イプシロン　2016. Vol.58，21 － 34

数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性

愛知教育大学　山　田　篤　史

1．はじめに

割合概念は，小学校算数の学習内容の中でも，児童にとって最も難しい内容の１つであろう。

全国学力・学習状況調査を見てみても，最初の４年間のまとめで「割合の意味を理解すること」について課題があると指摘され(国立教育政策研究所・教育課程研究センター,2012)，その後，毎年のように割合や小数倍に関わる問題が出題されているにもかかわらず，常に「課題あり」と指摘されているのが現状である[注 1]。そうした実態に対して，全国学力・学習状況調査の各年度の『報告書』は，大まかに「指導改善のポイント」を列挙した上で，課題のある問題に対しては，「学習指導に当たって」という指導の方針について概説したり，「授業アイデア例」を（近年では別冊で）示したりもしている。

また，もちろん全国学力・学習状況調査以前から，割合はつまずきが多い内容であることが指摘されており，その教授・学習に関する先行研究も多い。例えば，日本数学教育学会誌『算数教育』では，2002 年 84 巻第 8 号と 2003 年第 85 巻第 12 号の２回で「割合」特集号が組まれ，特に，第 1 回特集号の中村(2002)の論文では，『算数教育』誌に掲載された「割合」関連論文 59 編（全論文 1730 編中）の分類がなされるなど，従来からこの内容についての関心が高く，その研究の整理も進んでいることが伺える。

そうした関心の高さや研究の分類・整理が進んでいるにもかかわらず，全国学力・学習状況調査の結果を継続的に見る限り，児童の割合概念の理解状況が改善しているようには見えない。そこには，割合概念の曖昧さや本質的な難しさ，関連する諸概念（例えば，小数及びその乗除）の意味理解の難しさ，児童にとっての割合の現実生活での使用頻度の少なさ等々，先行研究の知見を踏まえてもなお容易には解決し難い様々な問題があるのだろう。しかし，表現研究の立場からすると，割合指導の難しさについて，やや異なる光景も見えてくる。本稿では，上述のような割合概念の教授・学習に対して本格的にアプローチする議論からやや外れて，算数・数学の表現研究の立場から，割合概念の指導の困難性と方向性について提案的な議論をすることにしてみたい。

2．背景となる問題

中村(2002)は，日本数学教育学会誌『算数教育』に掲載された割合に関連する論文のレビューで，×小数の指導場面での乗法の意味づけ（意味の拡張）を割合指導として捉える指導の研究を，１つの研究クラスターとして指摘している。ここでの乗法の意味づけとは，乗法を［基準量］×［割合］＝［比較量］とみて，例えば，3×2.6 という式を「3 を 1 としたとき，2.6 に当たる大き

さを求めること」という意味で理解させようというものである。実際，『学習指導要領解説』における×小数の指導場面での乗法の意味は上のようであるし(文部科学省,2008,pp.143-144)，多くの教科書における「割合」の定義も，上の乗法の定義を割合の第二用法としたときの第一用法に当たるものである。また，この中村(2002)のレビューでは，上記のような一連の研究に対して，「乗除法と関連づけて数直線との関わりで指導を展開することが有効であることを示すものが多い」(p.19)と，研究成果がまとめられている。そして，現在の『学習指導要領解説』には，下図のような比例数直線[注 2]が登場し，各教科書もこれに類する図を盛んに掲載するようになってきた。

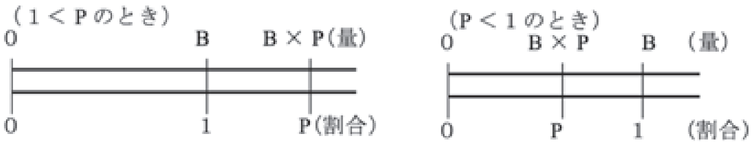
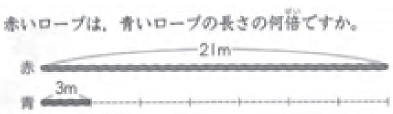
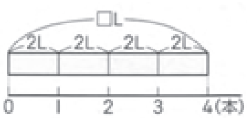


図１：小数による乗法の意味を説明する数直線(文部科学省,2008,p.144)

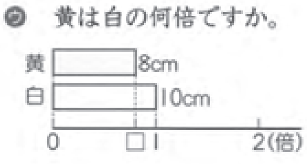
この種の数直線は，比例関係にある２つの量空間の任意の量の対応関係を記述することができるため，問題場面における乗除関係を記述する際（例えば，立式をしたり，有理数計算の方法を理解したり，その計算結果を確認したりする際）には，確かに有用な図となり得るものである。実際，全国学力・学習状況調査の報告書においても，しばしば，割合を求める問題では，問題場面から，何が基準量と比較量かを捉えることが重要で，それをテープ図・線分図・数直線などにかかせることで指導を行うことが推奨されてきている（例えば，文部科学省/国立教育政策研究所,2009,p.240; 2010,p.176; 2015,p.73)。しかも，この種の図は，かけ算や倍が登場する教科書紙面には，様々な形でバリエーションを変えて，かなり低学年から登場していることが分かる。



