イプシロン　2016. Vol.58, 77 － 87

# 超幾何微分方程式の局所解の Euler 型積分表示

愛知教育大学　数学専攻　安　達　駿　弥

## 1　はじめに

本論文では, 超幾何微分方程式の確定特異点における局所解の Euler 型積分表示を与える. 超幾何微分方程式の原点近傍における局所解の一つである超幾何級数の Euler 型積分表示を紹介したあとに, その積分表示に帰着させる形で他の局所解の積分表示を導出する.

本論文の主定理は [原岡] の §1.3 の命題 1.3.2 や [高野] の §12 において取り上げられている重要な命題の一つである. [高野] においては証明の一部が記載されており, 残りは読者に任されている. また, [高野] の手法による完全な解答を筆者は見たことがなかったので, 本論文で完全な解答を与えた.

## 2　準備

以下, 変数は全て複素数として考える. まずは必要な定義と命題を証明なしで与える.

**定義 1.** 次の冪級数 $F(\alpha,\beta,\gamma;x)$ を超幾何級数という.

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,n)(\beta,n)}{(\gamma,n)(1,n)}x^n. \tag{2.1}$$

ただし $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ はパラメータで $x\in\mathbb{C}$ は変数である. ここで記号 $(\alpha,n)$ は

$$(\alpha,n)=\begin{cases}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1) & (n\geq 1)\\ 1 & (n=0)\end{cases} \tag{2.2}$$

で定義する. また級数を定義するために $\gamma\notin\mathbb{Z}_{\leq 0}$ を仮定する.

**命題 1.** 超幾何級数 (2.1) は次の微分方程式を満たす:

$$x(1-x)y''+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}y'-\alpha\beta y=0 \tag{2.3}$$

この微分方程式 (2.3) を超幾何微分方程式という.

超幾何微分方程式 (2.3) はリーマン球面 $\mathbb{P}^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 上の $x=0,1,\infty$ に確定特異点を持つ微分方程式である. 斉次線形常微分方程式の確定特異点に対しては, その近傍で収束する局所解を構成することができる. 超幾何微分方程式の確定特異点周りの局所解は次で与えられる.

**命題 2.** $\gamma, \alpha+\beta-\gamma, \alpha-\beta \notin \mathbb{Z}$ を仮定する．このとき超幾何微分方程式 (2.3) は, 確定特異点 $x = 0, 1, \infty$ の近傍において一次独立な局所解の組 $\{y_1(x), y_2(x)\}, \{y_3(x), y_4(x)\}, \{y_5(x), y_6(x)\}$ を持ち，これらはそれぞれ $0 < |x| < 1, 0 < |1-x| < 1, |x| > 1$ で収束する．ここで

$$y_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x), \tag{2.4}$$

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; x), \tag{2.5}$$

$$y_3(x) = F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-x), \tag{2.6}$$

$$y_4(x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\beta, \gamma-\alpha, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-x), \tag{2.7}$$

$$y_5(x) = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; 1/x), \tag{2.8}$$

$$y_6(x) = x^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1; 1/x) \tag{2.9}$$

である．解の組は各特異点近傍における解空間の基底をなし, 基本解と呼ばれる．

超幾何級数 (2.1) は $|x| < 1$ で収束するが, $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ まで解析接続可能である．超幾何級数を解析接続して得られる関数を超幾何関数という．

**命題 3.** $|x| < 1$ において次が成り立つ:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta} dt. \tag{2.10}$$

ここで $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数である．右辺の積分の収束のために

$$\mathrm{Re}(\alpha) > 0, \quad \mathrm{Re}(\gamma-\alpha) > 0 \tag{2.11}$$

を仮定する．また積分の中に現れる冪関数の分枝は, $t \in (0,1), |x| < 1$ において

$$\arg t = 0, \quad \arg(1-t) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(1-xt) < \frac{\pi}{2} \tag{2.12}$$

とすることで定める．(2.10) を超幾何関数の **Euler** 型積分表示という．

## 3 主定理

以上の準備の下で, 超幾何微分方程式 (2.3) の局所解の Euler 型積分表示を与える．

**定理 1.** $p, q \in \{0, 1, 1/x, \infty\}$ に対して，積分

$$f_{pq}(x) = \int_p^q t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta} dt \tag{3.1}$$

は超幾何微分方程式 (2.3) の基本解に定数倍を除いて一致する．また, 積分の収束のために

$$0 < \mathrm{Re}(\alpha) < \mathrm{Re}(\gamma) < \mathrm{Re}(\beta) + 1 < 2$$

を仮定する．

$f_{pq}$ の積分の値を確定するには, $p, q$ を結ぶ積分路とその上での被積分関数

$$t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}$$

の値を確定しておく必要がある. $1/x$ は積分にとっては定数なので, 今回は $0 < \arg(1/x) < \pi$ となるように大体の位置を決めておいた上で積分路を図 1 のようにとる.

