イプシロン　2016. Vol.58, 55 － 62

あまりのあるわり算の周辺における一考

名古屋学院大学　愛知教育大学非常勤　**宇　野　民　幸**

１．一般的にある振り返りとして

算数科の学習に，特に直接的に関わりがなくなった一般の方が，例えば「帯分数」という表現や，「デシリットル」という呼び方を聞くと，「懐かしい」という印象を持つことが多くある．それは，小学校で学んだ記憶として覚えているが，日常においてほとんど，場合によってはそれ以来一度も，使うことがなかったため，そのような過去の学習の記憶として振り返ることになる．同様に，算数科において通常は中学年以降で学ぶ「あまりのあるわり算」も，小学校の学習にある特有な一つのの内容として，振り返られるところが一般にはある．それは，上記と関連させて考えると，呼び方自体は懐かしいとしても，「仮分数」や「ミリリットル」は，その後の学習や日常に見られることがあり，同様に，わり算において，さらに割り進んで小数や分数で表現する方法は，小学校においても，以降で学習しており，また，中等教育においても活用するため，具体的なわり算の問題を振り返って計算する際には，そのわり進む計算をおこなうことが自然である．前提として，「あまりのあるわり算」をする，と示されていれば，商と余りの答えを求めらる場合は多いであろう．一方，日常において，電卓をもちいる計算としては通常，あまりあるわり算の計算はおこなわなくて，特に，その「あまり」はすぐに求めにくい．あえて電卓をもちいて，メモをしながら，商やあまりを求めることは，わる数・わられる数との関係式の理解を確かめるためには有効となるが，日常では，さほどにその必要性は感じられないだろう．もし，その必要性が多いならば，通常の電卓にも，商と余りが出るモードが組み込まれていてもおかしくない．

２．あまりのあるわり算の周辺と系統性について

前述したように，日常においてはさほどもちいられず，算数科の特有な学びとして，一般には懐かしいという印象も与える「あまりのあるわり算」であるが，高等学校の数学科の内容においては，前回の指導要領改訂より，整数の性質が単元として体系立って扱われることになり，合同式や互除法，また，初等整数論の考え方に関連する内容などが対象となっている．あまりのあるわり算は，それらの整数に関する内容に系統性があるが，それでも小学校から，数学的な体系としては，しばらくブランクを空けることになる．また，その改訂前は，初等整数論などを学ぶとしても，高等教育においてからであり，体系として学習しない場合も，一般にはほとんどであった．

あまりのあるわり算は，わり算が始まる小学３年生から一般に扱われており，その商を整数で示すことより，割り切れる場合の０を含め，「あまり」の存在を意識して，答えとして表現する．しばらく「・・・」と略されていたその表記は，今はまた，一般に「あまり」と記されている．

そして，以降のわり算の学習においても，筆算を導入して計算をおこなう場面において，例え

ば，２桁÷１桁の計算として，筆算をもちいて，「あまりあるわり算」の計算のし方を考えて，身に付けていく流れとなる.

その後においては，わり算の計算として筆算を利用することも多くなり，「小数のわり算」についても筆算が利用され，その効力を発揮するが，一方で，筆算の形式的な操作のみに慣れ，わり算の意味から遠ざかってしまうと，例えば，高学年（５年生）における小数のわり算の計算では，そのあまりを求める際に，意味を持って移動していたはずの「小数点」が，何故にまた，あまりにだけ対応しなくなるのか，という疑問を持つことが，むしろその学習後において，よくみられる．特に，初等教育の教員養成段階にある学生においても，算数や数学を専攻しない場合は特に，振り返って，その理由を明らかにするために，ふと，立ち留まってしまうことは多くみられる.

そのように，一般に振り返る際にも要所のある「あまりのあるわり算」は，その習い始めから，表現はされていなくとも，実は考えれば疑問に結びついてしまう要所があるといえる．本稿では，その疑問や理解の状態を，いわば掘り起こして対峙するために，その要所についての考察を述べる.

