

数楽チャレンジ大会の出題問題について

愛知教育大学 小 谷 健 司

1 はじめに

新城市は平成 10 年から毎年、「数楽チャレンジ大会」という小学校 5 年生から中学校 3 年生までの児童・子どもが算数・数学の問題に取り組む大会を開催しています。私は平成 13 年の第 4 回大会から実行委員会に参加しています。私が委員会に参加したきっかけは、当時の大会委員長の小林正躬先生が本学の浦田敏夫先生を通じて依頼くださったことです。今年度で大会は第 20 回、私は 16 年目の委員ということになります。

私は参加 2 年目の第 5 回大会から昨年度の第 19 回大会まで作問に携わっていますので、毎年 1 題ずつ計 15 題の作問をしたこととなります。この大会の作問の難しいところは、子どもたちの学年が小学校 5 年から中学校 3 年までと幅広いことです。大学教員が作問する以上、数学がいろいろなところで役に立っていることがわかるオリジナルの問題を作りたい。しかし、できるだけ多くの子どもたちに解いてもらうには中学校 1 年くらいの知識で解ける問題にしたい。そのような困難から、なかなか納得のいく問題を作ることができませんでした。私が良い問題を作ることができるようになったのは、平成 22 年の第 10 回大会以降だと思います。

私は今年度から作問委員を井上歩先生に交代しました。作問委員から外れる機会に、私が過去に作成した問題のうち 5 題を紹介しようと思います。これらはすべて、現実世界のできごとを連続量（実数）で読み解く問題です。第 2 節では、これらの問題を紹介します。第 3 節では、それらの問題の解答例および参加した子どもたちの解答について述べます。

小林正躬先生は、平成 25 年 5 月 12 日に亡くなられました。私は小林先生が現役の頃は良い貢献をすることができず、先生が退職されて以降、ようやく良い貢献ができるようになりました。小林先生は私をこのすばらしい大会に引き入れてくださった恩人です。今は亡き小林先生には感謝の気持ちをお伝えしたいです。

2. 出題した問題

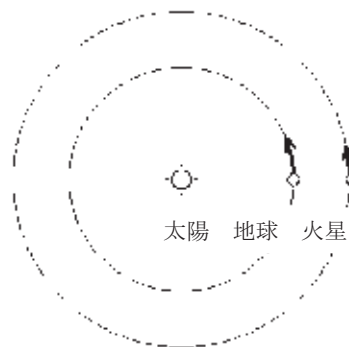
平成 22 年度 問題 6 「地球と火星が大接近」

地球や火星などの惑星は太陽のまわりを回っています。地球は 365 日（1 年）で 1 回、火星は 687 日で 1 回、太陽のまわりを同じ向きに回っています。下図のように太陽・地球・火星が一直線に並ぶとき、地球と火星の距離は近くなります。これを地球と火星の「接近」といいます。

問1. 2010年1月28日に地球と火星は接近しました。では、次に地球と火星が接近するのは何年何月でしょうか？

注意：地球や火星は毎日、同じ角度だけ回るものとして問題を解いてください。

問2. 地球と火星が接近する日が8月頃るとき、地球と火星はもっとも近くなります。これを地球と火星の「大接近」といいます。では、次に地球と火星が大接近するのは何年でしょうか？



平成 24 年度 問題 7 「次の日食はいつ？」

2012年5月21日に愛知県内で金環日食がありました。みなさんも学校へ行く前に、太陽が月に隠される瞬間を観測したと思います。日本の本州で金環日食または皆既日食が起こったのは160年ぶりのことでした。このように、日本で日食が起こるのは非常にまれなことです。日食は毎年、世界のどこかで起こっています。

問. では、次に世界のどこかで日食が起こるのはいつでしょうか？ 次の「日食が起こるしくみ」を読んで、2012年5月21日の次に、世界のどこかで日食が起こる日を推測してください。どのように考えたかもていねいに書いてください。

【日食が起こるしくみ】

日食は、月が太陽を隠すことによって起こります。地球から見て、月が太陽とほぼ同じ方向にあるときは新月、ほぼ反対方向にあるときは満月になります。したがって、日食は必ず新月のときに起こります。そして、新月から次の新月までにかかる時間は約29.5日です。