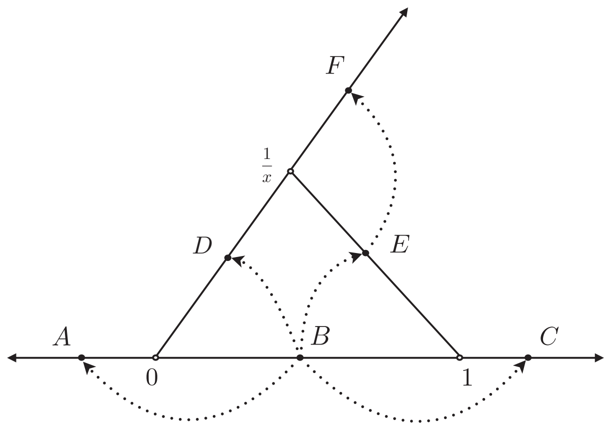


図 1: 積分路と分枝の決め方

被積分関数の積分路上における分枝を定めるためには, 積分路上のある一点における冪関数の偏角を指定すればよい. 線分 $\overline{01}$ 上の点 $B$ における冪関数の分枝を $|x| < 1$ において

$$\arg t = 0, \quad \arg(1-t) = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \arg(1-xt) < \frac{\pi}{2}$$

で決めることにする. そして他の点 $A, C, ..., F$ については, 点 $B$ における偏角を図 1 の点線に沿ってそれぞれ移動したものを採用する. このようにして各積分路上において被積分関数の分枝が決まり, 各 $p, q$ に対して $f_{pq}$ の値が定まる.

またこのとき $0 < \arg(1/x) < \pi$ より, 任意の実数 $\lambda$ と任意の正数 $\mu$ に対して

$$0 < \arg(\lambda - \mu x) < \pi, \quad -\pi < \arg(\mu x - \lambda) < 0$$

と決めることにする. こうすれば $\arg(\lambda - \mu x) - \arg(\mu x - \lambda) = \pi$ となることに注意する.

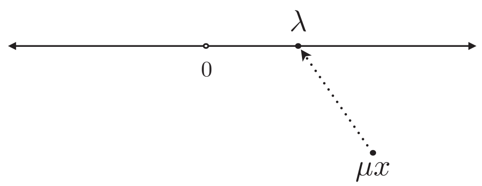


図 2: $\arg(\lambda - \mu x)$

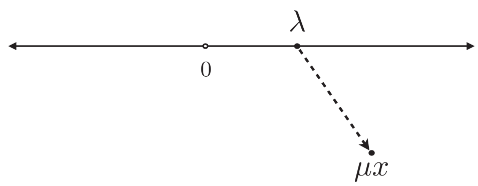


図 3: $\arg(\mu x - \lambda)$

# 4 定理1の証明

$p, q$ の選び方は6通りであり, $p=0, q=1$ とした場合である $f_{01}$ については命題3より直ちに従う. 他の $p, q$ に対しては, 積分の端点を $\{p, q\}$ から $\{0, 1\}$ に移すような一次分数変換を用いて命題3に帰着させる形で証明する.

## 4.1 $p=0, q=\dfrac{1}{x}$ のとき

$$f_{0\frac{1}{x}}(x)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}y_5(x)$$

を示す. 考える積分は

$$f_{0\frac{1}{x}}(x)=\int_0^{\frac{1}{x}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \tag{4.1}$$

である. 積分変数 $t$ が積分路 $\overline{0\frac{1}{x}}$ を動くときの冪関数の偏角を考えると,

$$\arg t=\arg\frac{1}{x}=-\arg x, \tag{4.2a}$$

$$\arg\left(1-\frac{1}{x}\right)<\arg(1-t)<0, \tag{4.2b}$$

$$\arg(1-xt)=\arg x+\arg\left(\frac{1}{x}-t\right)=\arg x+\arg\frac{1}{x}=0 \tag{4.2c}$$

であることがわかる. 次に積分の端点を $\{0, 1\}$ に移すため, 積分変数に変換 $s=xt$ を施すと

$$t=\frac{s}{x},\quad 1-t=1-\frac{s}{x},\quad 1-xt=1-s,\quad dt=\frac{ds}{x}ds \tag{4.3}$$

となる. これらを (4.1) に代入するためには, $s$-平面におけるそれぞれの偏角を知る必要があり, その偏角は (4.2a)-(4.2c) で決めたものと辻褄が合うように決めなければならない.

