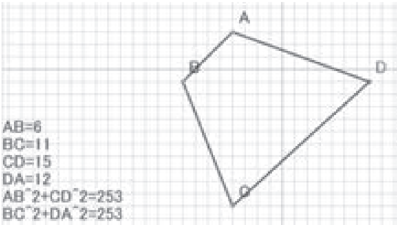


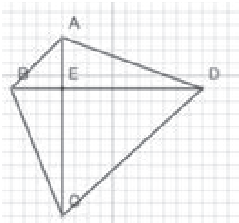


図–7 特殊な場合において$a^2+b^2=c^2+d^2$が成り立つような頂点の動かし方

4.2 $a^2+c^2=b^2+d^2$

3.2 は四角形の特殊な場合としての三角形が観察されるのだが，点 D を動かすことによって,次のような形に気づくことができる。





図–8 特殊な場合において$a^2+c^2=b^2+d^2$が成り立つように動かしたときに見いだす図

この図が見つかったときに，その性質として，対角線が直交することや，その証明を思いつくことは，それほどむずかしくないと思われるが,GC などなしに推論で思いつくのはむずかしいと思われる。

実際，図-8 右のように，対角線を引き，その交点を E とする。対角線が直交する場合,

$$a^2+c^2=AB^2+CD^2=AE^2+BE^2+CE^2+DE^2$$

$$b^2+d^2=BC^2+DA^2=BE^2+CE^2+DE^2+AE^2$$

よって,

$$a^2+c^2=b^2+d^2$$

4.3 $a^2+b^2+c^2=d^2$

図-6 で得られた形はかなり自由度は高いものの，中学生にとって標準的な四角形にはどれにも該当せず，全体としてどういう条件を満たせばよいかは，わかりにくいと思われる。

5. GC で軌跡をプロットして得られるデータ

4 では，測定値を観察しながら図形を動かすことを想定したが，その際に特定の点，たとえば点 D だけを動かし，等式が成立するときに，その点をプロットし，その軌跡の概形を観察することで，探究を進めていくことも考えられる。4 では代表的な形として，長方形，ひし形等からの出発を考えたが，軌跡をプロットする場合には，より一般的な形，つまり平行四辺形，たこ形を出発点として，点の軌跡を考える場合を想定する。

5.1 $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2 + d^2}$

2.1 で得られていた平行四辺形をもとにして，一つの頂点を動かす場合を考えてみると，次のような結果が得られる。

図-9 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$に注目しながら点 D，A を動かしたときに得られる軌跡

D の軌跡は円になることが推測されるが, B を通るけれども, A,C を通るわけではない。

A の軌跡は直線になることが推測されるが, B,C,D など，明確な点を通る直線ではない。

どちらの点を動かしても，この等式に関しては，直感的でない結果が得られ，これは一体何を意味するのかを考察することが不可欠なデータということができるだろう。

なお，前者の円に関しては，測定等を行うことで，この円は AC の中点を中心とし,点 B を通る円であることを観察結果から推測することはできるだろう。そして，この図-9 左に関する推測を前提にすれば，図-9 右において, AC の中点からの B,D までの距離が等しいはずであることが推論され，つまり, BD の垂直二等分線上に AC の中点があること，そして点 C を通り BD に垂直な垂線を BD の中点に関して線対称移動した直線となることが推論される。逆にいえば，図-9 右の図のみから推測することは難しいと思われる。

5.2 $\boldsymbol{a^2 + b^2 = c^2 + d^2}$

どの点を動かしても，図-10 のように，反対側の頂点を通る直線になることが明確で，もう一つの対角線と直交することが気づきやすいと思われる。

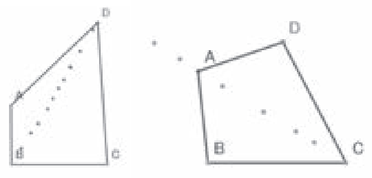


図-10 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$に注目しながら点 D，A を動かしたときに得られる軌跡

5.3 $a^2+b^2+c^2=d^2$

形に関する手がかりがないので，この等式に関して，A-D を動かして GC の軌跡の自動描画機能で調べてみた。その結果が次である。

図-12 $a^2+b^2+c^2=d^2$　に関して，A－Dを動かしたときの軌跡の自動描画

これらは d すなわち，AD の両側の点 A,D を動かした場合の軌跡は直線となっていて，それ以外の B,C を動かした場合の軌跡が円となっていることがすぐに分かる。しかし，通過すべき特定の点などは明確ではない。