３．わり算のあまりの意味について

あまりのあるわり算の学習は，概念の具体的な伝わり易さから，包含除の事例より導入されることが多い．そこでは，わる数に相当する単位当たり（一あたり）の数ずつ，まさに包含していくイメージにより，あまりの意味も表現しやすい．その後，簡易化した図などにおいても，その包含の状況を「括る」などして，後から枠を書き示すことでも，商と余りを表現でき，その意味の確認と数量としての把握につながる．そして，等分除による具体的な事例も，あまりのあるわり算の学習において扱われる．一般にはその後，わり算の計算として，２桁÷１桁で商が２桁となる場合が扱われていき，他の領域の単元とも交互しながら，現行では３年生において，あまりのあるわり算が導入されて扱われる構成がなされている.

この段階における「あまりのあるわり算」は，わり算の包含除と等分除の意味の違いを，改めて児童が明確に意識できる機会となる．わり算は，３年生から学び，その意味の違いも意識することが重要となるが，計算と商については，同じ方法で同じ値が求まることもまた，児童は理解していくことになる．この意味の違いは，以降の節でも具体的に考察するように，計算の過程においては，こだわり過ぎる必要はむしろないといえるが，導入時だけ意識すればよいのではなく，高学年における単位当たりの大きさの内容に系統性のある概念である．その場合にも，すでにブランクが空くため，この「あまりのあるわり算」において，一旦計算としても収れんされている，わり算の等分除と包含除の意味に立ち返り，再びその違いを意識することは意味があると考える.

この意味の違いを意識する手立てとして，その「あまり」となる理由について，言葉にして表現する活動が考えられる．それは，包含除であれば，単位あたりの大きさに満たないから，すなわち「もう一括りできないから」であり，対して，等分除の場合は，等しく分けるには足らない，すなわち「もう等しく配れないから」ことが理由となる．このような言葉による表現は，「分ける」と

いう言葉が，包含とも，分配とも捉えられるため，「もう分けられないから」とすれば，どちらでも通用するような容易な言い方となり，言葉で表現するとなると，そうなりがちでもあることが推察される．ここでは，日常にあるように，連辞として文脈より意味を判断しているところを，いわば，連合されるそれらの意味の違いを言葉にして，「括っていき，その括りがいくつ分あるのか」知りたいのか，あるいは，「分配していき，その一つ当たりはいくつになるのか」知りたいのか，その違いが明確に意識できる，より具体的な言葉の表現を工夫することに意義があると考える．

その理由は，後の節においても触れるが，ここにある差異とは，内容の系統性として「分数」という表現の，割合を示す側面と，量を表す側面とにそれぞれがつながる概念となることにもある．すなわち，「もう括りができなくあまるとき，満たさなくとも，さらに括る」ことで，その一括りに対する割合を数として意識していくことと，「もう等しく配れなくあまるなら，分割しても，さらに配る」ことで，等しく配分される量を数として意識していくこととの違いにつながる．

上述においては，そのニュアンスに頼り表現をしているが，具体的な，「あまり」とする理由は，前者の包含除であれば，「もうｎ個入りの箱はできないから」，「ｎ枚の束はできないから」，などとなり，後者の等分除であれば，「もうｎ人には等しく配れないから」，「ｎ皿には配りきれないから」あまりとする，という表現に例えばなる．

このような言葉の表現を，その都度にある問題状況に対してこだわりを持って伝えていくことから，以降の第５節で示す，包含除においてよくある応用問題について，児童の疑問や不明瞭であろう点について，意識して対応できる手立てや表現をより工夫できるのではないかと考える．

４．あまりの表現の補足と注意について

前節においては，わり算のあまりについて，そのわり算が等分除か包含除かにより，その異なる意味を言葉にあえてすることについて考えたが，「なぜ，あまりとするのか？」という問いには，実際には，言葉として自然に答えにくいところがあるといえる．何度も繰り返したり，おこなっているわり算が，等分除か包含除か，ということを意識して表現を変える，ということを児童も理解してくると，おこないやすくなる手立が工夫できるといえる．

そこで，より自然な形で，その表現の区別につながる補足としては，以下の問いが考えられる．例えば，「７÷３＝２あまり１」という場合には，次の投げかけとしての問の段階が考えられる．