まず $\arg t=\arg s-\arg x$ であるので, (4.2a) より $\arg s=0$ がわかる. 次に

$$\arg(1-t)=\arg\left(1-\frac{s}{x}\right)$$

であるので, (4.2b) より

$$\arg\left(1-\frac{1}{x}\right)<\arg\left(1-\frac{s}{x}\right)<0.$$

最後に (4.2c) からは $\arg(1-s)=0$ がわかる.

以上により偏角が確定したので, (4.3) のそれぞれを (4.1) に代入する.

$$\begin{aligned}
f_{0\frac{1}{x}}(x)&=\int_0^{\frac{1}{x}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt\\
&=\int_0^1\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}(1-s)^{-\beta}x^{-1}ds\\
&=x^{-\alpha}\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{-\beta}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}ds.
\end{aligned}$$

右辺の積分は命題 3 におけるパラメータを $(\alpha, \beta, \gamma, x)$ から $(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, 1/x)$ に置き換えたものである．よって

$$\begin{aligned} f_{0\frac{1}{x}}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; 1/x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)} y_5(x) \end{aligned}$$

である．最後の等号は (2.8) を用いた．

## 4.2　$p=\infty, q=0$ のとき

$$f_{\infty 0}(x) = e^{\pi i(1-\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)} y_3(x)$$

を示す．考える積分は

$$f_{\infty 0}(x) = \int_\infty^0 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta} dt \tag{4.4}$$

である．積分変数 $t$ が積分路 $\overline{\infty 0}$ を動くときの冪関数の偏角を考えると，

$$\arg t = -\pi, \tag{4.5a}$$
$$\arg(1-t) = 0, \tag{4.5b}$$
$$\arg x < \arg(1-xt) < 0 \tag{4.5c}$$

であることがわかる．ただし (4.5c) については

$$0 < \arg\left(\frac{1}{x} - t\right) < \arg \frac{1}{x}$$

であることから従う．次に積分の端点を $\{0, 1\}$ に移すため，積分変数に変換

$$s = \frac{t}{t-1}$$

を施すと

$$t = \frac{s}{s-1}, \quad 1-t = \frac{1}{1-s}, \quad 1-xt = \frac{1-(1-x)s}{1-s}, \quad dt = -\frac{1}{(1-s)^2} ds \tag{4.6}$$

となる．これらの $s$-平面における偏角を決めよう．まず $\arg s = 0$ と決めてやると，(4.5a) より

$$-\pi = \arg t = \arg s - \arg(s-1) = -\arg(s-1)$$

なので $\arg(s-1) = \pi$ となる．また (4.5b) より $\arg(1-s) = 0$ が従い，最後に (4.5c) より

$$\arg x < \arg(1-(1-x)s) < 0.$$

以上により偏角が確定したので, (4.6) のそれぞれを (4.4) に代入する.

$$\begin{aligned} f_{\infty 0}(x) &= \int_{\infty}^{0} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \\ &= \int_{1}^{0} \left(\frac{s}{s-1}\right)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{1-s}\right)^{\gamma-\alpha-1} \left(\frac{1-(1-x)\,s}{1-s}\right)^{-\beta} (-1)\,(1-s)^{-2}\,ds \\ &= \int_{0}^{1} s^{\alpha-1}\,(s-1)^{1-\alpha}\,(1-s)^{-\gamma+\alpha+1+\beta-2}\,(1-(1-x)\,s)^{-\beta}\,ds. \end{aligned}$$

いま, $\arg(s-1)=\pi, \arg(1-s)=0$ より $\arg(s-1)=\arg(1-s)+\pi$ なので

$$\begin{aligned} (s-1)^{1-\alpha} &= e^{(1-\alpha)\log(s-1)} = e^{(1-\alpha)\{\log|s-1|+i\arg(s-1)\}} \\ &= e^{(1-\alpha)\{\log|1-s|+i(\arg(1-s)+\pi)\}} = e^{\pi i(1-\alpha)}e^{(1-\alpha)\{\log|1-s|+i\arg(1-s)\}} \\ &= e^{\pi i(1-\alpha)}(1-s)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

