

表現研究の立場からみた「全体に対する部分の割合」の指導に関する一考察

愛知教育大学 山田 篤史

1. はじめに

平成28年度全国学力・学習状況調査の算数A[8]の問題(図1a)は、「全体の大きさに対する部分の大きさの割合」に関する理解を問う問題だが、問題文に大きさを表す具体的な数値が無いにもかかわらず(それ故、具体的な割合計算が要らないにもかかわらず)その概念の本質的な理解に迫ることができる、かなり工夫された問題になっている。

この問題の正答率は74.5%であり(文部科学省/国立教育政策研究所, 2016, p.55), 形式的には「課題がある」とは言えないようだが、望ましい結果とも言えないだろう、というのが率直な感想でもある。同種の問題として比較される平成22年度の算数A[9](1)の問題(図1b)の正答率が57.8%であったことを考えると、確かに正答率は高くなっているのだが、図1aの問題では百分率の意味理解やその計算が必要とされるわけではない。とすれば、やや特殊な問題ではあるが、誤答であった約25%の児童の割合に対する理解の実態が気になるところであろう。

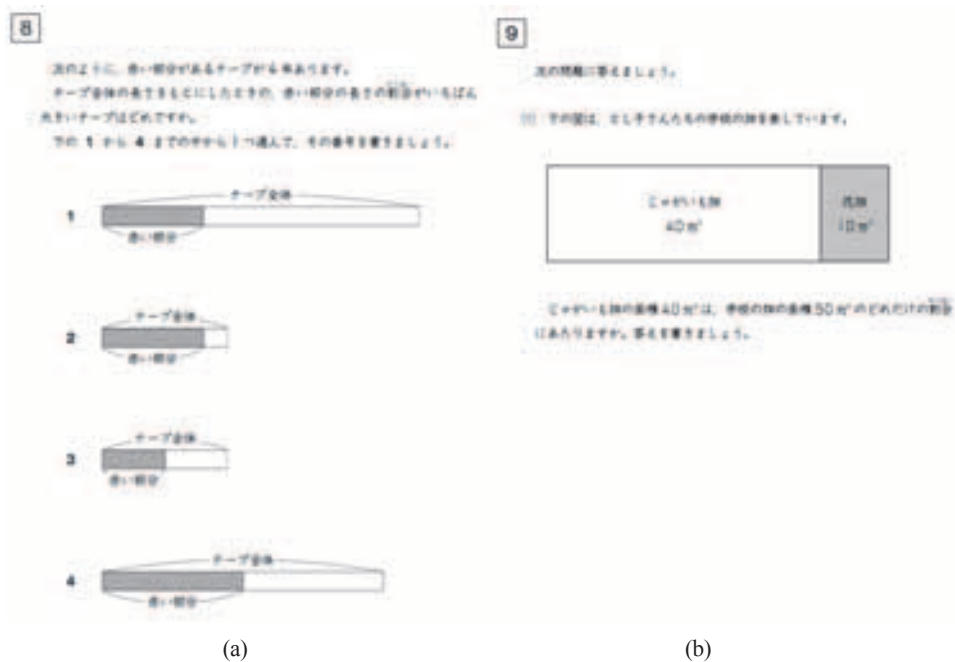


図1：全国学力・学習状況調査の算数A割合問題 (a: H28 算数A[8], b:H22 算数A[9] (1))

本稿では、上記のような問題意識を背景にし、本誌第 58 巻における筆者の前稿の議論(山田, 2016)に続き、数学教育における表現研究の立場から、図 1 のような「全体に対する部分の割合」の指導について、その問題の所在と具体的な指導の方向性を提案してみることにする。

