イプシロン　2017. Vol.59，37 － 43

数学教育における練り上げについての一考察

愛知教育大学　**高　井　吾　朗**

０．はじめに

2017 年 11 月に国立教育政策研究所から出された「PISA2015 年協同問題解決能力調査」において，日本は協同問題解決能力の平均得点で 2 位になっており，喜ばしい結果として，ニュースにも取り上げられている。一方，報告書をよく見ていくと，「協同問題解決能力と科学的リテラシー，読解力，数学的リテラシーとの関係」という項目があり，その結果としては，協同問題解決能力と数学的リテラシーの相関係数は 0.66 であり，関係がやや弱いことが伺え，国際平均を見ても同様の結果がでている。勿論，相関係数は 0.66 であり低い値ではないが，科学的リテラシーや読解力に比べると，相対的に低くなっている。

この結果は，数学的リテラシーと協同問題解決能力との相関を示したものであることから，一概にそうであるとは言えないかもしれないが，「算数や数学を個人で解決するもの」と捉えている傾向があることが推測される。しかし，日本の数学教育においては，古くから協同的な学習の場として，「練り上げ」がよく行われてきている。練り上げは，自力解決の後に行われる学習場面であり，自分の考えを発表したり，他者の意見を聞いたりすることで，自分の考え方を修正したり，価値付けしたりすることがねらいとなっている。また，教室内の考え方として，最適なものを選択していくことで，私の考えから，私達クラスの考えという価値付けを行うことで，協同学習としての成果を出すこともできる。

つまり，練り上げは，協同問題解決能力の育成において算数，数学の学習場面として適切なものになっていると考えられるが，練り上げは，小学校においてはよく見られるが，中学校，高等学校と学校種が上がっていくと，途端に見られなくなっていく。このことから，何故中学校以降では練り上げが行われないのかということが疑問として挙げられる。そこで本稿では，小学校における練り上げの意味や具体的に行われる活動を明らかにした上で，協同解決の場として，中学校において練り上げを行うことにどのような問題があるのかを明らかにする。

１．練り上げの意味について

練り上げとは，問題解決型授業の中で行われる集団活動である。そもそも一般的な問題解決型授業の流れは，問題提示及び理解，自力解決，練り上げ，振り返り（応用問題への適応も含む）となっている。問題解決型授業のねらいは，問題を解決することは勿論であるが，その過程の中で問題解決に関わる様々な能力を育成することである。その能力とは，

ストラテジーと呼ばれる問題を解くための方略であったり，問題によっては基礎的な数学的知識であったりする。また，問題解決の推進力といわれるメタ認知も育成すべきものに含まれる(清水, 1996)。

こうした能力を育成するために，重要視されてきた授業の過程は，自力解決であった。教師からの支援(加藤, 1999)やペアによる解決活動(清水, 2007)を通した成功体験によって，徐々に自分自身の力で解くことができるようになる，ということがねらいとなっている。つまり，多くの問題を解くことで，どうすれば問題が解けるか，こういう問題のときはどういうことをすればよいか，ということをパターンとして認識し，それらを整理することで問題解決のストラテジーを獲得していくということである。

しかし，子どもたちは自力解決を行うだけで，一般的な問題解決のストラテジーを身につけることができるわけではない。子どもたちは解くことができればよい，もしくは解くのが楽しいわけであり，教師から反省を促さなければ，「解けて良かった」という感想で終わってしまうであろう。故に，自分はどうやって解いたのか，何を使って解いたのか，自分の解いた方法はどんな意味や価値があったのかということを振り返る活動が必要となり，それこそが練り上げであると考える。

練り上げを飛ばして，振り返り活動を行うことでも，問題解決の過程を意識させることは可能であろう。では，何故時間を取ってまで練り上げという集団活動を行わなければならないのかを考えると，より自分の解決方法に対する認識を高められるからである。練り上げにおける具体的な活動は，問題解決の方法を発表し，出された意見について疑問や反対意見を発表するということの積み重ねである。この流れの中で，発表した，しないに関わらず，子どもたちは様々な解決方法やそれに対する意見を聞くことによって，自分の解決方法を価値付けたり，修正したりしていく。つまり，練り上げという集団活動が行われる場に参加することで，自然と自分の考えを認識し，振り返ることになるのである。

練り上げという集団活動の意味について，個人という観点から考えると，（暫定的に）解決した後に行う活動であることから，その指向は自分の考えを発表したいという欲求や，友達はどんな考え方をしたかを知りたいという欲求へと向けられる。言い換えれば，個人解決とは違い，他者というものに意識が向けられるということである。そして，他者の意見を聞き，相手に意見を伝えることにより，自分だけの考えから，自分たちの考えへと変化させていく。これは，ストラテジーを価値付け，メタ認知的知識へと内面化していくということであり，その価値が主観からより客観的になるということを意味している。勿論これは，自分自身の中での変化であることから，主観から客観に変わるということはなく，あくまで主観である。では，私から私達というのはどういう変化かというと，主観的から「間主観的(intersubjective)」(フォン・グレーザーズフェルド, 2010)になると言い換えることができる。この考え方について岩崎(2007)は以下のように述べている。

