

# ベビーモンスター単純群と $E_7$ 型ディンキン図形

山内 博

愛知教育大学教育学部数学教育講座

## Babymonster simple group and $E_7$ Dynkin diagram

Hiroshi YAMAUCHI

Department of Mathematics Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

### 1. はじめに

本稿ではベビーモンスター  $B$  の 2A 元に関する性質をベビーモンスター頂点作用素代数を調べることによって, モンスター  $M$  の 2A 元及びムーンシャイン頂点作用素代数  $V^{\natural}$  の性質から帰納的に導く研究の概要を報告する。この研究の動機は  $M$  に現れる  $E_8$  図形の研究 (cf. [Mc, LYY1, LYY2, LM, S]) の類似を  $B$  と  $E_7$  の場合について求めることである。当初は  $M$  と  $E_8$  の場合の話を一  $B$  と  $E_7$  の場合に置き換えて, 愚直に類似を求める研究を行う予定であった。この研究の鍵となる  $M$  の 2A 元と  $V^{\natural}$  のイジング元との宮本の自己同型による一対一対応のベビーモンスター版を示した際に, ベビーモンスターの 2A 元とモンスターの 2A 元の間には興味深い帰納的構造があることに気づき, ムーンシャイン頂点作用素代数の対称性としてのモンスターの性質から帰納的にベビーモンスターの性質も決定できることが分かった。現在の研究により 24 次のフィッシャー群  $Fi_{24}$  と  $E_6$  図形の関係についても同様の類似が成り立つことが分かってきている。これらの成果は台湾国立成功大学の Ching Hung Lam 氏とカンザス州立大学の Gerald Höhn 氏との共同研究で得られたものである。

### 2. 軸巾等元

$M$  をモンスター単純群,  $\mathfrak{B}$  を 196884 次元グライス代数とする (cf. [G, C])。  $\mathfrak{B}$  は単位元をもつ非結合的単純可換代数であり, その全自己同型群は  $\text{Aut}(\mathfrak{B}) \cong M$  となっている (cf. [G, C, GMS, Ti])。そして  $M$  加群として  $\mathfrak{B}$  は次のような既約分解を持っている:

$$\mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{196883} \quad (2.1)$$

ここで  $\underline{m}$  は  $m$  次元の既約成分を表す。  $t \in M$  を 2A 元 [ATLAS] とすると, その中心化群はベビーモンスター単純群の二重被覆  $C_M(t) = 2 \cdot B$  であり, グライス代数  $\mathfrak{B}$  は  $C_M(t)$  加群として次のような既約分解を持つことが知られている (cf. [C, MN]):

$$\mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{1} + \underline{4371} + \underline{96255} + \underline{96256}. \quad (2.2)$$

この分解から不動点代数  $\mathfrak{B}^{C_M(t)}$  は 2 次元部分代数をなしており, ある巾等元  $e_t \in \mathfrak{B}^{C_M(t)}$  が存在して  $\mathfrak{B}$  の単位元  $1_{\mathfrak{B}}$  の直交巾等元分解  $1_{\mathfrak{B}} = e_t + (1 - e_t)$  に基づく単純分解  $\mathfrak{B}^{C_M(t)} = C e_t \oplus C(1_{\mathfrak{B}} - e_t) \cong C \oplus C$  が得られる。[C, MN] において  $e_t$  の  $\mathfrak{B}$  への作用が計算されており, その結果以下のようにになっている<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{B} = \underline{1} + \underline{1} + \underline{4371} + \underline{96255} + \underline{96256} \\ \text{ad}(2e_t) : \begin{array}{ccccc} 0 & 2 & 1/2 & 0 & 1/16 \\ t : \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \end{array} \quad (2.3) \end{array}$$

この表から,  $e_t$  の作用に関して  $\mathfrak{B}$  を固有空間分解することによって, 最初にとった 2A 元  $t \in M$  が復元できることが分かる。即ち巾等元  $e_t$  が与えられたならば, その随伴作用による  $\mathfrak{B}$  の固有空間を (2.3) のように求め, 固有値  $1/16$  の固有空間上 -1 倍, その補空間上恒等的に作用する線形写像として  $t \in M$  を再定義することができる。この考察から  $M$  の 2A 元と  $\mathfrak{B}$  の巾等元の間には対応  $M \ni t \rightarrow e_t \in \mathfrak{B}^{C_M(t)}$  があることが分かるが, 実はこの対応は単射になっている (cf. [C])。この事実から,  $e_t$  は  $t$  の定める軸巾等元 (axial idempotent) と呼ばれる。

