数学的活動を通して創造する力を育てる授業づくり

―「関数領域」での教科書分析に基づくカリキュラムに焦点を当てて―

教職実践基礎領域
大野　貴弘

序章

ビッグデータの時代が到来し、人工知能（AI）が一部の分野では人間の能力を超えるようになった。キャシー・デビッドソンは*「2011 年度にアメリカの小学校に入学した子供たちの 65%は、大学卒業時に今は存在していない職業に就くだろう」と述べている。

これからの時代は、知識の量が多く、計算が素早くでき、答えの分かりきった問題が解けるだけの能力では対応できない。問題の意味を考えて、文脈を解釈して、新しいアイデアを見つけたり、他の方法を考えたりする能力が求められる。新井仁(2007)は、これまでの数学教育では、数学が「わかり」「できる」ことに重点がおかれるあまり、わかる前に数学を「つくる」こと、できた後に数学を「使う」ことが充実していなかったのではないか、と述べている。これを踏まて「つくる」ことで創造する力、「使う」ことで解決する力を育成しようと考える。

本稿では、アクティブ・ラーニング（主体的・対話的で深い学びの実現）を私なりに解釈して、関数指導の在り方に焦点を当てて研究を行った。私は教職大学院での学びに加えて、専門的に数学教育を学んできた。

本研究は、教職大学院に教科教育を取り入れようという今後の新しい試みに乗っ取り、教職大学院でのこれからの教科教育の視点の一歩としたいと考えている。

第１章　主題設定の理由

1.1　アクティブ・ラーニングの経緯

2014 年 11 月に文部科学大臣の中央教育審議会への諮問（初等中等教育における教育課程の基準の在り方について）が話題となったときに、アクティブ・ラーニングという言葉が世に出回るようになった。アクティブ・ラーニングとは、以下のことを言う。

> アクティブ・ラーニングの定義（文部科学省）
>
> 教員による一方的な講義形式の教育とは異なり、学修者の能動的な学修への参加を取り入れた教授・学習法の総称。学修者が能動的に学修することによって、認知的、倫理的、社会的能力、教養、知識、経験を含めた汎用的能力の育成を図る。発見学習、問題解決学習、体験学習、調査学習等が含まれるが、教室内でのグループ・ディスカッション、ディベート、グループ・ワーク等も有効なアクティブ・ラーニングの方法である。

アクティブ・ラーニングとは、もともとは米国の大学教育改革の中で生まれた考え方であり、アクティブ・ラーニングの原著と言われるボンウェルとアイソン（1991）では、アクティブ・ラーニングの一般的特徴として５点(a)～(e)があげられている。その中で(c)と(d)の２つを紹介する。

(c) 学生は高次の思考（分析、統合、評価）に関わっていること

(d) 学生は活動（読む、議論する、書くなど）に関与していること

上記の２つから、活動を通して、深い学びをしていくことの大切さを強調している。また、松下佳代（2015）は単なるアクティブ・ラーニングではなく、ディープなアクティブ・ラーニングとして、ディープ・アクティブラーニングを提唱している。ディープ・アクティブラーニングとは、学生が他者と関わりながら、対象世界を深く学び、これまでの知識や経験と結びつけると同時にこれからの人生につなげていけるような学習のことである。学習の形態に焦点を当てることも大切だが、学習の質や内容にも焦点を当てることを忘れてはいけないと警告している。つまり教師が教科書分析をして内容理解の質をあげることで、生徒の深い学びにつながるのである。それを踏まえて、私は関数という学習内容について研究をした。

以上アクティブ・ラーニングに関わる一連の考え方や先行研究などを述べてきたが、アクティブ・ラーニングと同じような思想や考え方や理論が数学教育学になかったのかを考察していく。そして、アクティブ・ラーニングの捉え方を次節以降で述べていきたい。

1.2　算数・数学科におけるアクティブ・ラーニング

ここでは、算数・数学科でのアクティブ・ラーニングを考える。結論から言えば、数学教育学には従来からアクティブ・ラーニングと同様な考え方があった。多くの数学教育学の研究者（江森 2016、熊倉 2016、佐々木 2015 など）がアクティブ・ラーニングは数学的活動と捉えている。例えば、長尾篤志（2016）も数学的活動のプロセスを身に付け、いろいろな場面で数学的な問題を見いだし、数学的な見方・考え方を働かせて考察する態度が深い学びであると述べている。また、山田篤史（2015）でも、アクティブ・ラーニング