2. 問題の所在

図 1a の問題で、最も多かった誤答は選択肢 4 で、その割合は 16.1%であった。この誤答の割合を反映してか、『平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校 算数』（以下、『報告書』と略記する）における「学習指導に当たって」の部分には、「量の大きさに着目して比べるだけでなく、割合に着目して比べることができるようにする」と、指導への示唆や具体的な指導場面が例示してある(文部科学省/国立教育政策研究所, 2016, p.56)。そこには、部分の大きさだけに着目した比較ではなく、全体への着目を促しつつも、例えば「部分は、全体の半分より多いか少ないか」で比べてみるような発問例も添えられている(図 2)、一般的な割合の計算(例えば、「比べる量÷もとにする量」)を必ずしも前提としない場合の細やかな指導事例も示されている[註 1]。

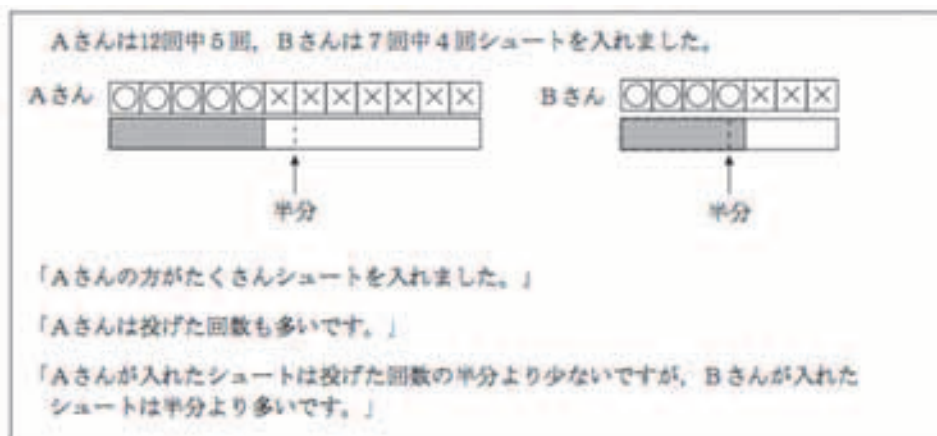


図 2：図 1a の問題に対する『報告書』の指導事例(文部科学省/国立教育政策研究所, 2016, p.56)

しかし、こうした丁寧な指導がスキップされた場合、児童はこれらのテープ図の意味を(つまり、下側のテープ図は、色付き部分に白色部分を加えた全体と色付き部分との乗法的関係を表す図であるということ)適切に解釈できるのだろうか。

というのも、標準的な教科書に沿った指導を行った場合、割合以前の指導でこの種の図が割合の意味を含んで「単独で」「頻繁に」使用されるかは疑問であるし、その意味では図 2 のような丁寧な指導の位置づけも不明であるので、図 1・2 のテープ図を「全体に対する部分の割合を表す図」として解釈することは、児童にとって案外難しいことなのかもしれない、と推測されるからである。さらに、図 1a の結果を見る限り、一定数の児童は、割合を正式に学習した後でも、これらのテープ図(で表された全体に対する部分の割合)を適切に解釈できておらず(当然ながら、

割合概念もそれが適用できる程には理解されておらず), 帯グラフの学習も, こうした図を解釈するには効いていない可能性があるのではないか, という疑問も残る。

こうした現状を山田(2016)で概観した「冰山モデル」(Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008)を背景にするような表現研究の立場からみれば, そもそも「比べる量÷もとにする量=割合」のような形式的な表現による定義(水面上に見えている氷山の頂上部)の理解を支える様々な表現, 特に「全体に対する部分の割合」という最も素朴な割合概念の理解を支える表現(水面下の氷塊の底の方にあるプリフォーマルな表現や児童のインフォーマルな表現)を, どのように指導に組み込んでおくかが重要な論点になるだろう。

そこで, 次節ではまず, 「全体に対する部分の割合」を表す図に関わる児童の(想定される)学習経験を概観し, そこに潜在する「全体に対する部分の割合」に関わる指導上の問題点を整理してみることにする。

3. 「全体に対する部分の乗法構造的関係」を表す図に対する児童の学習経験

そもそも, 図2のようなテープ図(□と×からなる棒グラフに類する図の下のテープ図)が, 割合の学習以前で, 「全体に対する部分の乗法構造的関係」を表すような図として, しかも単独で使われる場面はあるのだろうか。