単純に考えると、新月のたびに日食が起こりそうなものですが、そうではありません。それは、地球上の人が空を見たときに月が通る道筋が、太陽が通る道筋（黄道といいます）とは違っているからです。日食は月が黄道を横切るときに起こります。月が黄道を横切ってから次に月が黄道を横切るまでにかかる時間は約13.6日です。

平成 25 年度 問題 7 「新城の日の出」

下の表は、日本各都市の経度・緯度と平成25年11月9日の日の出・日の入りの時刻を表にしたものです。

都市	経度	緯度	日の出	日の入り	南中時刻	昼の長さ
札幌	東 141.4	北 43.1	6:19	16:17		
盛岡	東 141.2	北 39.7	6:13	16:25		
仙台	東 140.9	北 38.3	6:11	16:29		
横浜	東 139.7	北 35.5	6:10	16:40		
大阪	東 135.5	北 34.7	6:26	16:58	11:42	10:32

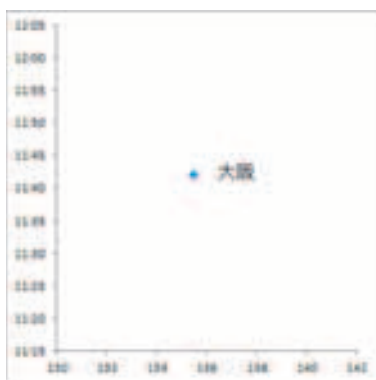
岡山	東 133.9	北 34.7	6:32	17:04		
福岡	東 130.4	北 33.6	6:44	17:20		
熊本	東 130.7	北 32.8	6:42	17:20		
新城	東 137.5	北 34.9				

※この表は国立天文台のホームページで公開されているデータをもとに作りました。

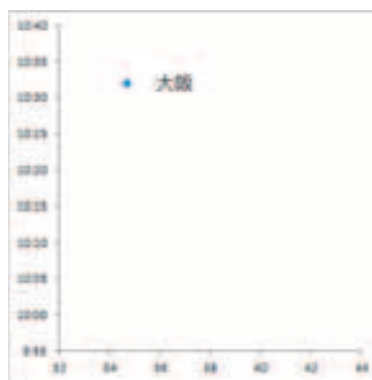
問1. 南中時刻とは、太陽が真南に来る時刻で、日の出と日の入りの中間の時刻です。**昼の長さ**とは、日の出から日の入りまでの時間です。例えば、大阪では $(6:26 + 16:58) \div 2 = 11:42$ が南中時刻、 $16:58 - 6:26 = 10:32$ が昼の長さです。他の都市も同じように計算し、解答用紙の表をうめてください。

問2. 経度とは、その地点が地図上でどのくらい東（または西）にあるかを表す量です。**緯度**とは、その地点が地図上でどのくらい北（または南）にあるかを表す量です。下のグラフは、大阪の経度と太陽の南中時刻、緯度と昼の長さの関係を点で表したものです。これにならって、解答用紙の方眼紙に各都市の点を打ってください。そして、新城での太陽の南中時刻と昼の長さを推測してください。

問3. 新城での日の出・日の入りの時刻を推測してください。



経度と南中時刻の関係のグラフ



緯度と昼の長さの関係のグラフ

平成 27 年度 問題 6 「体重を減らす方法, 教えます」

「重さ」は測定場所で違います。例えば、新城市の千郷小学校で体重が 50 kg の人が豊根村の茶白山山頂で体重を測定すると 14 g 軽くなります。また、同じ人が鹿児島市で体重を測定しても 14 g 軽くなります。実は、ものの重さは高い場所の方が低い方より軽くなります。また、赤道に近い場所の方が遠い方より軽くなります。

下の表は、千郷小学校で 50 kg のものの重さを日本各地で測定した結果を記録したものです。増減の列の -14 は千郷小学校に比べ 14 g 軽くなることを、+46 は 46 g 重くなることを表しています。