> 数学的認識は，認識主体と問題場面の相互作用が集団的な学習状況でなされるとき，概念化される。集団的な学習状況がメタ認知を誘発し，活性化するモーメントになる。その場合，

> 主体と客体の位相とその力動性はメビウスの帯として捉えることが適切で，客観と主観の区分は十分にできるが，不連続ではなく，したがってその接続が可能な教授－学習過程こそ，数学の授業に求められている。(岩崎, 2007, p.104)

このように個人という観点では，自分自身の考えを反省することのきっかけを貰ったり，他者を通して自分自身の考えを価値付けていったりするということに練り上げの意味があると考えられる。

一方，集団という観点では練り上げにどのような意味があるのかというと，その過程に参加している者達によって洗練された解決方法が表出されるということであろう。Shimizu (1999)が, 練り上げの意味を“*kneading up* or *polishing up*”(p.110)と説明しているように，教室空間に出された解決方法は，様々な意見によってこねられ，磨き上げられていく。その結果出来あがるものは，その教室において「よりよいもの」(better)になるであろう。このように教室空間で価値付けられ，集団で共有されるものは「数学的規範」(Cobb, 2002)と呼ばれる。このような数学的規範が共有されていくことによって，その教室空間における授業の方法，方向性が決定されていき,「算数（数学）の授業は○○だ」というような，一般的な数学的規範も共有されていくことになる。

このように，練り上げという活動は，個人の認識を修正させたり，集団の方向性を定めたりしていくという意味があり，算数・数学の授業において重要な役割をもつ活動であると捉えることができる。

３．小学校算数科授業における妥当性の検討

まず，小学校算数科授業（以降,「算数」と省略）における練り上げの具体的な流れとして，古藤(1992)の「“比較検討する” 段階の 3 つのステップ」(p.36)を概観したい。3 つのステップは,「妥当性の検討（理解の場)」,「有効性・関連性の検討（比較の場)」,「解決方法の選択（選択の場)」(p.36)で構成され,「この〔理解〕—〔比較〕—〔選択〕の過程は，人が自分の身の回りの諸問題に的確に対処していく上での大切な思考の筋道である」(p.40)と指摘している。このように，練り上げにおいてはまず，教室に表出した解決方法がその問題を解決するために，妥当かどうかを検討することで，次の比較段階における下地を作り，最終的に，妥当性が保証された方法の中で，さらに様々な価値付けがされたものを自分で選択するという流れになっている。つまり，妥当性の検討がどのように行われたかによって，練り上げがうまくいくかどうかが決まってくるということである。

具体的な例を挙げてこの妥当性の検討を考えてみよう。5 年生の算数において学習する「平行四辺形の面積の求め方」では，様々な解決方法が示される。

ａ．合同な三角形の面積×２

ｂ．合同な直角三角形の面積×２＋長方形の面積

ｃ．長方形の面積（長方形に等積変形し，面積を求める）

ａは，鈍角を結ぶ対角線と，鋭角を結ぶ対角線の２パターンが考えられ，ｃは，直角三角形に切り取って移動させるものと，台形に切り取って移動させるものの２パターンが考えられる。よって，合計５パターンの解決方法が示されることになる。

まず，ａの場合，鈍角，鋭角のどちらを結ぶにしても，合同の三角形になっているかを検討しなければならない。児童は，この単元の前に合同を学習しているため，２つの三角形を切り取って，重ねるという検討を行うことができる。しかし，実際に切ってみると，はみ出してしまうことがあり，切り取った紙そのものではなく，頭の中で「図形として合っているとみなす」という推測でしか検討できない。（角度をそれぞれ測ってみても同じことが起こりえる）故に，練り上げにおいて，「切ってみたら同じにならない」と感じ，そのことを指摘した場合，他の子から，「ちゃんと切ったら」や「まっすぐ切ったら」という説明を受けて，図形に対する認識を変化させたり，数学的規範として，「ちょっとくらいずれていても，合同とみなすことが大事」ということが表出されたりする。ｂについても，同様の「みなす」という考え方で練り上げが行われる。つまり，ａとｂの妥当性は，児童達全てが納得することによって，保証されるということになる。