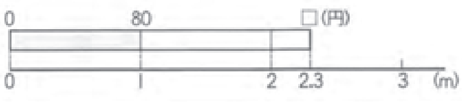
(a) 整数倍に登場する図(清水他, 2015a, p.25)



(b) ×整数に登場する図(清水他, 2015b, p.38)



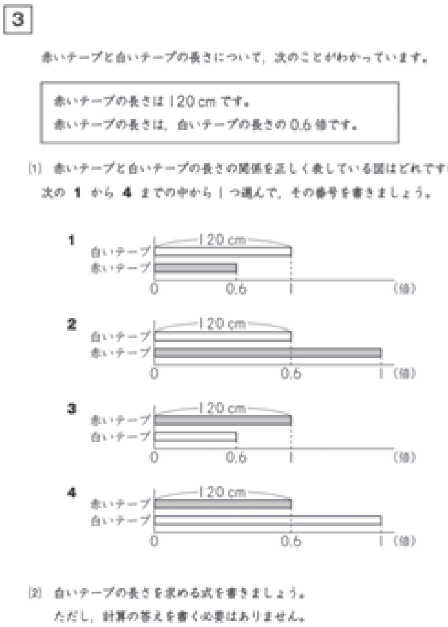
(c) 小数倍に登場する図(清水他, 2015b, p.53)



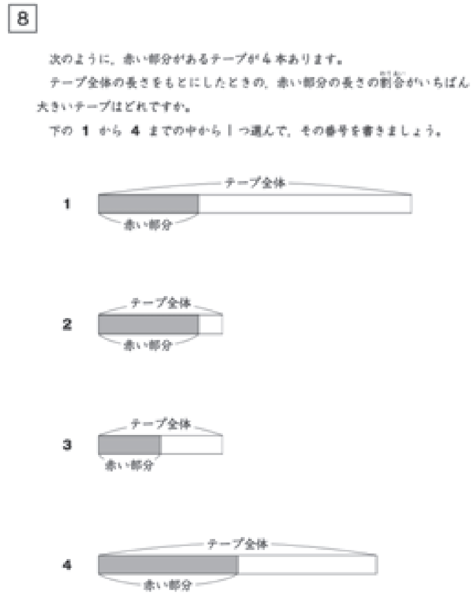
(d) ×小数に登場する図(清水他, 2015c, p.39)

図２：比例数直線へと至る様々な図のバリエーション

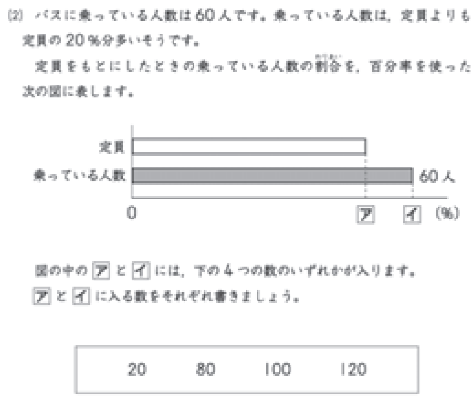
ところが，この種の図の有効性に関わる先行研究での知見や上記のような教科書における配慮があるにもかかわらず，この種の図が有効に機能しているとは言い難い実態もある。例えば，全国学力・学習状況調査における平成 24 年度の算数A $\boxed{3}$(1)(2)と平成 28 年度のA $\boxed{8}$及びA $\boxed{9}$(2)の



(a) 平成 24 年度算数A $\boxed{3}$ 問題



(b) 平成 28 年度算数A $\boxed{8}$ 問題



(c) 平成 28 年度算数A $\boxed{9}$ (2)問題

図３：図が付された割合に関わる幾つかの問題

問題を見てみよう（以下，それぞれの問題を「H24 A $\boxed{3}$」「H28 A $\boxed{8}$」「H28 A $\boxed{9}$(2)」と略記する）。

これら２組の問題は，問題形式や問われていることは異なるが，いずれも図が付された状態で，問題文や図から基準量・比較量・割合の３つの数量の関係を理解することが求められる問題になっている。

まず，H24 A $\boxed{3}$ では，(2)のように問題文から直接立式を迫られることよりも，(1)のように３つの数量関係を一旦図示した場面を解釈する方が児童にとっては容易であろうと想定されるかもし

れない。ところが，結果のクロス集計（表１）は次の通りであった(文部科学省/国立教育政策研究所, 2012, p.190)。結果を見れば明らかなように，(2)の方が正答率が高いのみならず，(2)の正答者中の(1)の誤答者（多分に図が読めていない児童）は，(2)正答者中の割合で考えると，実にその約半分の 46.9%（全体の 19.4%）もいることになる。多分に図が読めていないこうした児童にとっては，例えば，立式の根拠を振り返ったり計算結果を確かめたりするときなどに，この種の図が役に立つとは限らないのであろう。また，その逆である(1)の正答者の中で(2)の誤答者は 36.2%（全体の 12.4%）おり，図での２量間の関係解釈が立式に結びついていないこうした児童にとっても，図は具体的な問題解決に有用な道具となり得ていないのであろう。とすれば，結局，両方に正答している 21.9%以外の児童（約８割の児童）にとっては，図は必ずしも有用なものとなっていないことが伺えるのである。