問「なぜ１つあまりとするか」→「１つなかったら，どうか」⇒「あと２つあれば，どうか」

すると，その答えとして以下の違いは，自ずとも言葉にし易くなるであろう．

等分除：答「ちょうど（等しく）配ることができる．」⇒「もう一つずつ配れる」

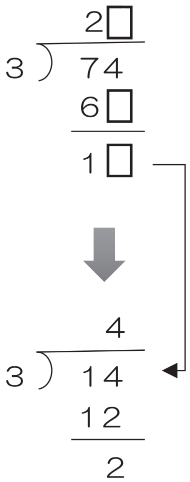
包含除：答「ちょうど括る（まとめる）ことができる」⇒「もう一括りできる」

これらの言葉は，その問題に合わせて表現することになるが，上記の最後の問の「あと２つ」というのは，わる数，すなわち包含除の場合は，一あたり量，等分除の場合は，いくつ分に対して，あといくつであるかを求補（求部分）として意識して，「３－１」より定められることを理解する段取りが前置きとしてあるとよいであろう．

次に，４年生における商が２桁や３桁になる場合の「あまりのあるわり算」について，その筆算の過程においても，その意味の表現にこだわった場合に，注意したい事項について述べる．

例として,「７４÷３＝２４あまり２」という計算の場合に, 具体的なものの扱いに即しながら, 筆算の過程に沿って，等分除と包含除においてそれぞれ意味を確認することにする．

等分除：７４÷３



筆算の左記の段階は，まず「７÷３」の計算をすることより，結束している１０の束を３等分して，２束あまり１となることを意味している．

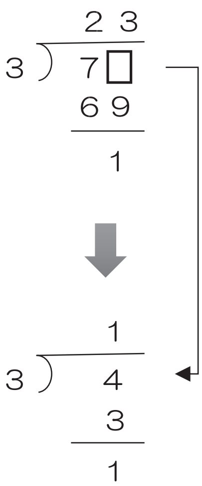
ゆえに計算の意味としては，７０÷３＝２０あまり１０　となり，左記の上の筆算の□には，その意味としては，空位０を想定しておき，計算をしている．

そして次の筆算に示すように，
（１０＋４）÷３＝４あまり２　となる．ここでは意味としては，１０の束の結束を解くことにより，１４を３等分している．

すなわち答えは　（２０＋４）あまり２　となる．

実際の筆算では，この上下を組み合わせて一度におこなう．

包含除：７４÷３



包含除において,「７１÷３」をするとき,「７÷３」の計算をすることより，商の１０の位「２」を立てる段階は，その意味に即して筆算の過程を考えた場合，本来，７０÷３＝２０（あまり１０）を意味するが，この段階で既に，被除数の１０の束は分解され，３ずつの括りを２０括り作って（１０あまる）状況に相当する．ゆえに，被除数は既に結束を解いていることから,「あまり１０」という状況は，除数が３の場合の包含除としては,「わる数＞あまり」に反しており，包含除の意味としては，被除数の１の位を□として，仮に空位０と考えた場合でも,「７０÷３＝２３あまり１」という計算までおこなうことが，本来的な考え方としては自然となる．

そして，被除数の１の位の数４をさらに３で割り，その商と余りを合わせることで，すなわち

答えは　（２３＋１）あまり（１＋１）　となる．

実際の筆算では，一般にはこのような方法ではなく，上記の等分除と同様な過程による方法でおこなう．

上記では，特に包含除において，その意味にこだわった筆算の過程を示したが，一般に感じら

れる通り，この方法を実際に薦めるわけではない．ただ，筆算の便利な方法は，わり算の意味に即して考えた場合，被除数の１０の束（あるいは，１００の束）を結束した状態のまま等分するという過程を示していることより，その筆算の意味を伝える際には，この場合においては等分除により導入する方が自然であることが確認できる．すなわち，等分除の場合には１０以上の位の数を結束した状態で等分して，その位における「あまり」を求めてから，次にそれを分解して，以下の位と合わせて，また等分するという過程をうまく表現できる．