6. 証明(1)：これまでに見つかった四角形についてそれぞれの等式が成り立つことの証明

上記の流れから得られたデータを基に，そこで予想されることについて証明することについてまず考えておきたい。

6.1 $a^2+b^2=c^2+d^2$

正方形，長方形，ひし形，平行四辺形の場合には，対辺の長さが等しいことから明らかであるため，証明のターゲットは，下記のように，平行四辺形の一点を動かしたときの二種類の軌跡に関して，証明を示すことが考えられる。

(1) 辺の長さの２乗の和となっている共通点を動かした軌跡について

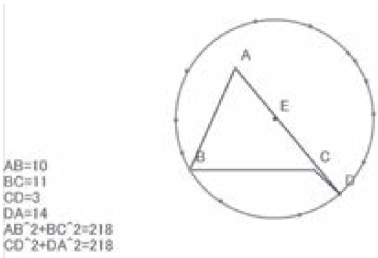


図-13 ACの中点Eを中心とし,点Bを通る円

上記の D の軌跡は AC の中点を中心として, B を通る円上になることを示したい。

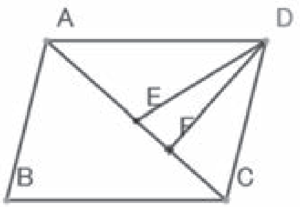


図-14 DEを結び，さらにDからACに下ろした垂線の足をFとした図

$$
\begin{aligned}
AD^2 + DC^2 &= AF^2 + DF^2 + DF^2 + CF^2 \\
&= (AE - EF)^2 + (AE + EF)^2 + 2DF^2 \\
&= 2AE^2 + 2EF^2 + 2DF^2 \\
&= 2AE^2 + 2DE^2
\end{aligned}
$$

つまり,

$AD^2 + DC^2 =$ 一定　ということは,　$2AE^2 + 2DE^2$ ＝ 一定。

動点はＤのみなので, DE^2 ＝ 一定。つまり, ＤはＥを中心とする円上にある。

また, その値が$AB^2 + BC^2$と一致するので, その円はＢを通る。

(2) 辺の長さの２乗の差となっている共通点を動かした軌跡について

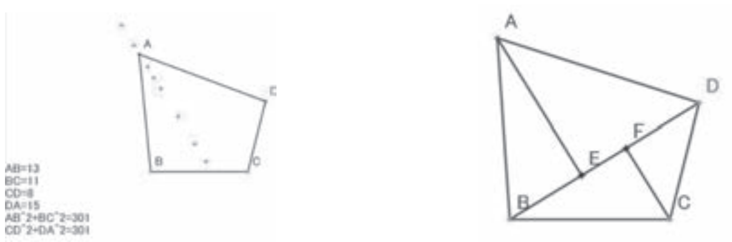


図-15 $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$に注目しながら点Ａを動かしたときに得られる軌跡

まず, 図-15 右図のように,BD にA,Cから下ろした垂線の足をそれぞれE,F とする

$$AB^2 + BC^2 = AE^2 + BE^2 + BF^2 + CF^2$$

$$CD^2 + DA^2 = CF^2 + FD^2 + DE^2 + AE^2$$

となるので,

$$
\begin{aligned}
AB^2 + BC^2 - (CD^2 + DA^2) &= (AE^2 + BE^2 + BF^2 + CF^2) - (CF^2 + FD^2 + DE^2 + AE^2) \\
&= BE^2 - DE^2 + BF^2 - FD^2
\end{aligned}
$$

この値が0となるので,

$$BE^2 - DE^2 + BF^2 - FD^2 = 0$$

$$BE^2 - DE^2 = FD^2 - BF^2 \ (\text{一定})$$

E を B から D に動かすとき, この式は単調増加になるので, 式が成立するのは一カ所であり, BE=DF となる点のみが,等式が成り立つことの必要十分条件になる。

6.2 $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$

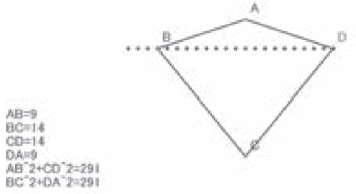


図-16　$a^2 + c^2 = b^2 + d^2$に注目しながら点Ｄを動かしたときに得られる軌跡

対角線を２本ひくと，それが直交していることにより，4.2 で記述したように分解され，直交していれば，結果がなりたつことがわかる。

6.3 $a^2+b^2+c^2=d^2$

この場合，元にする適切な図がない。あるいは，3.4 のような図をつくれば結果が成り立つことは推測できるが，満たすべき条件をわかりやすい形で示すことが難しいので，証明に取り組むべき問題を明示することが難しい。