表１：H24 A$\boxed{3}$(1)と A$\boxed{3}$(2)のクロス集計表(文部科学省/国立教育政策研究所,2012,p.190)

<table>
<tr><td colspan="3" rowspan="3"></td><td colspan="5">A$\boxed{3}$(2)</td></tr>
<tr><td>正答</td><td colspan="2">誤答</td><td>無回答</td><td rowspan="2">合計</td></tr>
<tr><td>類型
1,2,3,4</td><td>類型 5</td><td>類型 9</td><td>類型 0</td></tr>
<tr><td rowspan="5">A$\boxed{3}$(1)</td><td>正答</td><td>類型 4</td><td>21.9</td><td>9.4</td><td>2.4</td><td>0.6</td><td>34.3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">誤答</td><td>類型 3</td><td>14.7</td><td>32.2</td><td>3.0</td><td>1.1</td><td>50.9</td></tr>
<tr><td>類型 1,2,9</td><td>4.7</td><td>7.0</td><td>1.2</td><td>0.6</td><td>13.6</td></tr>
<tr><td>無回答</td><td>類型 0</td><td>0.0</td><td>0.0</td><td>0.0</td><td>1.1</td><td>1.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">合計</td><td>41.3</td><td>48.6</td><td>6.7</td><td>3.4</td><td>100.0</td></tr>
</table>

(%)

さらに，H28 A$\boxed{8}$と H28 A$\boxed{9}$(2)のクロス表（表２）を見てみよう(文部科学省/国立教育政策研究所,2016,p.61)。

表２：H28 A$\boxed{8}$と A$\boxed{9}$(2)のクロス集計表(文部科学省/国立教育政策研究所,2016,p.61)

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="4">A$\boxed{9}$(2)</td></tr>
<tr><td>正答</td><td>誤答</td><td>無回答</td><td>合計</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A$\boxed{8}$</td><td>正答</td><td>45.7</td><td>26.9</td><td>2.0</td><td>74.5</td></tr>
<tr><td>誤答</td><td>5.5</td><td>16.2</td><td>1.8</td><td>23.4</td></tr>
<tr><td>無回答</td><td>0.0</td><td>0.2</td><td>1.8</td><td>2.0</td></tr>
<tr><td>合計</td><td>51.2</td><td>43.2</td><td>5.6</td><td>100.0</td></tr>
</table>

(%)

H28 A$\boxed{8}$の正答率は 74.5%であり，数値化を伴わない素朴な部分と全体の割合関係（及び割合の比較）は約 3/4 の児童が理解できている。しかし，数値を伴う問題場面の解釈が必要で，基準量と比較量の関係を理解しつつ，それらに相当する割合（百分率）を数直線上に表すことができない児童が，その中で 38.8%（□28.9/74.5 の意味で，全体では 28.9%）にも及んでいる。しかも，H28 A$\boxed{9}$(2)に正答し，H28 A$\boxed{8}$を誤る児童は相対的にかなり少ない（51.2%の中の 5.5%であり，10.7%にしか及ばない）のであるから，基準量と比較量の関係を理解して，それらを数直線上で

図示できる児童の大部分（９割弱）は，全体に占める部分の割合に関する素朴な理解を持っており，それらを比較の文脈で使用可能な領域にまで到達できているのである。

結局,全体に占める部分の割合についての素朴な理解があるにもかかわらず,その約４割弱が,小数倍や×小数の単元で登場しがちな比例数直線に類する図で基準量・比較量・割合の関係を適切に図示できない，あるいは図の上で解釈できない（そして，その逆は相対的にかなり少ない）のであるから,現状では,この種の図が割合の理解に十分貢献しているとは言い難い面があろう。

３．表現研究からみた割合概念の指導に関する方向性の検討

3.1. 氷山モデルと問題の所在

こうした現実を踏まえた上で，表現現研究の立場から，割合概念の学習指導の改善の方向性とそれに関わる困難点について探ってみることにしたい。

まず，最も大胆な方向性は，比例数直線に変わる別な（有用と目される）表現を媒介にした指導を考えることであろう。しかし，そもそも，比例数直線に類する表現を使った指導は，先行研究の知見の蓄積の結果普及してきたものでもあった[注 3]。その意味では，全く別の表現を考えるというのは無謀かつ不経済な考え方で，それよりはむしろ，児童の理解に応じて多様な表現を使った指導を考えるという方が穏健かつ妥当な考え方になるだろう。例えば,啓林館の教科書では,過去から伝統的に「関係図」と呼ばれる図式が使用されてきており，×小数の単元などでは，現在でも比例数直線と並置されて，２つの表現が適宜選択できるようになっている。ただし，そこで生じる大きな問題は，多様な表現を使用する場合，教室での話し合いにおいて表現間の対応を付けることが，大きなコミュニケーション・コストになってしまうことであろう。