ｃの妥当性を検討する場合，長方形になっているか，ということが中心になる。切り取ったものを長方形にするために引っ付けるとき，引っ付けたところがまっすぐになっているかどうかを判断するが，ここでも実際に引っ付けてみて，「まっすぐになってそうだ」というみなす考え方が重要になる。既習事項である三角形の内角の和を，三角形を敷き詰めることで示したことを使い，それを根拠にまっすぐであることを提案する場合も考えられる。前者の実際に目で確認して妥当性を検討する場合，その妥当性はａとｂと同様に，児童達全ての納得によって保証されることになる。しかし，後者の既習事項を用いて，実際に引っ付けるのではなく，黒板やノートにかいた図形を元に説明する場合，既習事項を根拠とすることによって，妥当性が保証されることになる。

この児童達全ての納得による保証と，既習事項を根拠とすることによる保証の違いについては，「正統的周辺参加」(レイヴ＆ウェンガー，1993)という，「社会的実践のコミュニティに周辺的成員として参加して徐々にその十全な成員へ移行していく過程」(関口，2010, p.33)という観点で説明が付くであろう。児童達全ての納得による保証とは，練り上げの参加者を「認知的見習い」とみなし，そのコミュニティ（今回の場合は，数学の世界）のルールを見様見真似で作っていくことで，そのコミュニティに全員で入り込んでいくことになる。一方，既習事項を根拠とすることによる保証とは，一部の児童が教室内における「専門家」としてそのコミュニティのルールに従い発表し，他の児童はその意見を受け入れ教室規範を共有していくというものであり，一部の「専門家」としての児童が，他の児童をコミュニティの内側に引きこんでいくということになる。

このように，算数における妥当性の検討は，「認知的見習い」同士が相互作用によって行う場合と，「専門家」と「認知的見習い」に分かれて行う場合に分けることができる。どち

らも数学の世界について自分の考えを深めたり，教室規範を社会数学的規範へと拡張したりしていくものであることから，この 2 つのパターンに上下関係をつける必要はあまり無いと考える。また，実際の授業場面では，始めは「認知的見習い」同士だったものが，その流れの中で「専門家」が現れ，流れを変えていくということは十分考えられることから，妥当性の検討ではこの２つのパターンのどちらもが起こりえる，と認識するに留めるべきであろう。

４．中学校数学科授業における妥当性の検討

前節では，練り上げ（妥当性の検討）において，「認知的見習い」同士による相互作用によって行われる場合と，「専門家」と「認知的見習い」に分かれて行われる場合があることを示した。中学校数学科授業（以降，「数学」と省略）においても，同じように２つのパターンで妥当性の検討が行えば，練り上げができるのではないだろうか。

結論から言えば，数学においては，「認知的見習い」同士による相互作用が起こりにくく，「専門家」と「認知的見習い」に分かれる場合がほとんどになり，練り上げにおいて一部の生徒だけが参加するという状況が生まれやすいと考える。

では，何故そのような状況になりやすいかを具体的な例を挙げながら考えていく。二次方程式の単元において，「因数分解ができない方程式を解くためには，どうすればよいか」という問題を考える場合，自力解決で偶然できるということは中々無いであろう。学校外での学習などから平方完成や解の公式の利用が出るか，自分自身で因数分解は 2 次方程式を 1 次式の積にすることで解きやすくすることに気付き平方完成するという形でしか自力解決では答えが出ないと考えられる。その結果，練り上げでは「専門家」としての立場からの意見しか出ず，自力解決できなかった生徒にとっては，第 2 の先生という扱いになってしまう。学校外で先に学習していても，それを理解せず使っていた場合，その生徒達は「認知的見習い」と言えるであろう。しかし，その後に起こるものは認知的見習いの相互作用ではなく，「なぜ平方完成をするのか」「解の公式とは何か，どこから出てくるのか」という新たな問題に移っていくであろう。

このように，数学においては既習事項を用いて新たな問題を解決するという「構造指向」的な問題解決が多く行われるため，自力解決において解けている生徒が練り上げでは他の生徒に方法を示すということが起こりやすくなると考えられる。また，算数とは違い，具体的操作による試行錯誤も難しいことから，様々な具体例から帰納的に推測していくことも難しいと考えられる。故に，「認知的見習い」としての相互作用ではなく，「認知的見習い」として何もできない，という状況に陥ることもよくあるということになる。この場合，「専門家」としての役割は教師が担うことになるが，教師という権威的立場から説明した上で生徒が練り上げを続けて行えるかは，難しいのではなかろうか。

つまり，妥当性の検討において，生徒同士による相互作用が行われにくいことから，教師としても，練り上げに意味が無いのではないかと考え，「授業に練り上げを取り入れない」