測定場所	北緯 (度)	東経 (度)	標高 (m)	増減 (g)
千郷小学校 (愛知県新城市)	34.8978	137.4848	54	0
茶臼山 (愛知県豊根村)	35.2275	137.6555	1415	-14
北海道稚内市	45.4158	141.6797	5	+46
北海道札幌市	43.0733	141.3400	15	+37
秋田県秋田市	39.7294	140.1367	28	+22
千葉県成田市	35.7644	140.3847	40	+6
山口県下関市	33.9486	130.9264	0	-4
鹿児島県鹿児島市	31.5553	130.5483	3	-14
伊吹山 (滋賀県米原市)	35.4178	136.4063	1377	-16
滋賀県長浜市	35.4144	136.3325	131	-2
駒ヶ岳 (長野県上松町)	35.7896	137.8046	2956	-32
長野県伊那市	35.7850	137.9428	655	-6
富士山	35.3606	138.7274	3776	
宮之浦岳 (鹿児島県屋久島)	30.3361	130.5042	1935	
於茂登岳 (沖縄県石垣島)	24.4272	124.1833	526	
沖ノ鳥島	20.4255	136.0812	0	

(この表は国土地理院のホームページのデータをもとに作成しました。)

では、日本で「重さがもっとも軽くなる場所」はどこでしょうか？ 上の表を参考にして、次の 4 つの地点での体重の増減を推測して、体重がもっとも軽くなる地点を選んでください。

1. 富士山 (日本でもっとも高い山)
2. 宮之浦岳 (鹿児島県でもっとも高い山)
3. 於茂登岳 (沖縄県でもっとも高い山)
4. 沖ノ鳥島 (日本でもっとも南にある島)

なぜ高い方が低い方より体重が軽くなるのでしょうか？ それは「重さ」は地球からの引力が原因ですが、高い場所は地球から離れているので、引力が弱くなるからです。では、なぜ赤道に近い方が遠い方より体重が軽くなるのでしょうか？ それは地球上の物体には地球の自転による遠心力が働き、引力が弱められますが、赤道に近い方が遠心力が大きいからです。

平成 28 年度 第 9 問 「黒鍵の周波数をハッケンせよ」

音は空気が振動することによって起こります。空気が 1 秒間に振動する回数を**周波数**といい、**ヘルツ**という単位で表します。例えば、ドの音は空気が 1 秒間に 262 回振動するので 262 ヘルツの音です。周波数が大きい音は高く、周波数が小さい音は低く聞こえます。また、周波数が 2 倍ちがう 2 つの音は同じ音に聞こえます。例えば、524 ヘルツの音は 1 オクターブ高いド (ド), 131 ヘルツの音は 1 オクターブ低いド (ド) になります。

	ド#	レ#		ファ#	ソ#	ラ#		
ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド	
262	約 295	約 332	約 349	約 393	約 442	約 497	約 524	

周波数が3倍ちがう2つの音は調和して聞こえます。例えば 783 ヘルツの音はドと調和して聞こえます。この音が $\overline{\text{ソ}}$ です。この音を1オクターブ下げると $786 \div 2 = 393$ ヘルツになります。つまり、

$$262 \times 3 \div 2 = 393 \text{ ヘルツ。この音はソ。}$$

同じように、262に3を何回かかけ、262と524の間の数になるよう2で何回か割ります。

$$262 \times 3 \times 3 \div 2 \div 2 \div 2 = \text{約 } 295 \text{ ヘルツ。この音はレ。}$$

$$262 \times 3 \times 3 \times 3 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = \text{約 } 442 \text{ ヘルツ。この音はラ。}$$

$$262 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = \text{約 } 332 \text{ ヘルツ。この音はミ。}$$

$$262 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 \div 2 = \text{約 } 497 \text{ ヘルツ。この音はシ。}$$