もう一つは，比例数直線に基づく指導を，(この表現のよさは先行研究でも十分指摘されているところであり，そのよさが十分普及していないと考えて）より厚く，より早期から実施するというものであろう。ただし，こうした指導は，図２を見れば明らかなように，むしろ現在でも，教科書では，かなりの程度実現されていると見てよいだろう。例えば，図２(a)(b)のように，かなり加法的な場面を連想させる「倍」を表す図から，図２(c)のように「倍」を明示した数直線を付加した図を経由して，図２(d)のように殆ど比例数直線になっているような図に至るまで，数学年を跨いで表現を徐々に抽象化しつつ比例数直線へと至っている様子が，少なくとも教科書紙面では伺える。５年生の頃までには，与えられた図の意図を十分に解釈・理解でき，自由自在に使いこなすことができるように，より厚く，より早期から，図のかき方までも含めて，この図を用いた指導を徹底しようとするのが，多分によくある考え方で，教科書はそうした方向性で紙面を改良してきているのだと思われる。

しかし,表現研究の立場からみたとき,こうした方向性の最大の問題は,これらの教科書の様々な表現がいずれも教科書から与えられたものである，という点なのだ。こうした点が問題と考えられる理由を説明するために，先ずは Webb, Boswinkel, & Dekker(2008)の「氷山モデル」について見てみることにしよう。

氷山モデルとは，端的には，下の図４の事例に示されるものである。このモデルを上から下に見るならば，児童が「氷山の先端(tip of the iceberg)」であるフォーマルな数学的表現（図４の事例では，先端の 3/4）を理解するために，どれほど広範囲の数学的モデルを，どのように経験する必要があるか（つまり，その氷山の先端を支えるために，どれほどの「浮力を生み出す容積(floating capacity)」を必要とするか）を説明するためのモデルとなる。また，下から上へと見るならば，インフォーマルな表現やプリフォーマル(pre-formal)な表現を通じて，どのようにフォーマルな表現の漸進的形式化が進展しうるかを説明するモデルとなる。インフォーマルな表現とは，図４では，例えば，水面下の右下層にあるリンゴの分割表現など，「リアルあるいは想像上の文脈を伴う子どもの経験に根ざした」(Webb *et al*., 2008, p.112)絵・図・例示等々のことを指し，プリフォーマルな表現とは，図４では，例えば，水面下中間層にある線分図など，「児童生徒のインフォーマルな表現や推論に基盤を置くが，より大きな数学的構造を提供し」(Webb *et al*., 2008, p.112)，フォーマルな表現を意味論的に支える媒介的な表現のことを指す。重要な点は，3/4 というフォーマルな表現を水面上に浮かび上がらせる「浮力を生み出す容積」の部分であり，そこを「インフォーマルな表現」と「プリフォーマルな表現」に分け，表現を３層構造で考えようとしている点である。

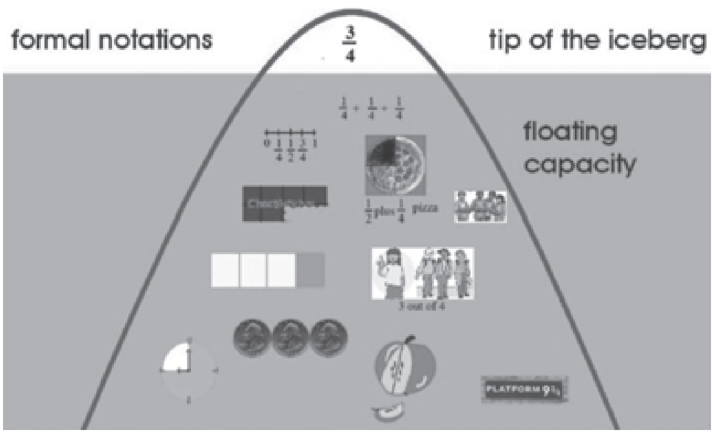


図４：氷山モデル (Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008, p.111)

この氷山モデルを想定すると，比例数直線などは，典型的なプリフォーマルな表現に相当するものになろう。実際，Webb *et al*.(2008) も，プリフォーマルな表現の例としてこの種の表現を挙げており，これらは，子どもが独自に開発するというより，教師や教科書教材から示唆を受けて使い始めるようなものだろうとされている。とすれば，比例数直線を典型とする，割合概念を支え割合や乗除が絡む問題場面に付随して教科書に掲載される様々な表現は，この氷山モデルでは，殆どがプリフォーマルな表現として機能しているのが実情であること，そして我が国の割合・小数倍・×小数の指導では，この部分が非常に分厚いことが分かるのである。

一方，比例数直線などが支えるフォーマルな表現は，かなり広範囲で捉えどころのないものと

なる（意味的には，乗法構造の一部を支えていると言ってよいのだろうが，それに対応する形式的表現については，かなり曖昧な議論しかできない）。例えば，割合概念の使用プロセスや割合を求めるプロセスを含めてのそれは○×△や○÷□のようなかけ算・わり算形式というものになるのかもしれないし，最も抽象的な結果としてのそれは（具体的な）有理数というものになるかもしれない。また，教科書紙面から事例を拾えば，［割合］＝［比べる量］÷［もとにする量］のような言葉の式になるのかもしれない。