7. 証明(2) - 等式を満たす図形は，これまでに見いだした形に限定されるかどうかの検討

上記では，条件を満たす代表的な図などを手がかりに，推論や軌跡などを使って条件を満たす図形の集合をそれぞれ一般化してきた。しかし，「これらだけに限定される」かどうかを考えると，上記の考察とは無関係な図が存在する可能性も残っている。高校生の場合には，そのような観点からの検討も必要であろう。以下ではそのような観点からの考察をまとめておく。

7.1 四角形の頂点の軌跡

検討する等式は，4 つの辺の長さの 2 乗の和・差に関するものなので，ある頂点を動かすとき，それによって変化する 2 つの項と変化しない 2 つの項に分けられる。そのため，式を

(頂点の変化に伴って変化する 2 項) + (変化しない 2 項) = 0

と表現すると，求める軌跡は

(頂点の変化に伴って変化する 2 項) = - (変化しない 2 項) = (一定)

となるので，伴って変化する 2 項について，次のことが成り立つ。

a^2+b^2 のように，同符号の場合，軌跡は円または一点か空集合。

a^2-b^2 のように，異符号の場合，軌跡は直線。

7.2 残りの 3 点を含む特殊な形の四角形の存在

(1) $a^2+b^2=c^2+d^2$ の場合

3 点の位置が確定していると，その 3 点を含む平行四辺形が一つ存在する。その位置は等式が成り立つことが 2.1 で示されているので，7.1 で得られた円あるいは直線には平行四辺形になる位置が含まれるので，7.1 で得られた円あるいは直線は，平行四辺形を元に構成されることが示される。

(2) $a^2+c^2=b^2+d^2$の場合

3 点の位置が確定していると，その 3 点を含むたこ形が一つ存在する。その位置は等式が成り立つことが，2.2 で占められているので，7.1 で得られた直線は，たこ形になる位置が含まれるので，7.1 で得られた直線は，たこ形をもとに，その対角線を延長した直線上にあることが示される。

(3) $a^2+b^2+c^2=d^2$　の場合

3 点が確定しても，その 3 点を含むような代表的な四角形，つまり正方形，長方形，ひし形，平行四辺形は存在しないことが 2.3 でわかっている。

そのため、(1)(2)のように，代表的な四角形をもとにして，記述することはむずかしいと推測される。

上記の考察により，6 までで行ってきた考察以外の四角形が条件を満たすことはないということが明らかになった。

7.4 三平方の定理の再解釈と一般化

ここでの考察の特色は，「四角形の形」について考えるということよりも，「隣り合う二つの線分の長さの 2 乗の和・差」によって問題を再考しているという点であり，それぞれにおいて，円と直線という軌跡が生まれてくるという点である。この観点から，三平方の定理を見直すと，違った観点からの解釈が可能になってくる。

(1) $a^2+b^2=c^2$　から $a^2+b^2=c^2+\mathrm{k}$　へ

AB が固定されているとき，a=BC, b=AC において，この等式が満たされる C の軌跡を求めると，図 17 左のようになり，AB を直径とする円になる。一方，注目する式を $a^2+b^2=c^2+\mathrm{k}$　あるいは，$a^2+b^2-c^2=k$　と一般化しても，図 17 右のように，AB の中点を中心とする円になる。

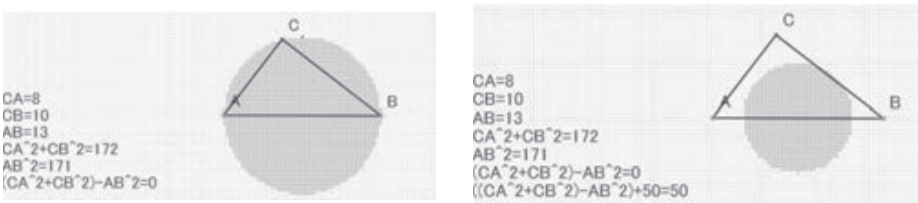


図-17　$a^2+b^2-c^2$の値が一定になる場所を調べた結果

これは $a^2+b^2=c^2+d^2$　において，$d=0$　の場合と解釈することができる。

(2) $c^2-a^2=b^2$　から $c^2-a^2=b^2+k$ へ

AC が固定されているとき,この等式が満たされる B の軌跡を求めると，図 18 左のようになり，AC に垂直で C を通る垂線になる。一方，注目する式を $c^2-a^2-b^2+\mathrm{k}$　あるいは，$c^2-a^2-b^2=\mathrm{k}$　と一般化しても，図 17 右のように, AC に垂直な直線になる。