次に、262を3で割り、262と524の間の数になるよう2を2回かけます。

$$262 \div 3 \times 2 \times 2 = \text{約 } 349 \text{ ヘルツ。この音はファ。}$$

このように音階を決める方法は、約2500年前の数学者ピタゴラスが考えたので**ピタゴラス音階**と呼ばれています。

問1. 下の (1)~(7) の値を小数第3位まで求めてください。電卓を使ってもよいです。

ド 262	レ 295	ミ 332	ファ 349	ソ 393	ラ 442	シ 497	ド 524
$295 \div 262$	$332 \div 295$	$349 \div 332$	$393 \div 349$	$442 \div 393$	$497 \div 442$	$524 \div 497$	
= (1)	= (2)	= (3)	= (4)	= (5)	= (6)	= (7)	

問2. ド#, レ#, ファ#, ソ#, ラ#の周波数はそれぞれどれくらいになるのでしょうか? どのように求めたか、理由と式も書いて教えてください。

3. 解答例と子どもたちの解答

平成22年度 問題7 「地球と火星が大接近」 解答例

問1. この問題は、地球と火星が太陽のまわりを1日にどれだけ回るかを考えればわかりやすいです。地球は太陽のまわりを1日に $1/365$ 周、火星は $1/687$ 周します。なので、地球の方が火星よりも早く太陽のまわりを回り、1日で約 $1/365 - 1/687 \approx 0.0012841$ 周の差がつかます。この差が積み重なって1周になるには、 $1 \div 0.0012841 \approx 779$ 日かかります。2010年1月28日の779日後は2012年3月17日です。したがって、答えは2012年3月です。

問2. 接近は779日ごとに起こるはずですが、2012年3月17日の779日後は2014年5月5日、その779日後は2016年6月22日、その779日後は2018年8月10日です。したがって、答えは

2018年です。

この答えは、「地球や火星は毎日、同じ角度だけ回る」として出した答えです。本当は、地球や火星が太陽のまわりを回る道すじ（軌道といいます）は円ではなく、楕円（だえん）なので、毎日、同じ角度で回るわけではありません。したがって、上の計算結果と本当の接近日には違いがあります。それを下の表にまとめてみました。

接近の年	計算結果	本当の接近日	地球と火星の距離
2010年	1月27日	1月27日	9933万km
2012年	3月17日	3月5日	10078万km
2014年	5月5日	4月14日	9239万km
2016年	6月22日	5月30日	7528万km
2018年	8月10日	7月31日	5759万km

子どもたちの解答

この問題は、中学生5人が問1に正解しましたが、問2の正解者はいませんでした。問2の正解者がいなかった理由は、四捨五入による誤差でした。この問題の解答は割り算を3回行いますが、各割り算の答えを有効数字1ケタや2ケタで求めたため、誤差が積もり積もって最後の答えが1年以上違ってしまったのです。この大会は電卓の使用が認められているので、ケタ数の多い計算も簡単にできます。しかし、四捨五入の誤差が答えに大きな影響を及ぼしてしまうという認識が、子どもたちにはなかったのでしょうか。

また、問1の接近の周期を求める際、365と687の最小公倍数を求め、250755日と答えた子どもが多数いました。地球や火星が1日ごとにカチッカチッと不連続に動くなら、この答えで正解ですが、実際の惑星の動きは連続的です。この問題を通して、子どもたちは「実数の問題」が苦手だということに気づきました。

平成24年度 問題7 「次の日食はいつ？」 解答例

この問題は、厳密に考えると解けません。少し融通をきかせて考えてください。新月が29.5日に1回、月が黄道を横切るのが13.6日に1回ですから、単純に考えたら、29.5と13.6両方の整数倍である4012日後が次の日食が起こる日になります。しかし、この答えでは約11年後のことになり、問題文の「日食は毎年、世界のどこかで起こっています」に合いませんね。では、なぜ毎年、日食が起こるのでしょうか？ それは、29.5の倍数と13.6の倍数が少しくらいズレていても日食が起こるからです。では、どの程度のズレなら日食が起こるのでしょうか？

「日食が起こるしくみ」より、日食が起こるのは、新月で月が黄道の近くにある日です。5月21日は新月のはずですから、以降の新月は、5月21日の29.5日後、59.0日後、88.5日後、…です。一方、5月21日ごろ月が黄道を横切っていますから、そのあとに月が黄道を横切るのは、5月21日の13.6日後、27.2日後、40.8日後、…です。