教科書を概観する限り, 表面的に類似しているこの種のテープ図が「単独で」使われるのは加法構造における問題場面であり, 例えば図3のような問題文中の数量の加法的な部分-全体関係を表す使われ方が一般的であろう。もちろん, 乗法構造の問題場面(例えば, かけ算・割り算場面, 何倍かを考える場面)でも, 図3に似たテープ図は使われるが, そこでは, 複数のテープ図が示されていて「一方が他方の何倍か」を2つのテープ図の間で問う図になっていたり(例えば, 図4), (どこを1と見るかを明示する)割合に対応する数直線が付随していたりするなど(例えば, 図5), 「割合」を表す部分はテープ図の外に積極的に外部化されるのが通常であろう。



図3：加法構造の問題場面でのテープ図(清水他, 2015a, p.55)

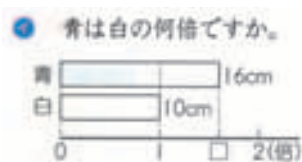


図4：「小数倍」の問題場面でのテープ図
(清水他, 2015c, p.53)



図5：「×小数」の問題場面でのテープ図
(清水他, 2015d, p.39)

また、分数の学習でも、計算指導では割合分数・分割分数より量分数の意味で指導を行っていくのが通常であることを考えれば、「全体量」（分数の場合は「単位量」や「1」と言った方がよいのだろうか）が揃っていない状況で分数を表すテープ図を使うことなどは（例えば、図2の2つのテープ図に類する図同士を比較することなどは）、あまり考えられないことになる。図1aに登場するような図は、2年生の分割分数の単元で使われる図（例えば、図6）との親和性が高いのだろうが、計算指導が始まってからは、量分数との混同が懸念されるため、こうした図の使用は避けられる傾向になるはずだ。また、図2に登場する上側の□と×の棒グラフで使用されるような図は割合分数同士の比較を説明する図になっているのだが、5年生の「分数倍（倍を表す分数）」の単元でもこの種の図（の解釈の学習場面）が頻出するかは疑わしいところである（多くの教科書では、「分数倍」の単元では「小数倍」と同じ文脈で図4のような図が用いられるはずだ）。

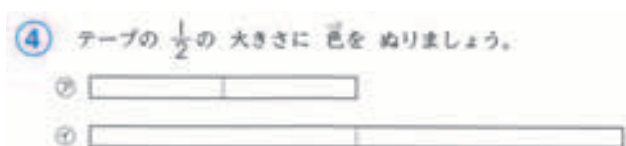


図6：単位量が異なる場合での分割分数としての「 $1/2$ 」を示す図(清水他, 2015b, p.102)

このように見てみると、少なくとも割合の正式な学習以前では、図1aや図2のような「単独のテープ図」から「全体に対する部分の割合」を考えるという問題場面は、児童にとって案外特殊なこと（少なくとも、かなり昔に学習したこと）かもしれないということが分かるだろう。

さらに、割合の正式な学習（特に帯グラフの学習）以後を考えてみると、図1aや図2のような「全体に対する部分の割合」を示す図としては、帯グラフが正にその図に相当するだろう。しかし、冰山モデルで考える限り、帯グラフのような典型的なプリフォーマルな表現の理解には、それを下支えするインフォーマルな表現を基盤にした活動・理解が必要と考えられ、結局の所、割合の正式な学習以前に関わる上記の議論に逆戻りすることになる[註2]（しかも、社会科などでは、算数科での帯グラフの正式な学習以前に帯グラフが登場する可能性が高い）。