である. 従って

$$f_{\infty 0}(x) = e^{\pi i(1-\alpha)} \int_{0}^{1} s^{\alpha-1}\,(1-s)^{\beta-\gamma}\,(1-(1-x)\,s)^{-\beta}\,ds.$$

右辺の積分は命題3におけるパラメータを $(\alpha,\beta,\gamma,x)$ から $(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)$ に置き換えたものである. よって

$$\begin{aligned} f_{\infty 0}(x) &= e^{\pi i(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1;1-x) \\ &= e^{\pi i(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}y_3(x) \end{aligned}$$

である. 最後の等号は (2.6) を用いた.

### 4.3 $p=1, q=\dfrac{1}{x}$ のとき

$$f_{1\frac{1}{x}}(x) = e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}y_4(x)$$

を示す. 考える積分は

$$f_{1\frac{1}{x}}(x) = \int_{1}^{\frac{1}{x}} t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \tag{4.7}$$

である. 積分変数 $t$ が積分路 $\overline{1\frac{1}{x}}$ を動くときの冪関数の偏角を考えると,

$$0 < \arg t < \arg\frac{1}{x}, \tag{4.8a}$$

$$\arg(1-t) = \arg\left(1-\frac{1}{x}\right) = \arg(x-1)-\arg x, \tag{4.8b}$$

$$\arg(1-xt) = \arg x + \arg\left(\frac{1}{x}-t\right) = \arg x + \arg\left(\frac{1}{x}-1\right) = \arg(1-x) \tag{4.8c}$$

であることがわかる. 次に積分の端点を $\{0,1\}$ に移すため, 積分変数に変換

$$s=\frac{1-xt}{1-x}$$

を施すと

$$t=\frac{1-(1-x)s}{x},\quad 1-t=\frac{(1-x)(s-1)}{x},\quad 1-xt=(1-x)s,\quad dt=\frac{-(1-x)}{x}ds \tag{4.9}$$

となる. これらの $s$-平面における偏角を決めよう. 今回は $\arg(1-s)=0$ と決めておく. まず (4.8a) より $\arg x<\arg(1-(1-x)s)<0$ であることがわかる. 次に (4.8b) より

$$\arg(x-1)-\arg x=\arg(1-t)=\arg(1-x)+\arg(s-1)-\arg x$$

であるので右辺と左辺を見比べると

$$\arg(s-1)=\arg(x-1)-\arg(1-x)=-\pi$$

がわかる. 最後に (4.8c) より

$$\arg(1-x)=\arg(1-xt)=\arg(1-x)+\arg s$$

であることから, $\arg s=0$ がわかる.

以上により偏角が確定したので, (4.9) のそれぞれを (4.7) に代入する.

$$\begin{aligned}
f_{1\frac{1}{x}}(x)&=\int_1^{\frac{1}{x}}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt\\
&=\int_1^0\left(\frac{1-(1-x)\,s}{x}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{(1-x)\,(s-1)}{x}\right)^{\gamma-\alpha-1}((1-x)\,s)^{-\beta}\,(-1)\,(1-x)\,x^{-1}ds\\
&=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,x^{1-\gamma}\int_0^1 s^{-\beta}\,(s-1)^{\gamma-\alpha-1}\,(1-(1-x)\,s)^{\alpha-1}\,ds.
\end{aligned}$$

いま, $\arg(s-1)=\arg(1-s)-\pi$ なので, 先ほどと同様にして

$$(s-1)^{\gamma-\alpha-1}=e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}$$

がわかる. 従って

$$f_{1\frac{1}{x}}(x)=e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,x^{1-\gamma}\int_0^1 s^{-\beta}\,(1-s)^{\gamma-\alpha-1}\,(1-(1-x)\,s)^{\alpha-1}\,ds.$$

右辺の積分は命題3におけるパラメータを $(\alpha,\beta,\gamma,x)$ から $(1-\beta,1-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)$ に置き換えたものである. よって

$$\begin{aligned}
f_{1\frac{1}{x}}(x)&=e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,x^{1-\gamma}F(1-\beta,1-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)\\
&=e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,x^{1-\gamma}F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-x).
\end{aligned}$$

ここで Kummer の変換公式 ([犬井], §23) より

$$x^{1-\gamma}F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1;1-x)=F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1;1-x)$$

であるので, 結局

$$\begin{aligned} f_{1\frac{1}{x}}(x) &= e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\gamma-\alpha,\gamma-\alpha-\beta+1;1-x) \\ &= e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}y_4(x) \end{aligned}$$

である. 最後の等号は (2.7) を用いた.