対して，包含除の場合には，上記の例のように，上位の位において計算をする段階で，すでに位の結束を分解して，わる数ずつの括りを作る過程がある．このような場合に，筆算の途中段階において，「わる数＞あまり」に反する計算となり，結束性が保証されていないことを意識すると，「もうこの段階では，割り進まない」のではなくて，「ひとまず１０の位の数までを包含している」段階であるという解釈を教える側はしておく必要がある．具体的に，上記の「７４÷３」で考えると，包含除の文章問題からである場合は，「７÷３＝２あまり１」とする理由は，「１０の束７つ分を，３つずつ括る」包含ではなくて，「１０の束７つ分を，３つずつ括ると，ひとまずは，２０の括りができる」という状況が本来である．しかし，筆算の過程の理由として，前者のように意味を述べてしまう場合があると察せられるが，それを，１０（以上の）位では３束ずつに括り，１の位では３つずつ括りにすると解すると，等分除と包含除が入り混じっているような説明となり，児童は考えるほどに分からなくなる可能性がある．もし，前者の表現を，根拠を持ってもちいるなら，「３束ずつに分けられる」ことが，「３つずつの括りで分けられる」ことになることを，（さらには，被除数と商のそれぞれの位の数に対応させて）理解する段階が設けられとよい．例えばそれを，「６０÷３」の場合について具体的なものにより表現すると，以下の図１のようになる．

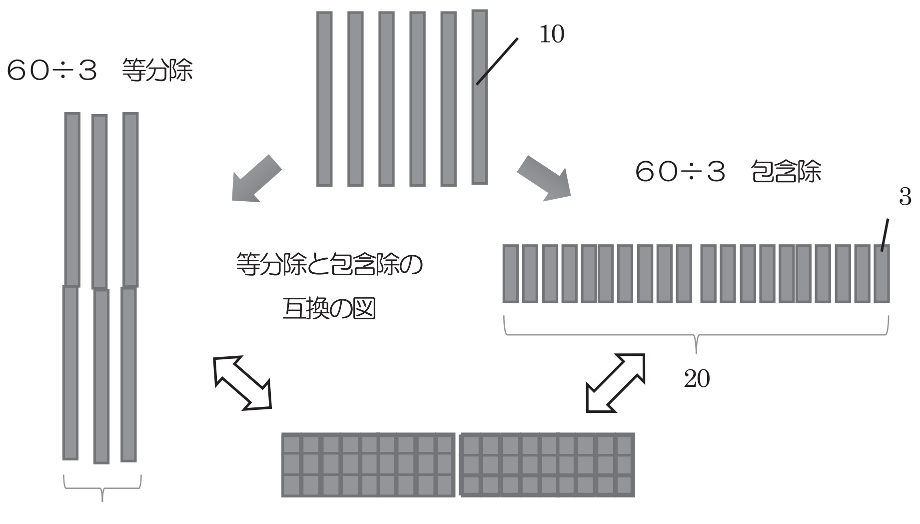


図1

5．あまりのあるわり算における活用問題について

あまりのあるわり算において，その通常の問題に続けて，では「全部を，何回で運べるか」や，「全部入れるには，何箱いるか」など，わり算の余りがあることから，答えが『商プラス１』となる文章問題が，現行の教科書においても扱われている．

このように，応用された問題に対しては，児童が必ずといっていい程つまずく場合が出てくる．ここでは，あまりのあるわり算の考え方を活用して，「全部入れるためには何箱必要か」を問われているのか，「ｎこ入りの箱は，何箱できるか」を問われているのかを判断して処理する必要がある．このような問題に対しては，出題をする側は，次の点を意識して臨むべきであると考える．

包含除の問題として考える際には（あるいは等分除でも同様の考えのもと），わる数である単位当たりの大きさ（１あたり量）は常に一定に設定されており，それを途中で変更させることはできないというわり算のルールがある．ゆえに，「あまり」も一意的に求まることになる．実際の日常における場面では，その場合や都合により，いろいろな融通を効かせるであろうが，（そのためにも，）算数の計算としては，ルールのもとに一意的に商と余りを求め，その上で，「商プラス１」を答えとする，いわば「商と答えが異なる」問題となる．より具体的には，何個入りかの箱に，ボールや菓子などを詰めていく問題の場合，完成品（指定された単位あたりの量を満たす箱）が何箱できるかと，全部を収めるために必要となる最小限の箱の数を求める場合とを判別して，その商から答えを求める必要がある．