このように、冰山モデルを想定して「全体に対する部分の割合」を表す図1aや図2のような単独のテープ図や帯グラフを見てみると、割合の正式な学習以前では登場頻度が高いとは言えず、正式な学習以後でも馴染みのないプリフォーマルな表現（しかも、その都度、新しい解釈に迫られる表現）にしかかっていない可能性が高いことになる。とすれば、「そうした図の理解を支えるインフォーマルな表現にはどのようなものがあるのか」「児童はどのようなインフォーマルな表現を基盤にして、図1aや図2のようなプリフォーマルな表現を理解・解釈できるようになるのか」という定番の疑問が呈されることになるだろう。

そこで次節では、図1aや図2を「全体に対する部分の割合」を表すプリフォーマルな表現として捉え、児童にとってより素朴なインフォーマルな表現や非常に馴染みのあるプリフォーマルな表現を通して、その理解に通ずるような指導の方向性について検討してみることにする。

4. 表現研究からみた「全体に対する部分の割合」の指導に関する方向性

前稿(山田,2016)では,割合,×小数,小数倍等の指導では頻出する比例数直線に焦点を当て,その理解を支えるインフォーマルな表現に関わる活動経験をどこにどのように確保するかについて議論した。本稿では,それに引き続き,最も素朴な割合概念である「全体に対する部分の割合」についての理解を支えるプリフォーマルな表現やインフォーマルな表現に関わる活動について議論してみたい。

前稿では,石田(1982)の議論を手がかりに,*Educational Studies in Mathematics*, 7(3)に掲載された Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO)の研究活動報告の中の「比」の指導事例の幾つかを紹介したが,本稿で最も参考になるのは,前稿でも簡単に紹介した図7の幾何学的にスペースの比例配分を考えるような活動である。

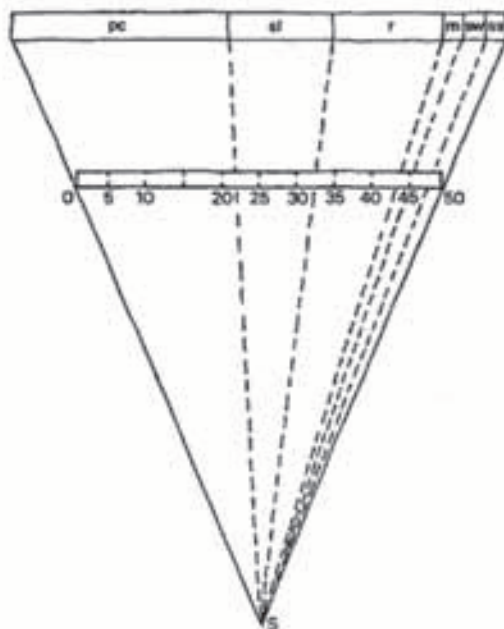


図7：スペースの比例配分(IOWA,1976,p.283)

図7は,50のスペースを pc(pedel-cart), sl (slide), r (roller), m (monkey-bar), sw (see-saw), ss (swing) の6つの投票数に従って比例配分する方法を図示したものであり,「2番目の可能性は,幾何学的な乗法である。128の投票を一行に並べよ。50のスペースを描き,その端と端を交点sまで繋いで,全ての繋がっている線分を引け」(p.283)という説明文が添えられている。この活動は,6項目の合計(これは50でなくてもよい)を50へと縮小することで,それに応じて6項目それぞれの占める大きさも比例的に縮小させる活動(例えば,pcであれば, $pc/(pc+sl+r+m+sw+ss)$)という全体に対する部分の割合を作り出し,それを全体の50にかける操作)であり,「全体をある特定の数とみる」という考え方のイメージ形成に非常に有用な活動だと思われる。

この図7の「スペースの比例配分」の図式を手がかりに、前節の最後の部分で提起した問題について考えてみることにする。

この図7の図式そのものは、児童自身が作り出すインフォーマルな表現ではなく、教師が与えるプリフォーマルな表現になろう。しかし、児童にとってインフォーマルな図（に近い図）から始めて、この解釈を支え「全体に対する部分の割合」（の比較のため）の図に至る指導の道筋は考えることはできる。図2を改編した下の図8で考えてみよう。