#### 2.1 イジング元と宮本の自己同型

先ほどの軸巾等元の話をもつ頂点作用素代数のレベルで再考察しよう。フレンケル達によって構成されたムー

<sup>1</sup>  $\mathfrak{B}^{C_M(t)}$  の原始巾等元は  $e_t$  と  $1 - e_t$  の二つあり,  $\mathfrak{B}^{C_M(t)}$  の巾等元の選び方は一意ではないが, これらは  $\mathfrak{B}$  上異なる固有値を持つため, (2.3) で与えられる固有値を持つ巾等元は一意に決められる。

ンシャイン頂点作用素代数  $V^{\natural}[\text{FLM}]$  は  $V^{\natural} = \bigoplus_{n \geq 0} V_n^{\natural}$  と次数分解を持っており、ウェイト 2 の部分空間  $V_2^{\natural}$  には  $V^{\natural}$  の頂点作用素代数から誘導される可換代数構造が入ることが知られている。[FLM] において  $\text{Aut}(V^{\natural}) \cong M$  となることが示されているが、その証明においてはこの可換代数構造  $V_2^{\natural}$  がコンウェイによって再構成されたグライス代数  $\mathfrak{g}$  と同型になるという事実が鍵となっている。同型  $\mathfrak{g} \cong V_2^{\natural}$  において  $e_t$  を 2A 元  $t \in M$  の定める  $\mathfrak{g}$  の軸巾等元に対応する  $V_2^{\natural}$  の元とすると、 $e_t$  は  $V^{\natural}$  において中心電荷 1/2 のヴィラソロ元になっており、 $e_t$  の生成する部分代数  $\text{Vir}(e_t)$  は単純ヴィラソロ頂点作用素代数  $L(1/2, 0)$  と同型になる<sup>2</sup>。先ほど見たように、軸巾等元を取る対応によって、 $M$  の 2A 元から  $V^{\natural}$  の中心電荷 1/2 のヴィラソロ元が定まるが、この逆の対応も宮本の自己同型を考えることによって与えることができる。

$V$  を一般の頂点作用素代数、 $e$  を  $V$  のヴィラソロ元とする。 $e$  の生成する部分代数  $\text{Vir}(e)$  が  $L(1/2, 0)$  と同型になるとき、 $x$  をイジング元 (Ising vector) と呼ぶことにする。既約な  $L(1/2, 0)$  加群は  $L(1/2, h)$ 、 $h \in \{0, 1/2, 1/16\}$  の三つであり、全ての  $L(1/2, 0)$  加群は完全可約であることが知られている (cf. [DMZ, W])。そのため  $V$  は  $\text{Vir}(e)$  加群として次のような等型成分分解を持つ：

$$V = V_e(0) \oplus V_e(1/2) \oplus V_e(1/16) \quad (2.4)$$

ここで  $V_e(h)$  は  $L(1/2, h)$  と同型な  $\text{Vir}(e)$  部分加群の和を表す。等型成分分解 (2.4) に基づいて、 $V$  上の線形変換  $\tau_e$  を

$$\tau_e := \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0) \oplus V_e(1/2) \\ -1 & \text{on } V_e(1/16) \end{cases} \quad (2.5)$$

と定めると、これは頂点作用素代数の自己同型を定めることが分かっている (cf. [M1])。不動点部分代数  $V^{(\tau_e)} = V_e(0) \oplus V_e(1/2)$  上において線形変換  $\sigma_e$  を

$$\sigma_e := \begin{cases} 1 & \text{on } V_e(0) \\ -1 & \text{on } V_e(1/2) \end{cases} \quad (2.6)$$

と定めると、これも  $V^{(\tau_e)}$  の自己同型を定める (cf. [M1])。イジング元  $e \in V$  があればそこから自己同型  $\tau_e \in \text{Aut}(V)$ 、 $\sigma_e \in \text{Aut}(V^{(\tau_e)})$  が定まるが、これらは宮本の自己同型と呼ばれている。

話をムーンシャイン頂点作用素代数  $V^{\natural}$  に戻そう。 $\sigma_e \in V^{\natural}$  をイジング元とすると、 $\tau_e \in \text{Aut}(V^{\natural})$  は必ず  $M$  の 2A 元を定めることが知られている (cf. [Ma, M

1])。宮本の自己同型を対応させることで、イジング元から 2A 元が復元でき、これは丁度 2A 元から軸巾等元 = イジング元をとる操作の逆になっている。そのため、 $M$  の 2A 元と  $V^{\natural}$  のイジング元の間には宮本の自己同型をとる操作によって一対一対応が成り立つことが分かる。

定理 2.1 ([C, M1])  $V^{\natural}$  のイジング元と  $M = \text{Aut}(V^{\natural})$  の 2A 元の間には宮本の自己同型  $e \mapsto \tau_e$  により一対一対応が成り立つ。

この一対一対応より、群  $M = \text{Aut}(V^{\natural})$  の性質を代数  $V^{\natural}$  及びそのイジング元の性質から導くことができ、多くの応用が知られている。その一つとして最近佐久間氏によって示された 6 互換性の結果を紹介しよう。