そして，このモデルを介して見た場合の割合指導の最大の問題は，「比例数直線を支えるインフォーマルな表現にはどのようなものがあるのだろうか」「児童は，どのようなインフォーマルな表現を基盤にして，プリフォーマルな表現（比例数直線の類の表現）を理解しているのだろうか」という疑問であり，その答えに窮してしまうという所が我々の指導の困難性に繋がっていると思われるのである。つまり，氷山モデルの中層に比例数直線を置いた場合，その下層にどのようなインフォーマルな表現群があると想定され，実際に児童はどのようなインフォーマルな表現を比例数直線の理解に使用したり結びつけたりしているのかが，(多分に関連する領域が広範に及ぶが故に）明確でないところが，我々の指導（と児童の学習）を難しくしている要因と考えられるのだ。

多分に，加法的な状況は子どもの回りに溢れているし，子どもが多彩な経験に根ざしたインフォーマルな表現を持っていることも想定されるため，累加の意味が効く×整数の範囲までであれば，子どもはこの種の図を解釈しやすいだろう。例えば，図２(a)のような図を解釈するときに，基準量の青テープを，１本ずつ７つ分（７回分）比較量の赤テープになるまで繋げたり（あてがったり)，基準量の青テープを指で測り，その指の間隔を利用して赤テープの長さを測り取ったりするなど，整数値的な（それ故，加法的な）測定を経験的にイメージすることはしやすいだろう（図２(b)も同様であろう）。ところが，図２(c)のように，白テープを基準にして黄テープを測ったり倍率を求めたりする活動に繋がるような学習経験は想像しづらいところであるし，白テープを縮めて黄テープにするような，謂わば，基準量を明示したまま比較量を「連続的に」拡大・縮小するような（そして，それを，基準量を基に数値化するような）活動の素地，つまりはそれらの活動の理解を支えるインフォーマルな表現に基づく経験をどこに求めたらよいのだろうかは，歴史的なカリキュラムの系統性もあり，かなり難しい問題である。また，その延長として図２(d)における 1m から 2.3m を作り出したり，比例の考えを使って 1m と 2.3m の関係を 80 円に作用させたり，さらに，図３(c)（H28 A $\boxed{9}$(2)）の問題の正答率の低さを考えるならば，1m に 80 円を対応させつつ 2.3m に□円を対応させたりするような諸々の表現上での操作を支えるようなインフォーマルな表現に基づく活動経験をどこに確保したらよいのだろうか。これこそが，表現研究からみたときの割合指導の問題であり困難性だと思われるのだ。

3.2. 比例数直線の理解を支えるインフォーマルな表現に関わる活動経験をどこに（どのように）確保するのか

上述のように，基準量を明示したまま比較量を「連続的に」拡大・縮小させるような活動経験

として直ぐに思いつくのは，素朴ではあるが，数直線上で小数・分数を表現する活動などがそれに当たるのかもしれない。例えば，整数の問題で０を基点とした倍のイメージは薄い問題ではあるが，平成 21 年度の全国学力・学習状況調査算数Ａ$\boxed{2}$(1)の問題を見てみよう（図５）。この問題の正答率は 64.3％であり(文部科学省/国立教育政策研究所,2009,p.222)，一定程度の児童が，数直線上の目盛りの単位を考慮しながら与えられた数値をプロットすることに慣れてはいない様子が伺えるからである。

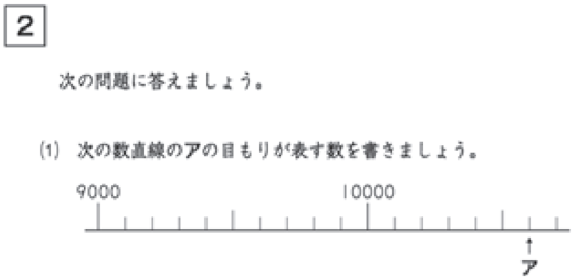


図５：平成 21 年度全国学力・学習状況調査算数Ａ$\boxed{2}$(1)

そして，こうした活動では，例えば，小数 2.3 を，数直線上にプロットする際には，大きな１を表すテープが２つと 0.1 を表すテープを３個分置いていくといったように，加法的な操作の趣が強い形で小数をプロットするイメージだけを強調するのは避けたいところである（むしろ，飛ばし数えの要領で，「１の２個分（倍）の２と，そこから 0.1 が３個分（倍）で 2.3」のように２ステップで 2.3 をプロットする方が，後の 0.1 の 23 倍というイメージに繋がりやすいだろう）。また，0.1 を単位にして 23 個分（倍）と考える場合でも，殆どの教科書にあるように，予め 0.1 の目盛りを与えることはせず，目盛りの無い空の数直線を使って１や 0.1 を児童に目盛らせるところから始めることは大切な活動だろうし，具体的に 0.1 の 23 個分（倍）に当たる点をプロットさせる段階でも，0.1 という新しい単位に指を置きながら 2.3 に当たる所まで連続的に（あるいは，上記のように飛ばし数えの要領で）目盛りを別の指でなぞったりするような（例えば，図６），連続的な操作のイメージも確保したいところである[注 4]。