まず、図2の上側にある○と×の棒グラフに類似する図は、児童が素朴に作り出す絵グラフに近いものであり、例えば、1年生のD領域の「D(2) 絵や図を用いた数量の表現」に相当する単元において、児童が同種のアイコンを整理する中で自発的に作り出す絵グラフにその端緒を見つけることができる。絵グラフ作成のために累積されるアイコンやそれらが累積された結果の絵グラフは、児童のインフォーマルな表現を基盤にした表現であり、それを利用した表現の移行が図8の①になる。もちろん、ここにも学習の難所があり、そもそも絵グラフは、目的の同種のアイコンだけを（図8では、例えば、○だけを）積み重ねたものだが、ここでは異種のアイコンも積み重ねるといふ活動が必要になる。しかし、これは例えば、棒グラフの学習で積み重ねの棒グラフの学習を組み込んでおくことで対処できよう[註3]。そして、これをテープ図に変換することが、元々の図2の着眼点であった（図8の②）。図2では、ここでのテープ図を半分に分けたり、○と×の図から数値的に半分の所を見つけさせたりし、それを基準に2者間の割合を比較させるという指導の提案を行っていた。本稿では、さらに進んで、図7のような図式に基づく活動を通じて、複数のテープ図で示される割合を比較するための、全体の大きさを揃えるような図を作る活動（図8の③）を加えてはどうか、というところまで提案できるだろう。

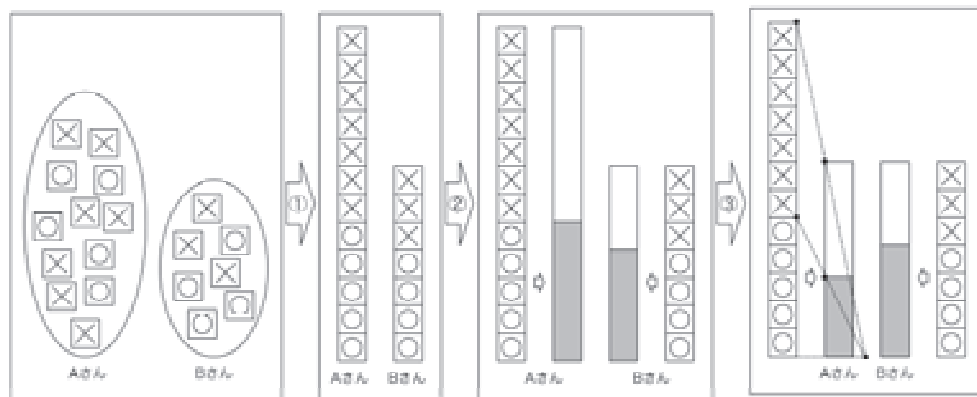


図8：「全体に対する部分の割合」を表す図の理解を支えるための想定される指導の道筋

肝心の図7の図式自体は、確かに教師が提案したいプリフォーマルな表現なのだが、点光源を利用した拡大・縮小のイメージ等、児童が学校外の活動から容易に想像できるインフォーマルな表現をその図式の理解の基盤にすることはできるだろう（例えば、影絵遊び）。図8を②までに留めず、③まで移行させることは、当初の図1aの問題や図2における「全体に対する部分の割合」

を表す表現の理解の肝であると考えられるのである。

5. おわりに

本稿では、山田(2016)の議論に続き、全国学力・学習状況調査における割合概念に関わる問題及び当該問題における『報告書』の指導への示唆に関わって、算数・数学の表現研究の立場から、「全体に対する部分の割合」概念とそれを表す図の指導の方向性について提案的な議論を試みた。

算数科で想定される児童の学習履歴を概観する限り、「全体に対する部分の割合」を表す図 1a や図 2 のような単独のテープ図の登場頻度は低いと考えられ、帯グラフの正式な学習以後でも、当該の図を使つての割合比較は、児童にとって馴染みのないプリフォーマルな表現を使つての割合比較にしかなくない可能性が高いと（それ故、部分の大きさだけにしか着目できないと）推測された。とすれば、表現研究の立場からは、そうした図の理解を支えるインフォーマルな表現にはどのようなものがあり、児童はどのようなインフォーマルな表現を基盤にして図 1a や図 2 のようなプリフォーマルな表現を理解・解釈できるようになるのか、という疑問が出てくる事になる。