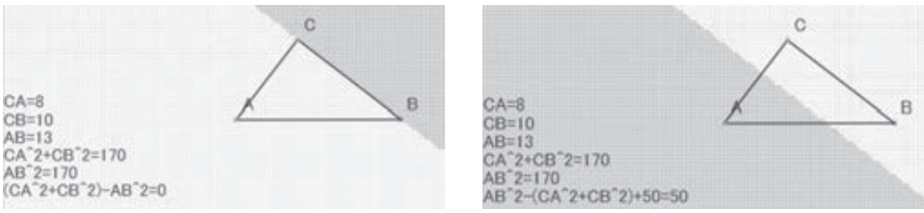


図-18　$c^2-a^2-b^2$の値が一定になる場所を調べた結果

8. 授業設計のためのいくつかの考察

これまで，四平行の定理に関連して，私自身の数学的探究をもとに，どのような数学的内容やプロセスがかかわってくるのか，またどういう気づきがありうるのか等について検討してきた。

授業設計を進めていく上では，これまでの学びの様子など，さまざまなことの配慮をする必要

があるが，ここでは主として教材研究として検討可能ないくつかの点について考察しておきたい。

8.1 三平方の定理との関わり

四平方の定理が，三平方の定理の発展という位置づけであることが象徴的だが，この教材は中学校 3 年生にとって，三平方の定理を活用し，その理解を深める教材という位置づけが適切である。これまで見てきたように，発見のための手段として使う場面や証明のための手段として使う場面などがありうるが, 1 時間構成であれば，主として取り組む等式は一つにしぼることが想定される。

(1) $a^2+b^2=c^2+d^2$ の場合

正方形，ひし形の場合には，すべての辺の長さが等しいことから，また長方形，平行四辺形の場合には対辺の長さが等しいことから簡単に証明できる。

長方形の一点を動かして一般化する 3.1(1)の場合に関しては，それぞれの 2 乗の和が斜辺の長さの 2 乗になることから，図形の中に直角三角形を見いだすことによって証明をすることができるが，「気づくかどうか」が重要な要因となってしまうため，証明そのものを考えることに価値があるというよりも，長方形からの一般化までのプロセスに，学習目標の中心を設定し，最後に証明に関しては軽く扱うというような位置づけが必要になるだろう。なお，上記の図は，直角三角形の組み合わせによって発見すべきものとして位置づける手もある。その場合，図-3,4 のように，二つの組み合わせ方が存在するので，三平方の定理を，証明のための手段としてでなく，条件を満たす事例を発見するための手段として位置づけることができるともいえよう。

一方，平行四辺形の一点を動かして一般化する 6.1(1)に関しては，中学生の論理で理解可能な解法になってはいるものの，中点や垂線の足をとり，中点を有効に使うという技巧的なことが必要になるため，この証明自身を学習の目標にするには，それなりの工夫が必要になる。それぞれの点の座標等を具体的に与え，D の座標を(x,y)として扱うなら，等式の変形で円の方程式にたどりつくこともできるが，それは高校 2 年生にとって適切な活動なので，中学校 3 年生では使えない。

(2) $a^2+c^2=b^2+d^2$の場合

4.2 に示した証明は,与えられた四角形を 4 つの直角三角形に分割し，それぞれの斜辺の長さの 2 乗を他の辺の長さの 2 乗の和に分割することは，気づくだけでできることではなく，式を変形する中でその美しさを実感できる内容なので，中学校 3 年生には適切な難しさといえると思う。

(4) $a^2+b^2+c^2=d^2$ の場合

ピタゴラスの定理を平面から空間に一般化するという意味では，重要な式であるが，平面内の四角形として考えるとすると，三平方の定理を活用して 3.4 のような四角形を見いだすことには意味があると思えるが，その後の扱いを適切に行うのはかなり難しいと思われる。

8.2 条件を満たすそれぞれの場合を発見するための手段

主として，次の方法がありうる。

(1) 紙にフリーハンドで書く

(2) GC の測定値を表示し，形を自由に変えて条件を満たす場合について調べる。

(3) GC の測定値を表示し，特定の点を動かして条件を満たす点の集合を調べる。

この中で，(1)は，念頭で推論することの補助を紙で行っていると考えるべきである。標準的な四角形のときにはどうなるのか，直角三角形を組み合わせて三平方の定理を活用するとどんな四角形の場合の結果が推論できるかを考えることが相当している。使える時間が豊富な場合，(1)から(2)，必要に応じて(3)と，ソフトの機能として使うものを広げていくことが考えられるが，1 時間構成の場合には，それまでに生徒達が経験した使い方と照らし合わせて自然なものを選択することが必要になる。