という選択を行っていると考えられる。

しかし，練り上げとは妥当性を検討するだけのものではない。有効性の検討や自己選択も練り上げの重要な役割である。先程の 2 次方程式をもう一度例にして考えてみよう。授業の中で，2 次方程式を解くためには，因数分解，平方完成，解の公式が出揃ったとする。そして，練習問題を解いていく中で，「どのやり方が2次方程式を解くためにはいいのかな？」という教師からの発問により，「より簡単にするには？」，「こういうときは因数分解じゃないか？」ということを話し合わせることができる。つまり，最低限 3 つの方法を用いて解くことができる状態にあれば，有効性の検討を行うための参加証を持っているということになり，どのやり方がいいかについては，個人の価値観によって決定されるということである。その中で例えば，「解の公式は必ず解ける」，「因数分解ができるものは，因数分解でやった方が簡単そうだ」という意見から，「解の公式だとルートが必ず出るから嫌だな」や，「因数分解ができるものを考える方が時間がかかるよ」という批判が出てくることが考えられる。これこそ正に，自分の価値観であり，自分にとってより良い解決方法を模索し，自己選択するということである。再度述べるが，練り上げは妥当性を検討するだけのものではなく，有効性の検討や自己選択をさせることにより，より深い学びが可能となる場面なのである。

一方で，妥当性の検討から行える数学の領域もある。それは資料の活用領域であり，そこでは，確率のモデルに対して統計的手法を用いて正しいかどうかを検証したり，標本調査に必要な標本数を実際に調査した結果を元に考察したりする。この２つの活動のように，資料の活用領域では，その妥当性を調査結果に求めることになる。つまり，「認知的見習い」として，見様見真似でその活動を行うということになり，練り上げにおいて，そのデータが正しいのかということは，相互作用による納得によって保証されるということである。

他にも練り上げにおいて妥当性が相互作用による納得によって保証されるものとしては，現実の問題を解決することが挙げられる。その問題を解決するために，自分で解決のための数値を選定し，その計算結果を元に解決を行う。この場合，その数値が妥当か，その結果からの考察は妥当かということは，実際に発表し，納得されなければ保証されない。つまり，数学を活用するという「応用指向」の活動では，他者との納得による妥当性の検討は必須であり，練り上げを行わない理由はまったく無いであろう。

以上のことから，数学においては，構造指向的な数学を探究していく学習においては，算数と同様の練り上げを行うのは難しいことがわかるが，有効性の検討や自己選択という場面として練り上げを見れば，構造指向的な学びをより深めることが可能だと考える。そして，応用指向的な数学を道具として用いる学習や，資料の活用のように実際の調査を前提にした学習では，練り上げを行うことが望ましいということになる。

５．おわりに

本稿において，練り上げが中学校において何故行われないのかを考察してきたが，根本

にあるものは，教師が持つ数学観や教育観が大きく関わっていると考えられる。現在，中学校ではグループ学習が多く取り入れられているが，グループ学習は学習効果が高いという認識があるからであろう。しかし，グループ学習はただ取り入れればよいというものではなく，デメリットも存在する（例えば，グループ間での格差やグループ内での上下関係など）。つまり，教師が持つ指導方法に対する価値付けがそのまま授業に反映されているということであり，練り上げについても教師にとっての価値観を変えれば，うまく授業に反映されるということである。そのためには，練り上げについての理解を深めてもらうことが重要であり，筆者が行わなければならない教育活動である。

参考・引用文献

Cobb, P. (2002). Reasoning with Tools and Inscriptions. *The Journal of the Learning Sciences, 11(2&3)*, 187-215.

フォン・グレーザーズフェルド．E．(2010)．橋本渉訳『ラディカル構成主義』，NTT 出版．

岩崎秀樹(2007).『数学教育学の成立と展望』, ミネルヴァ書房（広島大学学位論文（教育学），2005）

古藤怜(1992).「第１章　算数指導改善の２つの視点」，古藤怜，新潟算数教育研究会著『算数科　多様な考えの生かし方まとめ方』，東洋館出版社，pp.15-40

加藤久恵(1999).『数学的問題解決におけるメタ認知の機能とその育成に関する研究』，広島大学学位論文（教育学）

レイヴ, J.，ウェンガー, E. (1993). 佐伯胖訳『状況に埋め込まれた学習 ： 正統的周辺参加』，産業図書

関口靖広(2010).「第２章 数学教育研究における文化論的転回－その背景と展開－」，清水美憲編著『授業を科学する 数学の授業への新しいアプローチ』，学文社，pp.24-44

清水紀宏(1996).「数学的問題解決における方略的能力に関する研究（V）－問題解決能力に対する方略的能力の寄与率の実証的検討」，全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第２巻，pp.59-68

清水美憲(2007).『算数・数学教育における思考指導の方法』，東洋館出版社(筑波大学学位論文(教育学)，2006)

Shimizu, Y. (1999). Aspects of Mathematics Teacher Education in Japan: Focusing on Teachers' Roles, *Journal of Mathematics Teacher Education*, *2*, 107-116.