## 4.4 $p=1, q=\infty$ のとき

$$f_{1\infty}(x)=e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}y_6(x)$$

を示す. 考える積分は

$$f_{1\infty}(x)=\int_1^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \tag{4.10}$$

である. 積分変数 $t$ が積分路 $\overline{1\infty}$ を動くときの冪関数の偏角を考えると,

$$\arg t = 0, \tag{4.11a}$$

$$\arg(1-t)=\pi, \tag{4.11b}$$

$$\arg(1-x)<\arg(1-xt)<\pi+\arg x \tag{4.11c}$$

であることがわかる. (4.11c) については

$$\arg\left(\frac{1}{x}-1\right)<\arg\left(\frac{1}{x}-t\right)<\pi$$

であることから従う. 次に積分の端点を $\{0,1\}$ に移すために積分変数に変換

$$s=\frac{1}{t}$$

を施すと

$$t=\frac{1}{s},\quad 1-t=\frac{s-1}{s},\quad 1-xt=\frac{s-x}{s},\quad dt=-\frac{1}{s^2}ds \tag{4.12}$$

となる. これらの $s$-平面における偏角を決めよう. 今回は $\arg(1-s)=0$ と決めておく. まず (4.11a) から $\arg s=0$ がわかる. 次に (4.11b) より

$$\pi=\arg(1-t)=\arg(s-1)-\arg s=\arg(s-1)$$

なので $\arg(s-1)=\pi$ が従う. 最後に (4.11c) からは $\arg(1-x)<\arg(s-x)<\pi+\arg x$ がわかる. また $\arg(s-x)=\arg(x-s)+\pi$ であることに注意する.

以上により偏角が確定したので, (4.15) を (4.10) に代入する.

$$
\begin{aligned}
f_{1\infty}(x) &= \int_1^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \\
&= \int_1^0 \left(\frac{1}{s}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(\frac{s-x}{s}\right)^{-\beta}(-1)\,s^{-2}ds \\
&= \int_0^1 s^{\beta-\gamma}\,(s-1)^{\gamma-\alpha-1}\,(s-x)^{-\beta}\,ds.
\end{aligned}
$$

$\arg(s-1) = \arg(1-s)+\pi$ と $\arg(s-x) = \arg(x-s)+\pi$ より

$$
(s-1)^{\gamma-\alpha-1} = e^{\pi i(\gamma-\alpha-1)}(1-s)^{\gamma-\alpha-1}, \quad (s-x)^{-\beta} = e^{\pi i(-\beta)}(x-s)^{-\beta}
$$

となることに注意すると

$$
\begin{aligned}
f_{1\infty}(x) &= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\int_0^1 s^{\beta-\gamma}\,(1-s)^{\gamma-\alpha-1}\,(x-s)^{-\beta}\,ds \\
&= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}x^{-\beta}\int_0^1 s^{\beta-\gamma}\,(1-s)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{-\beta}ds.
\end{aligned}
$$

右辺の積分は命題 3 におけるパラメータを $(\alpha,\beta,\gamma,x)$ から $(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1,1/x)$ に置き換えたものである. よって

$$
\begin{aligned}
f_{1\infty}(x) &= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{-\beta}F(\beta-\gamma+1,\beta,\beta-\alpha+1;1/x) \\
&= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}x^{-\beta}F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1;1/x) \\
&= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}y_6(x)
\end{aligned}
$$

である. 最後の等号は (2.9) を用いた.

### 4.5　$p = \dfrac{1}{x}, q = \infty$ のとき

$$
f_{\frac{1}{x}\infty}(x) = e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}y_2(x)
$$

を示す. 考える積分は

$$
f_{\frac{1}{x}\infty}(x) = \int_{\frac{1}{x}}^\infty t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt \tag{4.13}
$$

である. 積分変数 $t$ が積分路 $\overline{\frac{1}{x}\infty}$ を動くときの冪関数の偏角を考えると,

$$
\arg t = \arg\frac{1}{x} = -\arg x, \tag{4.14a}
$$

$$
\arg\left(-\frac{1}{x}\right) < \arg(1-t) < \arg\left(1-\frac{1}{x}\right), \tag{4.14b}
$$

$$
\arg(1-xt) = \arg x + \arg\left(\frac{1}{x}-t\right) = \arg x + \arg\frac{1}{x} + \pi = \pi \tag{4.14c}
$$