$V$  を  $\mathbb{R}$  上で定義された頂点作用素代数であって、 $V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ 、 $V_0 = \mathbb{R}1$ 、 $V_1 = 0$  なる次数分解を持つと仮定する。このとき  $V$  には不変内積が定数倍を除いて一意に定まり (cf. [Li])、 $V_2$  には不変内積を持つ可換代数構造 (一般のグライス代数) が入る。内積を  $\langle 1, 1 \rangle = 1$  と正規化したとき、この内積が  $V$  上正定値であることも仮定する。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.2 ([S])  $e, f \in V$  をイジング元として、 $|\tau_e \tau_f| \leq 6$  が成り立つ。

この定理はモンスター単純群における  $E_8$  図形の研究への応用など、ムーンシャイン頂点作用素代数の対称性の研究に役立つ重要な結果である。

### 3. ルート系に付随するヴィラソロ元

$R$  を ADE 型のルート格子、 $\Phi(R)$  を  $R$  のルート系とする。 $\sqrt{2}R$  を  $R$  の内積を 2 倍した格子とし、 $V_{\sqrt{2}R}$  を  $\sqrt{2}R$  に付随する格子頂点作用素代数 (cf. [FLM]) とする。[DLMN] においてドン達はルート系に付随した  $V_{\sqrt{2}R}$  のヴィラソロ元を次のように構成した。

$$\tilde{\omega}_R = \frac{2}{h+2} \omega + \frac{1}{h+2} \sum_{\alpha \in \Phi(R)} e^{\sqrt{2}\alpha} \in V_{\sqrt{2}R} \quad (3.1)$$

ここで  $\omega$  は  $V_{\sqrt{2}R}$  の共形元、 $h$  は  $R$  のコクセター数を表す。 $V_{\sqrt{2}R}$  には自然に  $\Phi(R)$  のワイル群  $W(R)$  が作用しているが、表示 (3.1) より  $\tilde{\omega}_R$  は明らかに  $W(R)$  不変なヴィラソロ元であり、またその中心電荷は以下で与えられる：

$R$	$A_n$	$D_n$	$E_6$	$E_7$	$E_8$
c.c. of $\tilde{\omega}_R$	$2n/(n+3)$	1	6/7	7/10	1/2

(3.2)

<sup>2</sup>正確には  $2e_t$  がヴィラソロ元になるので、用語の乱用で  $x^2 = 2x$  となる  $x \in V_2^{\natural}$  を巾等元と呼ぶことにすれば  $x$  自身がヴィラソロ元となり、頂点作用素代数を考える場合には都合がよい。

<sup>3</sup>この名前の由来は二次元のイジング模型と呼ばれる可解格子模型の厳密解の計算においてフェルミオン演算子が自然に現れ、その極限として得られる共形場理論は  $L(1/2, 0)$  の対称性を持つため、 $L(1/2, 0)$  自身もしくはイジング模型と呼ばれるからである。

この表から特に  $V_{\sqrt{2}E_8}$  には  $E_8$  型ワイル群不変なイジング元が自然に含まれていることが分かる。 $V_{\sqrt{2}E_8}$  に含まれているイジング元と  $V^\natural$  に含まれているイジング元の間には深い関連があることが知られており、この関連を用いてマッカーイによる  $M$  における  $E_8$  型ディンキン図形の考察 [Mc] に関して興味深い研究が行われてきた (cf. [LYY1, LYY2, LM]).

本稿ではベビーモンスター単純群  $B$  と  $E_7$  型ディンキン図形に注目する。モンスターの場合と同様の類似が成り立つならば、 $\sqrt{2}E_7$  に付随する格子頂点作用素代数  $V_{\sqrt{2}E_7}$  に固有のヴィラソロ元が重要な役割を担うはずであり、その中心電荷の値は  $7/10$  である。 $t \in M$  を  $2A$  元として、 $t$  と可換な  $M$  の元のなす群は  $C_M(t) = 2.B$  であり、そのため  $2A$  元に対応する  $V^\natural$  のイジング元と可換な  $V^\natural$  の元のなす部分代数は自然に  $B$  の作用を持つ。この部分代数の対称性には中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ元が大きく関係している。