8.3 探究すべきものを選択していくプロセス

1 時間しかないのだから，想定される 3 つの中のどれにしぼるべきかという考え方もありうるが，逆に，完全な解決はしないけれども，三平方の定理から探究を深めていくプロセスそのものの面白さを実感しようという割り切りも考えられる。つまり，次の 2 点を生徒に委ねるのである。

(1) 三平方の定理を四角形に発展させるなら，どんな等式に注目することが可能だろうか。

(2) その中で，注目する価値があるものはどれだろうか。

おそらく，(1)はそれほど時間を要することなく，3 つの等式を見いだしてくれるのではないだろうか。

(2)を検討する上で，たとえば，次のような方法が考えられる。

① 特定の四角形を出発点として，その図形について成り立つ等式について考える

三平方の定理は直角三角形について成り立つ定理であるが，この「直角三角形」のように，代表的な四角形では成り立つはずと考えれば，「どの図形を出発点にしたいか」という問いが生まれる。標準的な四角形について一通り調べると次のような結果になる。

表–1 代表的な四角形と等式の成否

	正方形	長方形	ひし形	平行四辺形	(たこ形)	一般の四角形
$a^2+b^2=c^2+d^2$	○	○	○	○	(X)	X
$a^2+c^2=b^2+d^2$	○	X	○	X	(○)	X
$a^2+b^2+c^2=d^2$	X	X	X	X	(X)	X

おそらく，中学生がつくる表においては，標準的な四角形としてたこ形は適切ではないのでカッコで表示している。

多くの場合で成り立っているから $a^2+b^2=c^2+d^2$ を選択するというのも一つの方法であるが，逆に，成り立つことが珍しい場合に注目したいという理由で $a^2+c^2=b^2+d^2$ を選択するというのも，一つの方法ともいえる。

また，複数の選択肢を考え，検討することは避けたいとしたら，最初から「長方形で成り立つ式を考えよう」と投げかけることで，$a^2+b^2=c^2+d^2$ に焦点化することはできる。一方，$a^2+c^2=b^2+d^2$ に焦点化したいとすると，出発点として適切なのはたこ形になってしまうので，ち

ょっと違和感があるため，この方法は使えないと考えるべきだろう。

8.4 GC を使って生徒が行う活動と結果の発表・共有

$a^2+b^2=c^2+d^2$ を選択する場合には，長方形あるいは平行四辺形の一点を動かし，条件を満たす点をプロットしてできる軌跡に注目することが適切だろう。みんながプロットした点を集めていくと，円あるいは直線が見えてくる。そのような点を探す活動や集まった点をどう言葉で表現するのが適切かに焦点を当てたい。

一方，$a^2+c^2=b^2+d^2$ を選択する場合には，軌跡はつかわず,いろいろな点を動かして条件を満たす図形を探し，その図形を共有して，「共通する性質はないだろうか」という問いをする方が妥当と思える。ある瞬間に，「あれ，対角線を引いてみるといいんじゃない」という気づきが発せられ，それまで特徴を見いだせなかった図形についても，「気づかなかったけど，たしかにどれも直交している」と気づく瞬間を共有したい。

9. おわりに

九点円のときと同様に，今回も大学生に対して模擬授業は行ってみた。三平方の定理を四角形に発展させたいという流れで投げかけたとき，多くの学生が注目したのは長方形で成り立つ式としての注，$a^2+b^2=c^2+d^2$だった。彼らにとって，図-9 のような形で得られた結果は興味深かった。が，その証明は簡単にはできなかった。逆に $a^2+c^2=b^2+d^2$ を当初から選択し，図形を動かして「対角線が直交すれば成り立ちそうだ」という予想を立て，その証明を求めるというスタイルの授業であれば，公立学校での中学校 3 年生向けに,1 時間構成の授業として成立することはできそうだということを実感したが，解決結果からみると「なるほど」と思える問題だけれども，最初にこの式に注目するところに違和感を感じたことと，附属中学校の生徒にとってはあっさり解決してしまって物足りなさを感じるのではないかとも思った。

山中先生がどういう流れを設計するかという点も興味深いが，生徒がそれに対してどういう授業を展開してくれるのか，そしてその授業に参加する先生方は，どのプロセスに学びの価値を見いだすのか，そこを検討することが，授業研究会を催す魅力と実感し，期待している。