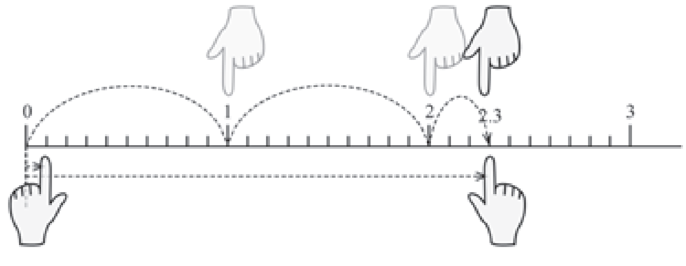


図６：比例数直線の理解を支える×2.3 や 2.3 倍に対するインフォーマルな表現（ジェスチャー）の例

さらに，「拡大・縮小」という活動を直接示唆するのは「縮図と拡大図」であり，これは現行学習指導要領では，６年生の学習内容になる。また，それと関連して，比例数直線に表れる４つの数（量）の関係を直接示唆するのは「比」であり，これも６年生の学習内容になっている。×小数や割合の学習に際して上記の内容を直接利用できないという現行学習指導要領の系統上の困難はあるものの，「比」に関連する「簡単な比例」は５年生の学習内容であるし，そもそも「比例の考え」自体は，それ以前からある程度利用可能なものであろう。そして，比例の考えに付随する様々な表現は，比例数直線を支えるインフォーマルな表現として検討に値するものであろう。

まず，割合指導に比例の考えを積極的に利用しようという提案は幾つもある。例えば，田端(1999)は，バスケットにおける多人数の「シュートのうまさ」を比較するという問題解決場面を利用し，当初はシュート回数と入った回数の２つの数を表形式にまとめつつ，比例の考えを使って一方を揃えて比較するところから始まるが，徐々に多人数の場合は１つの数（割合）で比較する方が有利であることに気付かせて，割合概念を定式化していくような指導を提案している。この種の問題解決の文脈は, 今日では, 単位量当たりの大きさの指導でよく見かけるものであるが, 多数の数対を表形式でまとめつつも,「同じシュートのうまさの人（同じ割合でシュートを成功できる人)」に着目させていくプロセスを経験することは，特にその表形式と比例数直線の類似性から，比例数直線への移行を容易にするよい学習経験となるはずである。ただし，数対を表形式で並べるような表現は，算数・数学教育ではあまりに多くの場所で登場するため，インフォーマル/プリフォーマルの区別は，むしろ児童の表形式の捉え方や使い方に依存するのかもしれない。

一方, 上記のように比例の考えを直接的に割合指導に利用するというより, ×小数の指導場面, あるいはその素地指導の場面で利用し，それを積極的に育てていこうというという提案，特に，やや特殊な図式を介した指導を紹介しているのが石田(1982)である。

石田(1982)は，「1m の棒を立てると 2mの影ができる時，㋑ 3m，4m の棒ならどれだけの影ができるでしょうか. ㋺ 3.7m，0.3m の棒の影はどのくらいになるでしょうか.」(p.4)という問題から始めて，図７のような図を示しつつ，比例の考えを使って影の長さの見当をつけさせたり，４種の棒の影の長さの求め方を考えさせたりすることで，×小数の意味を理解させていくような指導を紹介している。この種の図を基盤にして幾何学的な文脈で比例の考えや比例的推論の仕方を指導するというアイデアは，*Educational Studies in Mathematics, 7* (3) に掲載された Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO)の研究活動報告の中で紹介された「比」の指導事例がオリジナル（そのワークシートは図８(a)）であるが，そこには図８(b)に示されるような幾何学的にスペースの比例配分を考えるような活動も掲載されている。

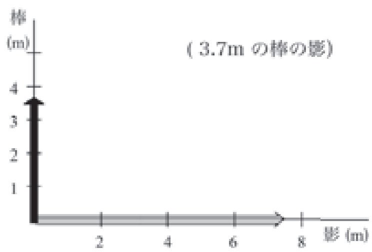
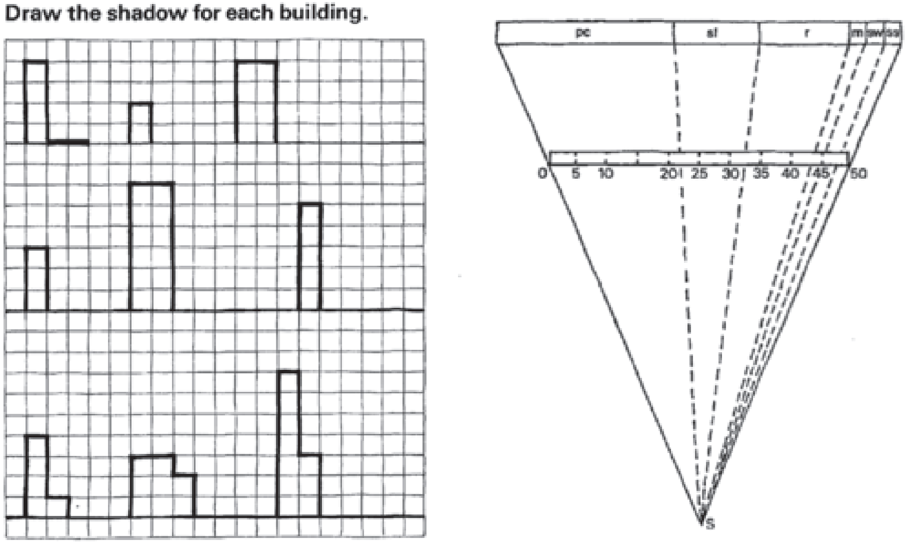