数楽チャレンジ大会の出題問題について

新月の日：29.5, 59.0, 88.5, 118.0, 147.5, 177.0, 206.5, 236.0, 265.5, 295.0, 324.5, 354.0

月が黄道を横切る日：13.6, 27.2, 40.8, 54.4, 68.0, 81.6, 95.2, 108.8, 122.4, 136.0, 149.6, 163.2, 176.8, 190.4, 204.0, 217.6, 231.2, 244.8, 258.4, 272.0, 285.6, 299.2, 312.8, 326.4, 340.0, 353.6

これら2つの数列で、値が最も近いのは、 $29.5 \times 6 = 177.0$ と $13.6 \times 13 = 176.8$ です。この2つの数値の差は0.2ですが、この程度のズレなら日食が起こることでしょう。したがって、次の日食は5月21日の177日後の11月14日と推測します。

上の答えが現実に日食が起こる日と一致しているかどうかを調べてみました。下の表は、日食が起こる日、次の日食までの日数、日食の種類を表にしたものです。NASA（アメリカ航空宇宙局）のホームページで調べました。種類の欄の「皆既」は皆既日食、「金環」は金環日食が起こる地域があることを表しています。「部分」は部分日食は起こるが、皆既日食または金環日食が起こる地域が無いことを表しています。

年月日	日数	種類	年月日	日数	種類	年月日	日数	種類
2008/08/01	178	皆既	2010/07/11	177	皆既	2011/11/25	177	部分
2009/01/26	177	金環	2011/01/04	148	部分	2012/05/20	177	金環
2009/07/22	177	皆既	2011/06/01	30	部分	2012/11/13	178	皆既
2010/01/15	177	金環	2011/07/01	147	部分	2013/05/10	177	金環

問題文の日食は、2012/05/20の金環日食です。NASAの表は世界時（イギリスの時間）で表されているので、日本時に直せば5月21日になります。同じように、2012/11/13を日本時に直すと11月14日になります。前のページで求めた答えと一致しました！インターネットで調べてみると、この日にオーストラリア北部からその東の太平洋にかけて皆既日食が起こったそうです。

実際の月の動きは非常に複雑で、このような単純な計算で次の日食の日付が求まるとは限りません。しかし、この問題に限っては、正確に日付が求まりました。

子どもたちの解答

この問題は乱暴な問題です。上の表からわかるように、実際の日食でも、次の日食が起こるのが約177日後というのは必ずしも正しくはないからです。ですから、この問題は答えではなく、数理的に正しい考え方で問題を追及しているかどうかを見ました。この問題では、中学生2人が上の解答例のような解答をしていました。他に177.0と176.8が近い値であることを見つけた人はいませんでした。誤答例としては、29.5と13.6の「最小公倍数」を求めた人がいました。もちろん、実数に最小公倍数という考え方はありません。

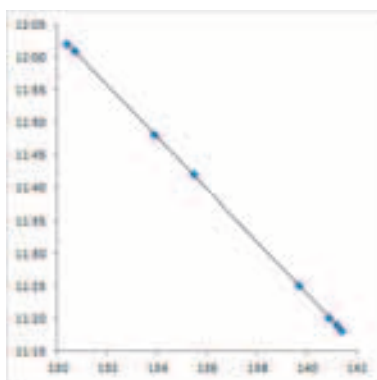
平成25年度 問題6 「新城の日の出」 解答例

問1. 下の表のようになります。

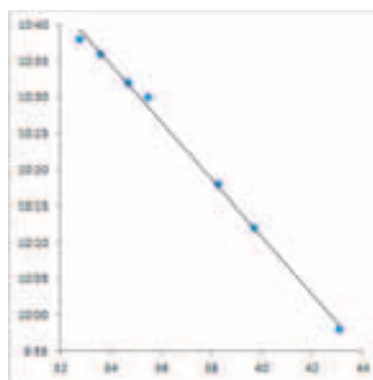
都市	経度	緯度	日の出	日の入り	南中時刻	昼の長さ
札幌	東 141.4	北 43.1	6:19	16:17	11:18	9:58