#### 4. ベビーモンスター VOA

$e \in V^\natural$  をイジング元として、 $\text{Vir}(e) \subset V^\natural$  の交換団部分代数を次で定義する。

$$\text{Com}_{V^\natural}(e) := \ker_{V^\natural} e_{(0)} \quad (4.1)$$

ここで  $e_{(0)} \in \text{End}(V^\natural)$  は  $e$  の頂点作用素  $Y(e, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_{(n)} z^{-n-1}$  の展開における係数として現れる線形変換である。頂点作用素代数の一般論から  $\text{Vir}(e)$  と  $\text{Com}_{V^\natural}(e)$  は互いに可換な  $V^\natural$  の部分代数になり、特に  $\text{Com}_{V^\natural}(e)$  自体も頂点作用素代数の構造を持つことが分かっている<sup>4</sup>。より精密に、部分代数の同型  $V_e^\natural(0) \simeq \text{Vir}(e) \otimes \text{Com}_{V^\natural}(e)$  が成り立つことも分かる。ここで  $V_e^\natural(0)$  は宮本の自己同型  $\tau_e$  を定義する際に使う等型成分分解 (2.4) に現れる部分空間である。定理 2.1 の一対一対応により、 $V^\natural$  のイジング元は  $\text{Aut}(V)$  のもとで全て互いに共役であり、それゆえ交換団  $\text{Com}_{V^\natural}(e)$  の構造はイジング元  $e \in V^\natural$  の取り方に依らず一意的に定まる。そこで

$$VB^\natural := \text{Com}_{V^\natural}(e) \quad (4.2)$$

としてベビーモンスター頂点作用素代数<sup>5</sup> を定める (cf. [Hö1, Y])。  $VB^\natural$  の名の由来はもちろん次の定理が成り立つことによる。

定理 4.1 ([Hö2, Y])  $\text{Aut}(VB^\natural) \simeq B$  .

$VB^\natural := \text{Com}_{V^\natural}(e)$  は  $V^\natural$  において  $e$  と可換な元のなす

部分空間であるが、この定理によりその全自己同型群は  $\tau_e$  と可換なものからくる群である  $C_M(\tau_e)/\langle \tau_e \rangle$  と同型になるという、 $V^\natural$  と  $M$  の間には強い帰納的構造 (inductive structure) が見てとれる。

##### 4.1 $VB_2^\natural$ の軸巾等元

ベビーモンスター頂点作用素代数  $VB^\natural$  はイジング元  $e \in V^\natural$  を一つ固定することに  $V^\natural$  への埋め込み  $\text{Vir}(e) \otimes VB^\natural \simeq V_e^\natural(0) \subset V^\natural$  が考えられる。そのため  $VB^\natural$  は  $VB^\natural = \bigoplus_{n \geq 0} VB_n^\natural$ 、 $VB^\natural = \mathbb{C}1$ 、 $VB_1^\natural = 0$  という次数分解を持ち、その次数 2 の空間  $VB_2^\natural$  は  $V^\natural$  のグライス代数  $V_2^\natural$  の部分代数を成している。分解 (2.3) より  $\dim VB_2^\natural = 1 + 96255 = 96256$  であり、 $B$  は  $96256$  次元の単位元を持つ可換代数に作用している。この代数をベビーモンスターのグライス代数と呼ぶことにしよう。 $s \in B$  をベビーモンスターの  $2A$  元とする。[ATLAS] より  $C_B(s) \simeq 2.^2E_6(2):2$  であり、 $C_B(s)$  加群として  $VB_2^\natural$  は次の様に分解する：

$$VB_2^\natural = \underline{1} + \underline{1} + \underline{1938} + \underline{48620} + \underline{45969} : \quad (4.3)$$

この分解より不動点部分代数  $(VB_2^\natural)^{C_B(s)}$  は 2 次元であり、モンスターのグライス代数の場合と同様に、あるヴィラソロ元  $f \in (VB_2^\natural)^{C_B(s)}$  が存在して  $(VB_2^\natural)^{C_B(s)} = Cf \oplus C(\omega - f) \simeq C \oplus C$  となる。この  $f$  の中心電荷の値は前節で述べた  $E_7$  型ルート系固有のヴィラソロ元の中心電荷  $7/10$  であることを期待して調べてみたところ、まさにその通りであることが分かった。

命題 4.2.  $(VB_2^\natural)^{C_B(s)}$  は中心電荷  $7/10$  及び  $114/5$  の互いに直交するヴィラソロ元で張られている。

上の命題及び分解 (4.3) より、 $B$  の各  $2A$  元  $s$  は  $(VB_2^\natural)^{C_B(s)}$  の中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ元を一意的に定めることが分かる。即ち  $B$  の  $2A$  元から  $VB^\natural$  の中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ元への単射対応が得られた訳である。残念なことにモンスターの場合と異なり、この対応はそのままでは一対一にはなっていない<sup>7</sup>。しかしながら、中心電荷  $7/10$  のヴィラソロ元が定める自己同型を調べて行くうちに興味深い帰納的構造を見出すことができた。

##### 4.2 三重臨界イジング元

さて、中心電荷  $1/2$  の単純ヴィラソロ頂点作用素代数  $L(1/2, 0)$  を用いると宮本の自己同型を構成することができたが、中心電荷  $7/10$  の場合はどうであろうか。