この際に，児童が戸惑ったり，こだわりを持つことも，ある意味で自然といえるのは，日常では融通を効かせることが，よくあるからという理由だけではなく，設定される箱とは，単に包含して全部を運んだり保管するために使われるのではなく，算数科では１あたり量を一定にして，いわば完成品がいくつできるのか，というルールのもと利用することで，かけ算の逆算として，商が一意的に求まり，そして単元の大前提である「あまり」も，（ない場合も含め）一意に存在して，求めることができるわけである．この段階まで，いわば決して未完成状態とはしないルールを遵守させてきているのである．それを，応用する問題となり，とりあえず入れておく箱に，いわば，転じていることになる．ボールを単位当たりずつ運ぶ場合も，同様にルールの改変がいわばある．

このつじつまを合わせるには，出題する側は，「あまりも箱に入れて，もっとも少ない箱の数にするには」とか，「全部を，最小の回数で運ぶには」など，単位当たりを満たさない包含の状態が許されれば，実は，さまざまな包含のあり方があることを意識して，その中での「最小限」を求める方法として，「あまりのわるわり算」を活用していることが説明されるよう工夫すべきと考える．

6．整数の問題において

第２節において，言葉のヒントを考えたことと同様なことが，次の整数の問題に考えられる．

<u>その０</u>：８でわっても，１２でわっても，９でわっても，いずれも２あまる２桁の数とは？

この場合は，８と１２と９の公倍数（最小公倍数は７２）プラス２，すなわち７４とわかる．

<u>その１</u>：８でわると６あまり，１２でわると１０あまり，９でわると７あまる２桁の数とは？

という問題の場合，先の問題より正解に辿り着きにくい．ゆえに，次のヒントが考えられる．

「あといくつかあれば，いずれでも割り切れるか」⇒「あと２つあれば」

すると，その答えの数は，あと２つあれば，８でも１２でも９でもわりきれることが分かり，（８と１２と９の公倍数マイナス２）すなわち７０とわかる（３桁は，１４２，２１４…となる）．

補足として，この３桁を求めるのも意味がある．（例えば，最も大きい３桁の数とは？など．）

その２：いくつかキャラメルがある．仲良く，８人でわけるには４つ足りなく，６人で分けるには２つ足りなく，５人で分けるには１つ足りない．さて，キャラメルはいくつあるのか？

この問題の場合は，その１のテクニックと同様に，いくつか補って等しく分けることを考えると，その個数がそれぞれで，すぐ定まらないことになる．今度は，次の考え方がヒントとなる．

「いくつか除けば，いずれの場合でも割り切れる」⇒「４個減らせば」

その答えの数は，４つ除けば，８でも６でも５でも等しく分けられることが分かり，（８と６と５の公倍数プラス４）すなわち１２４，２４４，３６４…となる．

補足として，「キャラメルは３００個以上，４００個以下である」など，条件をつけた問題にしてもよい．これらの補足を設ける意味は，解を一意にすることではなく，公倍数を求めてから，先のプラスやマイナスをおこなう必要があることについての理解を確かにするためである．

７．あまりをさらにわり進んだ表現として

わり算において「あまり」をさらにわり進み，もう「あまり」とせずに，特に，分数という表現で商を表していく場合に（小数も同様の側面がある），等分除と包含除のそれぞれのアプローチで，違う分数の見方・側面が表れてくる．このことについての表現として，拙著「数理的作問の協同性について」から，図を引用して活用することで，以下に示す（図２）．