図７



(a)：ビルの影のワークシート(IOWA,1976,p.276)　(b)：スペースの比例配分(IOWA,1976,p.283)

図８

図８(b)に関しては，図を見ればどのようなことが行われているかは一目稜線なのであるが，そこには，50 のスペースを pc(pedel-cart), sl (slide), r (roller), m (monkey-bar), sw (see-saw), ss (swing)の６つの投票数に従って比例配分する方法として，次のような説明が添えられている：「２番目の可能性は，幾何学的な乗法である。128 の投票を一列に並べよ。50 のスペースを描き，その端と端を交点 s まで繋いで，全ての繋がっている線分を引け」(p.283)。これは，６項目の合計を 50 へと縮小することで，それに応じて各項目の占める大きさも比例的に縮小するような幾何学的方法のイメージ形成に非常に有用な活動だと思われるのだが，これは，「幾何学的乗法」と説明にあるように，本質的には，全体に占める６項目各々の割合（例えば，pc であれば，pc/(pc+sl+r+m+sw+ss)）を 50 にかける（あるいは，その割合を作り出す）操作そのものである。

図８(b)のかけ算自体はかなり人工的な趣ではあるが，図８(a)のビルの影の問題も図８(b)の問題も，元々の場面設定は現実的なものであるし，図８の表現そのものは，それぞれに児童のインフォーマルな表現を想定しうるものになっている。例えば，図８(a)は，太陽光のような平行光源による影の生成であるし，図８(b)は，点光源を利用した拡大・縮小のイメージそのものであり，例えば，影絵などはそのインフォーマルな表現活動の典型例になるだろう。そして，両者はいずれも，（現在の児童の実態に合わせて多少の教材アレンジは必要になるだろうが）割合や×小数（ある意味では割合の第二用法）の学習にとって有用な，そして特に，比例数直線の理解を支える興味深い（児童にとっては印象深い）インフォーマルな表現について経験できる活動を生み出すことのできる好適素材の１つだと思われるのだ。

４．おわりに

本稿では，全国学力・学習状況調査における割合概念に関わる問題の正答率が継続的に低い傾向にあることを踏まえ，算数・数学の表現研究の立場から，割合概念の指導の困難性と方向性について提案的な議論を試みた。

先行研究を踏まえるならば，割合概念の教授・学習にとって比例数直線は有用な表現であると考えてよいだろうし，教科書紙面においても，比例数直線に至る漸進的な抽象化を目論んでそれに類する図が数年に渡って継続的に掲載されるようにもなってきた。ところが，そうした一連の図を「氷山モデル」で見てみると，それらはいずれも児童にとってはプリフォーマルな表現として機能している可能性が高いのであり，結局,「そうした比例数直線を支えるインフォーマルな表現にはどのようなものがあるのだろうか」「児童はどのようなインフォーマルな表現を基盤にして，プリフォーマルな表現（比例数直線の類の表現）を理解しているのだろうか」という疑問が呈されることになるのである。

本稿では，そうした疑問に包括的に答えることはできなかったが，全国学力・学習状況調査の結果や比例数直線の使われ方の分析を踏まえ，比例数直線の理解を支えると目されるインフォーマルな表現に基づく２つの活動経験（その学習素材）について指摘した。その 1 つは，倍や比例のイメージをできるだけ維持しながら数直線上に小数・分数をプロットする活動であり，ともすると経験豊かな教師にとっては馴染みのある表現活動であったかもしれない。もう 1 つは，比例の考えをより積極的に使った IOWO(1976)の２種の教材（ビルの影，スペースの比例配分）に基づく活動であり，それらは，平行光源や点光源が生み出す身近なインフォーマルな表現（活動）が容易に連想可能な素材であり，しかもそこから比例的推論や拡大・縮小のイメージ，更には，割合やその乗法（×小数）へと至る道筋を想定可能な，いわば比例数直線の理解を支えるインフォーマルな表現について経験可能な活動を生み出す素材と考えられるものであった。

もちろん，この種の活動経験や教材は他にも多種多様なものが存在しうると思われるし，既に何処かで実践されてきているかもしれない。そうした活動・教材の発掘と分析は，今後の課題である。

注

[注 1] 例えば，国立教育政策研究所が編集する『全国学力・学習状況調査報告書』を，年度を遡るようにして見てみると，次のように，毎年度，何らかの課題が指摘されている。

平成 28 年度：「基準量，比較量，割合の関係を正しく捉えることに依然として課題がある。〔A 9 (2)〕」(2016,p.8)