<sup>4</sup> $\text{Com}_{V^\natural}(e)$  の共形元は  $\omega$  を  $V^\natural$  の共形元として  $\omega - e$  で与えられる。

<sup>5</sup>この頂点作用素代数を初めて定義したのは G. Höhn であり、彼は  $VB^\natural$  のことを the shorter moonshine module と呼んでいる。

<sup>6</sup>枠付き頂点作用素代数の理論 (cf. [DGH, LY, M2]) を用いれば  $V^\natural$  を用いなくとも枠付き頂点作用素代数として直接  $VB^\natural$  を定義・構成することが可能である。

<sup>7</sup>当初一対一であろうと期待してなんとか証明しようと試みたもののうまくいかず、Lam 氏に相談したところ簡単に反例を提示されてしまった。

[ M1 ] において宮本氏は中心電荷が1/2の場合に限らず、極小離散系列もしくはBPZ系列 ( cf. [ BPZ ] ) と呼ばれる系列の中心電荷の単純ヴィラソロ頂点作用素代数のフュージョン規則の対称性を用いて頂点作用素代数の自己同型を構成しており、中心電荷1/2及び7/10はその中でもユニタリー系列 ( cf. [ GKO ] ) と呼ばれる系列に属している。そこで中心電荷7/10の単純ヴィラソロ頂点作用素代数  $L(7/10, 0)$  を用いて構成される宮本の自己同型を考えよう。一般の頂点作用素代数  $V$  のヴィラソロ元  $f$  であって、自身が生成するヴィラソロ頂点作用素部分代数  $\text{Vir}(f)$  が単純、即ち  $L(7/10, 0)$  と同型になるものを三重臨界イジング元 ( tricritical Ising vector )<sup>8</sup> と呼ぶことにする。

頂点作用素代数  $V$  に三重臨界イジング元  $f$  がある場合、次のように宮本の自己同型を構成することができる。  $\text{Vir}(f) \simeq L(7/10, 0)$  の既約加群は

$$L(7/10, 0), h \in \{0, 3/5, 1/10, 7/16, 3/80, 3/2\}$$

で尽くされ、また全ての  $L(7/10, 0)$  加群は完全加約である。それゆえ、 $V$  を  $\text{Vir}(f)$  加群として次のように等型成分分解することができる：

$$V = \bigoplus_{h \in \{0, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{7}{16}, \frac{3}{80}, \frac{3}{2}\}} V_f(h) \quad (4.4)$$

ここで  $V_f(h)$  は  $L(7/10, h)$  と同型な  $\text{Vir}(f)$  部分加群の和を表す。分解 (4.4) を用いて  $V$  上の線形変換  $\tau_f$  を以下のように定義する：

$$\tau_f := \begin{cases} 1 & \text{on } V_f(0) \oplus V_f(3/2) \oplus V_f(3/5) \oplus V_f(1/10) \\ -1 & \text{on } V_f(7/16) \oplus V_f(3/80) \end{cases} \quad (4.5)$$

このとき  $\tau_f \in \text{Aut}(V)$  となることが分かっている ( cf. [ M1 ] )。不動点部分代数  $V^{(\tau_f)} = V_f(0) \oplus V_f(3/2) \oplus V_f(3/5) \oplus V_f(1/10)$  上線形変換  $\sigma_f$  を以下のように定義する：

$$\sigma_f := \begin{cases} 1 & \text{on } V_f(0) \oplus V_f(3/5) \\ -1 & \text{on } V_f(3/2) \oplus V_f(1/10) \end{cases} \quad (4.6)$$

このとき  $\sigma_f \in \text{Aut}(V^{(\tau_f)})$  となる ( cf. [ M1 ] )。三重臨界イジング元  $f$  に付随して定まる自己同型  $\tau_f \in \text{Aut}(V)$  及び  $\sigma_f \in \text{Aut}(V^{(\tau_f)})$  をイジング元の場合と同様に宮本の自己同型と呼ぶ。三重臨界イジング元  $f$  に付随する  $V$  上の自己同型が  $\tau_f = 1$  となるとき、 $V$  において  $f$  は  $\sigma$  型であるという。

$s \in B$  を2A元として、 $(VB_2^3)^{C_B(s)}$  を考える。 $(VB_2^3)^{C_B(s)}$  は2次元であり、二つの互いに直交するヴィラソロ元