盛岡	東 141.2	北 39.7	6:13	16:25	11:19	10:12
仙台	東 140.9	北 38.3	6:11	16:29	11:20	10:18
横浜	東 139.7	北 35.5	6:10	16:40	11:25	10:30
大阪	東 135.5	北 34.7	6:26	16:58	11:42	10:32
岡山	東 133.9	北 34.7	6:32	17:04	11:48	10:32
福岡	東 130.4	北 33.6	6:44	17:20	12:02	10:36
熊本	東 130.7	北 32.8	6:42	17:20	12:01	10:38
新城	東 137.5	北 34.9				

問2. 下のグラフのように 8 個の点を方眼紙に打ち、それらに最も近い直線を引きます。



経度と南中時刻の関係のグラフ



緯度と昼の長さの関係のグラフ

左のグラフの経度 137.5 に対応する時刻を読み取ると 11:34 くらいです。次に、右のグラフの緯度 34.9 に対応する時間を読み取ると 10:31 くらいです。よって、新城の南中時刻は 11 時 34 分、昼の長さは 10 時間 31 分 と推測できます。

問3. 昼の長さは 10:31 でした。この半分は 5:15:30 (5 時間 15 分 30 秒) です。南中時刻からこの時間を引くと (6 時 18 分 30 秒)、足すと (16 時 49 分 30 秒) となります。よって、新城の日の出の時刻は 6 時 18 分から 19 分ごろ、日の入りの時刻は 16 時 49 分から 50 分ごろ と推測できます。

子どもたちの解答

小学生で問 1 に正解した人はいませんでした。小学生だと時間の計算が難しいようです。1 時間を 100 分で計算した人が何人かいました。一方、中学生では、ほぼ正しい考え方で問 3 まで答えた人が 6 人もいました。ほぼ完全といえる解答は 1 人でしたが、他の 5 人も計算まちがいやグラフの不備などありましたが、考え方はほぼ正しかったです。

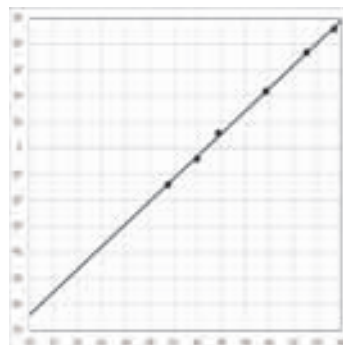
平成 27 年度問題 7 「体重を減らす方法、教えます」 解答例

伊吹山と駒ヶ岳のデータから、高さ 1m あたり何 g の重さが減少するか求めてみます：

$$\text{伊吹山 } (16 - 2) \div (1377 - 131) \approx 0.011, \quad \text{駒ヶ岳 } (32 - 6) \div (2956 - 655) \approx 0.011$$

したがって、高さが 1m 上がると重さが 0.011 g 減少することがわかります。

次に、釧路、札幌、秋田、成田、下関、鹿児島 の 6 つの地点について、横軸を緯度、縦軸を重さの増減として点を打つと、下のようにはほぼ一直線上にあることがわかります。6 つの地点の標高はそれぞれ違いますが、どれも 40 m 以下なので気にしないことにします。上のグラフの傾きは、約 4.35 です。



富士山と千郷小学校の標高と緯度から重さの増減の値を計算すると、

$$(3776 - 54) \times 0.011 \doteq 40.9, \quad (35.36 - 34.90) \times 4.35 \doteq 2.0.$$

つまり、標高の差によって約 40.9 g 軽くなり、緯度の差によって約 2.0 g 重くなるはずですが。したがって、富士山で測った重さは千郷小学校より $40.9 - 2.0 = 38.9$ g 軽くなると考えられます。宮之浦岳、於茂登岳、沖ノ鳥島も同様に計算すると、下表のようにそれぞれ 40.5 g, 50.7 g, 62.4 g 軽くなると考えられます。

測定場所	北緯(度)	標高(m)	重さの増減の推定			国土地理院 の測定値
			標高から	緯度から	推定値	
富士山	35.3606	3776	-40.9	+2.0	-38.9	-45.0
宮之浦岳	30.3361	1935	-20.7	-19.8	-40.5	-39.3
於茂登岳	24.4272	526	-5.2	-45.5	-50.7	-42.5
沖ノ鳥島	20.4255	0	+0.6	-63.0	-62.4	?