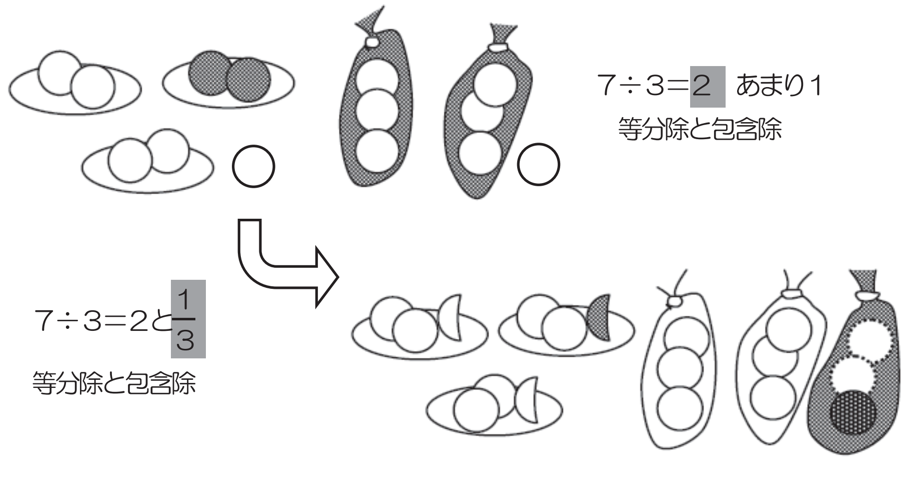


図２（「数理的作問の協同性ついて」より）

分数については観点により，「分割分数」（もとの大きさを等分したいくつ分），「量分数」（実際

の量の大きさを表す)，「割合分数」(ある量に対して何倍かを表す)，「商分数」(わり算の商を表す) などの大まかな分類がなされる場合がある．前回の改訂により，低学年に導入された分数は，主には分割分数に相当しているが，この段階では，具体的な，折り紙やリボンに相当するものをもちい，算数的な活動とともに基本的な分数の表現の理解が図られるため，量を表している分数ともいえる．また，普遍的な量の単位については一般に示されないため，全体に対する割合を表していることにもなる．ゆえに，「全体か変われば，同じ２分の１でもその大きさが異なる」ことなどが指摘されている．このように，量も割合も表している面があり，それにより分数の持つ両面を萌芽している段階といえる．そして，商分数においては，量や割合の意味を備えている分数の表現が，数としてわり算の商に相当しており，第一義として，単位分数のいくつ分として，量の分数として解釈でき，また割合を示す分数も包摂する形で，第二義としての商分数の形があるため，この量と割合の見方をさらに統合して，わり算の商の表現として位置づけられている (図３).

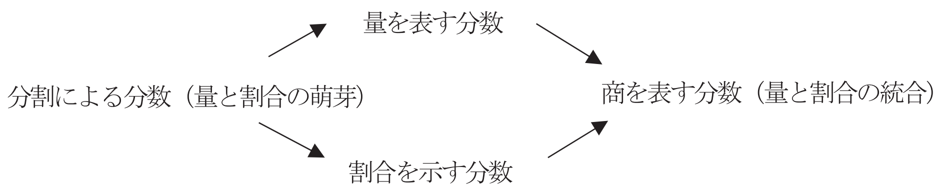


図3

この間の段階，すなわち「量」と「割合」の表現は，あまりのあるわり算の「あまり」を，その後において，改めて全体の文脈の中で，どのように位置付けるかに関わっている (図２を参照).

等分除の場合は，等しく分配するという基本的なルールにより，これまで単位としてきた数量を分割することで，あらたな数の表現 (小数・分数) をもちいて，実際に分配される量を表現するアプローチとなる．一方，包含除の場合は，単位とする数のまとまりを一定とする基本的なルールにより，その単位となる量に対し，どれだけの割合を占めているかを，あらたな数の表現 (小数・分数) をもちいて表現するアプローチとなる．前者の等分除では，これまで単位としていた量を細かく分割するという，いわば概念の突破があるが，そのように「わられた数」(商) は，等分された状態における，全部をあらためて表現する量となり，いわば，「単位当たりに外延する量」となる．そして，後者の包含除では，まさに先述の活用問題にもあるように，あまりをさらに包含するという概念の進展があるが，全体の量やあまりの量は，その単位当たりの大きさに比べて，どれだけを占めるのかを表現する量となり，いわば「単位当たりに内包する量」となっている.

文献

宇野民幸 (2010)「数理的作問の協同性について　On a Cooperative Approach for Mathematical Learning」．教養と教育，第 10 号，30－37.