$f$  及び  $\omega - f$  で張られていた。命題4.2において  $f$  の中心電荷は7/10であったが、その証明を簡単に振り返ってみる。まず  $V^3$  のイジング元  $e$  を一つ取り、埋め込み  $\text{Vir}(e) \otimes VB^3 \simeq V_e^3(0) \subset V^3$  を固定する。  $M \simeq \text{Aut}(V^3)$  及び  $C_M(\tau_e) \simeq \langle \tau_e \rangle \cdot B$  に注意すると、全射準同型  $\pi : C_M(\tau_e) \rightarrow \text{Aut}(VB^3) \simeq B$  が自然に定まる。このとき  $\langle s \rangle \subset B$  の逆像  $\pi^{-1}(\langle s \rangle)$  は  $\ker \pi = \langle \tau_e \rangle$  より位数4になるが、頂点作用素代数の理論から2A-pure になることが証明できる<sup>9</sup>。よって、定理2.1より、あるイジング元  $e' \in V^3$  が存在して、 $[\tau_e, \tau_{e'}] = 1$ 、 $\pi(\tau_{e'}) = \tau_{e'}|_{VB^3} = s$  となることが分かる。このような二つのイジング元  $e$  及び  $e'$  で生成される頂点作用素部分代数の構造は良く分かっており ( cf. [ M1 ] )、不動点部分代数  $(VB_2^3)^{C_B(s)}$  のヴィラソロ元は  $e$  及び  $e'$  を用いて書き表すことができるため、命題4.2にあるヴィラソロ元は三重臨界イジング元であることが証明できるのである。より詳しく、この三重臨界イジング元を  $f$  とすると、 $f$  は  $VB^3$  上  $\sigma$  型であり、 $s \in B = \text{Aut}(VB^3)$  は  $f$  に付随する  $\sigma$  型の宮本の自己同型と等しいことも分かる。その結果、定理2.1の応用の一つとして次の一対一対応を得ることができる。

定理4.3.  $VB^3$  の  $\sigma$  型三重臨界イジング元と  $\text{Aut}(VB^3) \simeq B$  の2A元の間には  $\sigma$  型の宮本の自己同型で与えられる対応  $f \mapsto \sigma_f$  により一対一対応がつく。

この議論において特に注目したいのは、任意の2A元  $s \in B \simeq C_M(\tau_e)/\langle \tau_e \rangle$  に対して、あるイジング元  $e' \in V^3$  が存在して、 $\tau_{e'} \in C_M(\tau_e)$  かつ  $\tau_{e'}|_{VB^3} = s$  となる事実である。これは  $B$  の2A元の情報は  $M$  の2A元の性質から決まってしまうことを意味し、特に  $B$  の2A元は大きく見積もっても6 互換性を持つことが分かる。 $V^3$  において二つのイジング元で生成される部分代数には大きな制約・関係式が入っており ( cf. [ LYY2 ] )、その構造を詳細に調べることで次の  $B$  の  $\{3, 4\}$  互換性を定理2.2の帰納的帰結として得ることができる。

定理4.4. 二つの2A元  $s, s' \in B$  について、 $|\langle ss' \rangle| \leq 4$  が成り立つ。

この事実はもちろん散在型単純群の理論によって知られていたものであるが、頂点作用素代数の理論からも導出・再解釈することができるのである<sup>10</sup>。

## 5. $E_7$ 図形の由来

[ Mc ] においてマッカイはフィッシャー群、ペビエモンスター及びモンスターと  $E_6, E_7$  及び  $E_8$  型図形の

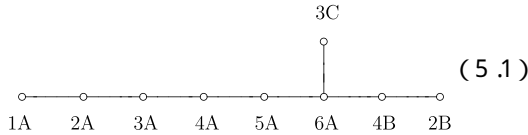
<sup>8</sup>この名前の由来もイジング元の場合と同様で、 $L(7/10, 0)$  に付随する共形場理論が三重臨界イジング模型と呼ばれるためである。

<sup>9</sup>これは  $N_{M_1}(2A^2) \simeq 2^2 \cdot 3 E_6(2) : S_3$  という群構造 ( cf. [ ATLAS ] ) から分かるが、散在型単純群の理論を使わなくとも示すことができる。

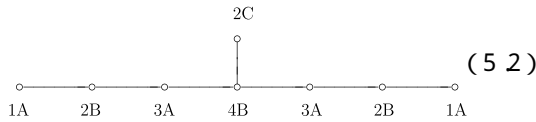
<sup>10</sup>もちろん、(4.3)の分解を得る際に[ ATLAS ]を使っているため、完全に散在型単純群の理論を使わない訳ではない。この分解(4.3)を頂点作用素代数の理論だけから導出するのは今後の研究課題の一つである。

間の奇妙な関係を見出し・発表した。ここではモンスター及びベビーモンスターの関係について考える。

$a, b \in M$  を  $2A$  元, 即ち  $2A$  共役類に属する元とする。積  $ab$  の属する共役類を  $(ab)^M$  で表すとき,  $(ab)^M$  は  $1A, 2A, 3A, 4A, 5A, 6A, 4B, 2B, 3C$  のいずれかになる (cf. [C])。ここに現れる数字が丁度  $E_8$  型ディンキン図形の最高ウェイトのラベルに一致することをマッカイ [Mc] は発見した:



同様に,  $x, y \in B$  を (ベビーモンスターの)  $2A$  元とし,  $(xy)^B$  をその積が属する (ベビーモンスターにおける) 共役類とすると,  $(xy)^B$  は  $1A, 2B, 3A, 4B, 2C$  のいずれかになり, これらの数字は  $E_7$  型ディンキン図形の最高ルートのラベルに一致する:



24次のフィッシャー群  $Fi_{24}$  と  $E_6$  型ディンキン図形の間にも同様の関係がある。

この三つの散在型単純群と例外型ディンキン図形の間には何か自然な数学的な構造が潜んでいるのではないかと問題が考えられる。定理 (2.1) より  $M$  の  $2A$  元と  $V^3$  におけるイジング元の間には一対一対応があり, また (3.2) よりイジング元は  $E_8$  型ルート格子特有のヴィラソロ元と考えることができる。このアイデアに注目して [LYY1, LYY2] では格子頂点作用素代数  $V_{\sqrt{2}E_8}$  のイジング元を研究し, 丁度定理 2.2 にある関係が全て  $V_{\sqrt{2}E_8}$  で実現されることを示した。さらに [LM] によって  $V^3$  において二つのイジング元が生成する部分代数の構造は [LYY1] で考えられた  $V_{\sqrt{2}E_8}$  において二つのイジング元が生成する部分代数のものと全く同じであることが示された。これらの結果から, (5.1) にある図形のラベルと共役類の間に明確な対応をつけることができる。

同様の話は  $B$  と  $E_7$  の場合にも考えられるが, 今回の研究ではこれまで見てきた  $M$  と  $V^3$  の間の強い帰納的構造に注目し,  $M$  と  $E_8$  の関係から  $B$  と  $E_7$  の間の関係が自動的に導かれることが分かった。その詳細は論文 [HLY] にゆずるとして, ここではその概要を述べる。定理 4.3 より  $B$  の  $2A$  元と  $VB^3$  の三重臨界イジング元の間には一対一対応があり, また三重臨界イジング元は  $V_{\sqrt{2}E_7}$  に固有のヴィラソロ元であるため,  $BV^3$  と  $V_{\sqrt{2}E_7}$  の三重臨界イジング元の間には一対一対応があり, また  $V_{\sqrt{2}E_7}$  の三重臨界イジング元と  $V_{\sqrt{2}E_8}$  の三重臨界イジング元の間には一対一対応があり, また  $V_{\sqrt{2}E_8}$  の三重臨界イジング元と  $V_{\sqrt{2}E_7}$  の三重臨界イジング元の間には一対一対応がある。ここで包含関係  $L^{(1/2, 0)} \otimes VB^3 \subset V^3$  及び  $V_{\sqrt{2}A_1} \otimes V_{\sqrt{2}E_7} \subset V_{\sqrt{2}E_8}$  を考えると,  $VB^3$  と  $V_{\sqrt{2}E_7}$  の三重臨界イジング元の間には一対一対応がある。

$V_{\sqrt{2}E_8}$  のイジング元の間には一対一対応があることが分かり, その帰結として (5.2) にあるラベルと共役類の対応に明確な説明がつけられる。この方法の良い点は個別の議論を回避して, すでに分かっている  $M$  と  $E_8$  のケースから  $B$  と  $E_7$  のケースを解いている点と, さらに (5.2) において (拡大)  $F_4$  型ディンキン図形ではなくて (拡大)  $E_7$  型ディンキン図形を使う自然な理由を与えられる点にある。  $M$  において  $B$  はそのままでは含まれておらず, その二重被覆  $2.B$  という形で埋め込まれている。一方,  $E_7$  は  $E_8$  において  $A_1$  を補格子に持ち,  $A_1 \oplus E_7 \subset E_8$  がちょうど指数 2 で含まれており, どちらの場合も丁度 2 倍された状態で考えると系列的に考えることができるのである。

最後に, マッカイが見つけた  $Fi_{24}$  と  $E_6$  の間の関係も  $M$  と  $E_8$  の関係から帰納的に説明がつけられることが現在までの研究で大方分かっており, こちらについても [HLY] にてその詳細を発表する予定であることを付け加えさせて頂く。

### 参考文献

[ATLAS] J. H. Conway, R. T. Curtis, S. P. Norton, R. A. Parker and R. A. Wilson, ATLAS of finite groups, Clarendon Press, Oxford, 1985.

[BPZ] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, and A. B. Zamolodchikov, Infinite conformal symmetries in two-dimensional quantum field theory, *Nucl. Phys. B* **241** (1984) 333-380.

[C] J. H. Conway, A simple construction for the Fischer-Griess monster group, *Invent. Math.* **79** (1985) 513-540.