上の結果から、日本でもっとも重さが軽くなるのは沖ノ鳥島と推測できます。

実は、この問題の「正解」はわかりません。なぜなら、国土地理院が沖ノ鳥島の重力を測定していないからです。地球上の重力は、標高・緯度以外に地下にある岩石の種類などによって変わります。ですから、本当は「解答例」のような単純な計算では正しい値を求めることができません。富士山、宮之浦岳、於茂登岳の重力は、国土地理院のウェブページから求めることができます。それらの値を上表の右端の列に書きました。「解答例」の値を国土地理院が測定した値を比べると、あまり良い値ではありません。ですから、「解答例」では「日本でもっとも重さが軽くなるのは沖ノ鳥島と推測できます」と書きましたが、ひょっとしたら富士山の方が軽くなるかもしれません。

子どもたちの解答

この問題もまたまた乱暴な問題です。上でも述べているように、重力の大きさは単純な計算で求めるものではありません。ですから、この問題も最後の答えではなく、数理的な推測を行っているかどうかを見ました。この問題では、中学生 5 人がそのような解答をしてくれました。そのうちの 3 人は上の解答例に近い解答で、最後の答えも「沖ノ鳥島」でした。他の 2 人のうちの 1 人は、「g/緯度」を計算するのに選んだ 2 地点が標高 0 m の平地と標高 2956 m の山頂だったため、最後の答えが「富士山」になっていました。もう 1 人は重さの増減を求めるのに経度まで考慮してしま

い、そのため最後の答えが「富士山」になっていました。(最後の1人は正解とは言えないかもしれません。)

平成 28 年度 問題 9 「黒鍵の周波数をハッケンせよ」 解答例

問1. 次のようになります。

ド 262	レ 295	ミ 332	ファ 349	ソ 393	ラ 442	シ 497	ド 524
$295 \div 262$ ≈ 1.126	$332 \div 295$ ≈ 1.125	$349 \div 332$ ≈ 1.051	$393 \div 349$ ≈ 1.126	$442 \div 393$ ≈ 1.125	$497 \div 442$ ≈ 1.124	$524 \div 497$ ≈ 1.054	

問2. 解答の方法はいろいろあります。そのうちの3つを紹介します。

解答例 1. (1) の割り算の結果を「間隔」ということにします。となり合う全音(白鍵の音)の間隔が、大きい値(1.124~1.126)になるところと小さい値(1.051~1.054)になるところがあります。間に半音がないシとの間隔が 1.054 なので、間に半音があるドとレの間隔は、シとの間隔2つ分になっているはずですが、ドの周波数 262 に 1.054 をかけると約 276, もう1度かけると約 291 になりますが、この値はレの周波数 295 と近い値です。このことから、ド#の周波数は約 276 になると考えられます。つまり、

$$262 \times 1.054 \approx 276 \quad \text{ド\#}$$

同じ計算を、レ#, ファ#, ソ#, ラ#について行います。

$$295 \times 1.054 \approx 311 \quad \text{レ\#} \qquad 349 \times 1.054 \approx 368 \quad \text{ファ\#}$$

$$393 \times 1.054 \approx 414 \quad \text{ソ\#} \qquad 442 \times 1.054 \approx 466 \quad \text{ラ\#}$$

解答例 2. 問題文の計算を続けて値を求めることもできます。

$$262 \div 3 \div 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 467 \quad \text{ラ\#}$$

$$262 \div 3 \div 3 \div 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 311 \quad \text{レ\#}$$

$$262 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 414 \quad \text{ソ\#}$$

$$262 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 276 \quad \text{ド\#}$$

$$262 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \div 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \approx 368 \quad \text{ファ\#}$$