であることがわかる．次に積分の端点を $\{0,1\}$ に移すために積分変数に変換

$$s=\frac{1}{xt}$$

を施すと

$$t=\frac{1}{xs},\quad 1-t=\frac{xs-1}{xs},\quad 1-xt=\frac{s-1}{s},\quad dt=-\frac{1}{xs^2}ds \tag{4.15}$$

これらの $s$-平面における偏角を決めよう．$\arg(1-s)=0$ と決めておく．まず (4.14a) より

$$-\arg x=\arg t=-(\arg x+\arg s)$$

なので $\arg s=0$ がわかる．次に (4.14b) より

$$\arg\left(-\frac{1}{x}\right)<\arg\left(\frac{xs-1}{xs}\right)<\arg\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

であるので, $\arg s=0$ と合わせると

$$\arg(-1)<\arg(xs-1)<\arg(x-1)$$

がわかる．最後に (4.14c) より

$$\pi=\arg(1-xt)=\arg\frac{s-1}{s}=\arg(s-1)-\arg s=\arg(s-1)$$

なので $\arg(s-1)=\pi$ がわかる．

以上により偏角が確定したので, (4.15) を (4.13) に代入する．

$$\begin{aligned}
f_{\frac{1}{x}\infty}(x)&=\int_{\frac{1}{x}}^{\infty}t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-xt)^{-\beta}dt\\
&=\int_1^0\left(\frac{1}{xs}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{xs-1}{xs}\right)^{\gamma-\alpha-1}\left(\frac{s-1}{s}\right)^{-\beta}(-1)\,x^{-1}s^{-2}ds\\
&=x^{1-\gamma}\int_0^1 s^{\beta-\gamma}(s-1)^{-\beta}(xs-1)^{\gamma-\alpha-1}ds.
\end{aligned}$$

$\arg(s-1)=\arg(1-s)+\pi$ と $\arg(xs-1)=\arg(1-xs)-\pi$ より

$$(s-1)^{-\beta}=e^{\pi i(-\beta)}(1-s)^{-\beta},\quad (xs-1)^{\gamma-\alpha-1}=e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}(1-xs)^{\gamma-\alpha-1}$$

となることに注意すると

$$f_{\frac{1}{x}\infty}(x)=e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}x^{1-\gamma}\int_0^1 s^{\beta-\gamma}(1-s)^{-\beta}(1-xs)^{\gamma-\alpha-1}ds.$$

右辺の積分は命題 3 におけるパラメータを $(\alpha,\beta,\gamma,x)$ から $(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1,2-\gamma,x)$ に置き換えたものである．よって

$$\begin{aligned}
f_{\frac{1}{x}\infty}(x)&=e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma}F(\beta-\gamma+1,\alpha-\gamma+1,2-\gamma;x)\\
&=e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma;x)\\
&=e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}y_2(x)
\end{aligned}$$

である．最後の等号は (2.5) を用いた．

## 5 まとめ

ここまでの結果をまとめると次のようになる.

$$
\begin{aligned}
f_{01}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}y_1(x),\\
f_{\frac{1}{x}\infty}(x) &= e^{\pi i(\alpha-\beta-\gamma+1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(2-\gamma)}y_2(x),\\
f_{\infty 0}(x) &= e^{\pi i(1-\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma+1)}y_3(x),\\
f_{1\frac{1}{x}}(x) &= e^{\pi i(\alpha-\gamma+1)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta+1)}y_4(x),\\
f_{0\frac{1}{x}}(x) &= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\alpha-\beta+1)}y_5(x),\\
f_{1\infty}(x) &= e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta-1)}\frac{\Gamma(\beta-\gamma+1)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}y_6(x).
\end{aligned}
$$

これらの積分表示と Cauchy の積分定理を用いると, 超幾何微分方程式 (2.3) の異なる確定特異点における基本解の組同士の関係式を求める問題である接続問題が解決できる (結果については [西本] を参照).

## 参考文献

[犬井] 犬井鉄郎 『特殊函数』岩波書店, 1962.

[高野] 高野恭一 『常微分方程式』 朝倉書店, 1994.

[西本] 西本敏彦 『超幾何・合流型超幾何微分方程式』共立出版, 1998.

[原岡] 原岡喜重 『超幾何関数』 (すうがくの風景) 朝倉書店, 2002.