[DGH] C. Dong, R. L. Griess and G. Höhn, Framed vertex operator algebras, codes and the moonshine module, *Comm. Math. Phys.* **193** (1998) 407-448.

[DLMN] C. Dong, H. Li, G. Mason and S. P. Norton, Associative subalgebras of Griess algebra and related topics, Proc. of the Conference on the Monster and Lie algebra at the Ohio State University, May 1996, ed. by J. Ferrar and K. Harada, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1998.

[DMZ] C. Dong, G. Mason and Y. Zhu, Discrete series of the Virasoro algebra and the moonshine module, Proc. Symp. Pure Math., American Math. Soc. **56** (1994) 295-316.

[FLM] I. B. Frenkel, J. Lepowsky and A. Meurman, Vertex Operator Algebras and the Monster, Academic Press, New York, 1988.

[FZ] I. B. Frenkel and Y. Zhu, Vertex operator algebras associated to representation of affine and Virasoro algebras, *Duke Math. J.* **66** (1992) 123-168.

[GKO] P. Goddard, A. Kent and D. Olive, Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras, *Comm. Math. Phys.* **103** (1986) 105-119.

[G] R. L. Griess, The friendly giant, *Invent. Math.* **69** (1982) 1-102.

[GMS] R. L. Griess, U. Meierfrankenfeld and Y. Segev, A uniqueness proof of the Monster, *Ann. of Math.* **130** (1989) 567-602.

[Hö1] G. Höhn, Selbstduale Vertexoperatoralgebren und das Babymonster, Ph. D. thesis, Bonn 1995.

[Hö2] G. Höhn, The group of symmetries of the shorter moonshine module, math. QA/0210076.

- [ HLY ] G. Höhn, C. H. Lam and H. Yamauchi, The moonshine vertex operator algebra and an inductive structure associated to the Babymonster, preprint.
- [ KMY ] M. Kitazume, M. Miyamoto and H. Yamada, Ternary codes and vertex operator algebras, *J. Algebra* **223**( 2000 ) 379-395.
- [ LM ] C. H. Lam and M. Miyamoto, Niemeier lattices, Coxeter elements, and McKay's  $E_8$ -observation on the Monster simple group, *Internat. Math. Res. Notices* Article ID 35967 ( 2006 ) 1-27.
- [ LYY1 ] C. H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, Vertex operator algebras, extended  $E_8$ -diagram, and McKay's observation on the Monster simple group, *Trans. Amer. Math. Soc.* **59** ( 2007 ) 4107-4123.
- [ LYY2 ] C. H. Lam, H. Yamada and H. Yamauchi, McKay's observation and vertex operator algebras generated by two conformal vectors of central charge  $1/2$ , *Internat. Math. Res. Papers* **3** ( 2005 ) 117-181.
- [ LY ] C. H. Lam and H. Yamauchi, On the structure of framed vertex operator algebras and their pointwise frame stabilizers, to appear in *Comm. Math. Phys.*, math. QA/0605176.
- [ Li ] H. Li, Symmetric invariant bilinear forms on vertex operator algebras, *J. Pure Appl. Algebra* **96**( 1994 ) 279-297.
- [ Ma ] A. Matsuo, Norton's trace formulae for the Griess algebra of a vertex operator algebra with larger symmetry, *Commun. Math. Phys.* **224**( 2001 ) 565-591.
- [ Mc ] J. McKay, Graphs, singularities, and finite groups, *Proc. Symp. Pure Math.*, Vol. **37**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, pp. 183-186.
- [ MN ] W. Meyer and W. Neutsch, Associative subalgebras of the Griess algebra, *J. Algebra* **158**( 1993 ) 1-17.
- [ M1 ] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179**( 1996 ) 528-548.
- [ M2 ] M. Miyamoto, A Hamming code vertex operator algebra and construction of vertex operator algebras, *J. Algebra* **215**( 1999 ) 509-530.
- [ M3 ] M. Miyamoto, 3-state Potts model and automorphisms of vertex operator algebras of order 3, *J. Algebra* **239**( 2001 ) 56-76.
- [ S ] S. Sakuma, 6-transposition property of  $\tau$ -involutions of vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices*( 2007 ) article ID rmm030, 19 pages, math. QA/0608709.
- [ SY ] S. Sakuma and H. Yamauchi, Vertex operator algebra with two Miyamoto involutions generating  $S_3$ , *J. Algebra* **267**( 2003 ) 272-297.
- [ Ti ] J. Tits, On R. Griess' "Friendly Giant," *Invent. Math.* **78** ( 1984 ) 491-499.
- [ W ] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Internat. Math. Res. Notices* **71**( 1993 ) 197-211.
- [ Y ] H. Yamauchi, 2A-orbifold construction and the baby-monster vertex operator superalgebra, *J. Algebra* **284**( 2005 ) 645-668.

(平成19年9月18日受理)