平成 27 年度：「基準量，比較量，割合の関係を正しく捉えることに依然として課題がある。〔B 2 (2),(3)〕」(2015,p.8)

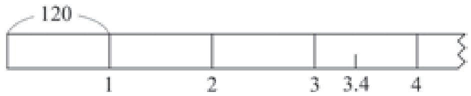
平成 26 年度：「割合が 1 より小さい場合でも，比較量が（基準量）×（割合）で求められることの理解に課題がある。〔A 2 (2)〕」(2014,p.8)

平成25年度：「割合が同じで基準量が増えているときの比較量の大小を判断し，その理由を記述することについて依然として課題があるが，改善の傾向が見られる。〔B 5 (2)〕」(2013,p,8)

平成24年度：「基準量を求める場面において，場面と図を関連付けて，示された割合を基に基準量と比較量の関係を理解したり，1に当たる大きさを求めるために除法が用いられることを理解したりすることに課題がある。〔A 3 (1),(2)〕」(2012,p.12),「百分率の意味の理解や表から適切な数値を取り出して割合の大小を判断し，その理由を記述することに課題がある。〔A 8 , B 5 (3)〕」(2012,p.12)

[注2] この種の数直線に特定の呼び方があるか否かについては不明である。また，問題場面に登場する２量を２本の数直線で表さず，１本の直線にまとめてしまうような図も，本質的には同じ構造を示すものであるから，図１の図と同類の者と考えてよい場合がある。そうした図では，単に「数直線」と呼ばれることもあるだろうし（実際，中村(2002)はそう呼んでいる)，「線分図」と呼ばれることもあるだろう。ここでは，２量間の比例関係を基盤とした乗法構造の一部との繋がりを意識し，暫定的に「比例数直線」と呼んでいる。

[注3] 例えば，石田(1982)は，小数による乗法も含めて，乗法一般が［基準量］×［割合］＝［比較量］で意味付けられる，つまり乗法では「割合」をかけているのだという学習指導要領の方針を確認した上で，乗法の一般的な意味のシェーマ図としては，中島(1979)の提唱する下のようなテープ図が「完成品に近いもの」と評価している。この図は，比例数直線とは若干異なり，図２(d)に近く，120×3.4の値に相当する部分が明示されていないものの，1982年の時点で既に２量間の比例関係を基にしたこの種の表現が評価されていた点には注目してよいと思われる。



[注4] 「連続的に」というは，小学校算数を考慮すれば，分割や倍などの有理数的な操作を基盤にしたものであることは当然であり，あくまで「離散的・加法的」操作に対置させる形で使用した用語である。2.3mを0.1mの23個分として捉える場合でも，0.1mを1個ずつ個別的に並べて置いていくようなイメージだけに頼るのではなく，目盛りの幅は維持されつつもテープの長さだけが伸びていくようなイメージを徐々に構築できればよいだろう。

引用・参考文献

石田忠男(1982).「小数の計算についての新しい見方・扱い方 ―小数のかけ算を中心に―」.『新しい算数研究』, No.134, 2-5.

国立教育政策研究所・教育課程研究センター(2012).『全国学力・学習状況調査の４年間の調査結果から今後の取り組みが期待される内容のまとめ～児童生徒への学習指導の改善･充実に向

けて～（小学校編）』. 東京:教育出版.

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015a). 『わくわく算数３上』. 大阪:新興出版社啓林館.

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015b). 『わくわく算数４下』. 大阪:新興出版社啓林館.

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015c). 『わくわく算数５』. 大阪:新興出版社啓林館.

田端輝彦(1999). 「割合の指導の改善に関する一考察 —前提となる比例関係に着目した割合の意味指導—」. 杉山吉茂先生ご退官記念論文集編集委員会(編著),『新しい算数・数学教育の実践をめざして：杉山吉茂先生ご退官記念論文集』(pp.122-131). 東京:東洋館出版社.

中島健三(1979). 「小数のかけ算（導入）（５年）」. 『新しい算数研究』, No.100, 33-42.

中村享史(2002).「割合指導に関する研究の動向と今後の方向」. 日本数学教育学会誌『算数教育』, 84(8), 14-21.

文部科学省(2008). 『小学校学習指導要領解説：算数編』. 東京:東洋館出版社.

文部科学省/国立教育政策研究所(2009).『平成 21 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/ 09chousakekkahoukoku/ 09shou_data/shiryou/09shou_chousakekkahoukokusho_ikkatsu_2.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2010).『平成 22 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku/02shou/shou_ikkatu_2.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2012).『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/ 12chousakekkahoukoku/ 03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo_ikkatsu_2.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2013).『平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校 算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/ 13chousakekkahoukoku/data/research-report/13-p-math.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2014).『平成 26 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校 算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/14chousakekkahoukoku/report/data/pmath.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2015).『平成 27 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校 算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/15chousakekkahoukoku/report/data/pmath.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2016).『平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校 算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/data/16pmath.pdf)

Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (1976). Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, **7*** (3), 193-331. (Special Issue: Five Years IOWO)

Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, **14*** (2), 110-113.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：25381208 及び課題番号：26381211）の助成を受けたものである。