本稿では、前稿で紹介した IOWA(1976)の「スペースの比例配分」の図式を利用し、小学校 1 年生の絵グラフを作る活動から、「全体に対する部分の割合」を表すプリフォーマルな表現の理解へと至る指導の道筋を提案してみたが、この一連の指導をどのような時期と期間で行うかは更なる課題である。例えば、「割合」という用語を代替する児童にとって馴染みのある言葉が必要ではあるが、3年生の棒グラフの学習単元においても、図 8 のような一連の活動を構想できそうであるし、5年生の社会科の産業に関わる学習で帯グラフが登場したときに、社会科の素データを用いて、図 8 の②の手前から始めるような学習があってもよいと思われる。いずれにしても、そうした指導の具体化については、今後の課題である。

註

[註 1] そもそも、全体の大きさが違うことへの着目ができるかが問題だろうが、そこには、積極的な教師の指導的介入があつてよい、というのが『報告書』の立場であろう。

[註 2] 帯グラフと同時に学習する図には円グラフがあり、これらはいずれも「全体に対する部分の割合」を「単独で」表現する典型的なプリフォーマルな表現である。全国学力・学習状況調査の結果を見る限り、円グラフを媒介にした百分率の意味を問う問題の正答率も、決して高くはない。例えば、平成 20 年度の全国学力・学習状況調査算数 A 9 (1)における円グラフの読みについては 91.5%の正答率であるが、同年調査算数 A 9 (2)や平成 24 年度調査算数 A 8 における百分率の意味理解を問う問題では、正答率は、それぞれ 55.1%と 58.7%でしかない。

[註 3] また他にも、例えば、社会科における 5 年生の産業に関わる学習では、地域別の工業生産額分布や年代別の農業生産種分布などを学習し、これらの資料は帯グラフで表示されることが多いのだが、その素データを一旦累積棒グラフとして示すような形で学習させることはあつて

もよいだろう。というのも、こうした社会科での学習は、多くの場合、帯グラフの学習の前に行われるため（算数科での割合の学習が5年生の遅い時期に設定されていることが多いため）、割合概念を含んだ資料の読解は児童にとって困難である場合が多いからである。

引用文献

- 石田忠男(1982). 「小数の計算についての新しい見方・扱い方 —小数のかけ算を中心に—」. 『新しい算数研究』, No.134, 2-5.
- 清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015a). 『わくわく算数2上』. 大阪:新興出版社啓林館.
- 清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015b). 『わくわく算数2下』. 大阪:新興出版社啓林館.
- 清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015c). 『わくわく算数4下』. 大阪:新興出版社啓林館.
- 清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一・他 52 名(2015d). 『わくわく算数5』. 大阪:新興出版社啓林館.
- 文部科学省/国立教育政策研究所(2008). 『平成 20 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/08chousakekkahoukoku/08shou_data/houkokusho/08_shou_chousakekkagaiyou_ikkatsu.pdf)
- 文部科学省/国立教育政策研究所(2010). 『平成 22 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/10chousakekkahoukoku/02shou/shou_ikkatsu_2.pdf)
- 文部科学省/国立教育政策研究所(2012). 『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo_ikkatsu_2.pdf)
- 文部科学省/国立教育政策研究所(2016). 『平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書: 小学校 算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (<http://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/data/16pmath.pdf>)
- 山田篤史(2016). 「数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 58 巻, 21-34.
- Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (1976). Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 7 (3), 193-331. (Special Issue: Five Years IOWO)
- Webb, D.C., Boswinkel, N., & Dekker, T. (2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14 (2), 110-113.
- 謝辞: 本研究は科学研究費補助金(課題番号: 17K00968)の助成を受けたものである。