解答例 3. 中学校3年の「平方根」を学習した人は次のように解くこともできます。

ド#はドとレの中間の音です。つまり、ドとレの平均の音がド#です。ただし、平均と言っても「足して2で割る平均」ではなく、「かけて平方根する平均」です。ド#はドとレをかけて平方根すると出てきます。他も同様です。つまり、

$$\sqrt{262 \times 295} \approx 278 \quad \text{ド\#}$$

同じ計算を、レ#, ファ#, ソ#, ラ#について行います。

$$\sqrt{295 \times 332} \approx 313 \quad \text{レ\#} \qquad \sqrt{349 \times 393} \approx 370 \quad \text{ファ\#}$$

$$\sqrt{393 \times 442} \approx 417 \quad \text{ソ\#} \qquad \sqrt{442 \times 497} \approx 469 \quad \text{ラ\#}$$

上の3つの解答例は正しい考え方の解答です。次の解答例は正しくない考え方です。しかし、ほぼ

正しい値が出てきます。

解答例 4. 「かけて平方根する平均」ではなく、「足して 2 で割る平均」で求めてみます。つまり、

$$(262 + 295) \div 2 \approx 278.5 \quad \text{ド\#}$$

同じ計算を、レ\#, ファ\#, ソ\#, ラ\#について行います。

$$(295 + 332) \div 2 \approx 313.5 \quad \text{レ\#} \qquad (349 + 393) \div 2 \approx 371.0 \quad \text{ファ\#}$$

$$(393 + 442) \div 2 \approx 417.5 \quad \text{ソ\#} \qquad (442 + 497) \div 2 \approx 469.5 \quad \text{ラ\#}$$

「足して 2 で割る平均」を**相加平均**、「かけて平方根する平均」を**相乗平均**といいます。問題文の説明でわかるように、音階はかけ算で定められています。なので、2 つの音の中間の音はかけ算の平均、つまり相乗平均で求めねばなりません。ただ、2 つの数が近いとき、相加平均と相乗平均の値は近くなります。これが解答例 4 は正しくない考え方なのに、ほぼ正しい値が出る理由です。

子どもたちの解答

問 2 で数値的にほぼ正しい答えを書いた人が中学生で 10 人、小学生で 1 人の計 11 人いました。しかし、そのうちの 10 人は上の解答例 4 の方法で解いていました。音階は「かけ算」で定まることを問題文の中で強調したつもりでしたが、ほとんどの子どもたちは「足して 2 で割る」方法で答えていました。

子どもたちの中に 1 人、「ドの 1.126 倍がレだから、小数部分だけを半分にして 1.063 倍したものがド\#」という方法で求めた人がいました。この方法は「足して 2 で割る方法」と計算上は同じですが、考え方がちょっと違うように思います。もし、この人が 1.063 が $\sqrt{1.126}$ の近似値になっていることを直感的に見通していたのなら、優れた数学的センスです。しかし、なぜこのような計算をしたのかの説明がなかったので、本当のところはわかりませんでした。

4. おわりに

数楽チャレンジ大会では、作問者の私自身非常に勉強になりました。NASA、国立天文台、国土地理院などが提供するデータは、数学の問題の宝庫だと思いました。このようなすばらしい大会を運営されている新城市教育委員会および新城市の先生方に感謝を申し上げます。数楽チャレンジ大会で出題された問題すべてをご覧になりたい方は、小西祥二先生のホームページ [1] でご覧ください。

参考 Web Sites

- [1] 数楽チャレンジ : <http://www.geocities.jp/cony01jp/math/mathmain.htm>
- [2] 国立天文台 火星とは : <https://www.nao.ac.jp/astro/basic/mars.html>
- [3] NASA Eclipse Web Site : <https://eclipse.gsfc.nasa.gov/eclipse.html>
- [4] 国立天文台 暦計算室 : <http://eco.mtk.nao.ac.jp/koyomi/>
- [5] 国土地理院重力測量 HP : http://www.gsi.go.jp/buturisokuchi/gravity_index.html