の定義（文部科学省）は具体的な形式も算数・数学には馴染みのあるもので、児童・生徒の主体的・能動的参加を伴った算数的・数学的活動を通した学習の実現が、今後はより一層求められる、と述べている。文部科学省（算数・数学ワーキンググループ（第１回）における主な意見）には、「アクティブ・ラーニングという言葉の背景には、算数・数学そのものの算数的活動や数学的活動を充実するという今回のポイントを非常にうまく反映した形で実現できるのではないかと期待している。」という内容がある。数学的活動の充実こそが、アクティブ・ラーニングそのものである。

1.3　数学的活動について

数学的活動とは、「生徒が目的意識をもって主体的に取り組む数学にかかわりのある様々な営み」と定義されている（中学校学習指導要領解説数学編―平成 20 年告示）。そこで、数学的活動のうち、特に中学校数学科で重視しているのは「ア　数や図形の性質などを見出す活動」「イ　数学を利用する活動」「ウ　数学的に説明し伝え合う活動」の３つである。ここで強調しておきたいのは、生徒が数学的活動をするための特設的な授業をするのではなく、普段の授業の中で小さくとも数学的活動がある。そのためには、教師の手立てが大切であり、毎回毎回の授業の中でしかけていく。具体的な手立てとしかけは実践の第３章以降で述べることにする。

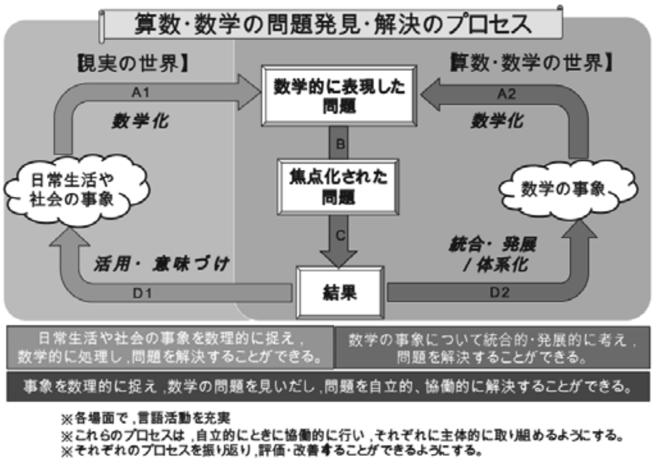
さて、本節では数学的活動の理論研究を記していく。

ハンス・フロイデンタール	数学的活動の本質は「数学化」である。「数学化」には、現実を数学化すること（現実を数学的手段にアクセスでき、数学的洗練にアクセスできる構造に整理、組織する活動）と数学を数学化すること（現実の数学化に続く数学を数学的手段により、一般化、拡張、形式化、公理化という洗練に向け、整理・組織する活動）の二つがある。
平林一榮	もともと数学は、数学者の内なる創造である。それを子どもの内部での再生産という形で学習するという「活動主義」が重要である。
島田茂	既成の数学の理論を理解しようとして考えたり、あるいは新しい理論を求めようとして考えたり、数学を何かに応用して、数学外の問題を解決しようとしたりする、数学に関係した思考活動を、一括して数学的活動と呼ぶ。

数学教育に数学的活動という言葉を導入したのは、オランダのハンス・フロイデンタールであると言われている。フロイデンタールの主張は「人間の活動としての数学」という考え方を基にして、児童・生徒は活動を通して算数・数学を経験する必要性を示唆している。

次に数学的活動の場面を意識して授業をするために、その指標となるモデルを示す。

下の図の「算数・数学の問題発見・解決の過程」（中央教育審議会教育課程部会算数・数学 WG）では、数学的活動をこの図のモデルを回すことと改めて位置づけられる。



「数学的活動」＝「上の図のモデルを回すこと」

これは、フロイデンタールの主張とほぼ同じ趣旨のものであると、私は解釈している。サイクルを回しているＡ１、Ａ２、B、C、D1、D1 について説明を加えておく。

問題解決（数学的活動）の過程	
Ａ１	日常生活や社会の問題を数理的に捉えることについて
Ａ２	数学の事象における問題を数学的に捉えることについて
B	数学を活用した問題解決に向けて、構想・見通しを立てることについて
C	焦点化した問題を解決することについて
D１	解決過程を振り返り、得られた結果を意味づけたり、活用したりすることについて
D２	解決過程を振り返るなどして概念を形成したり、体系化したりすることについて

数学の学習は、今まで学んできた知識を活用しながら、新しい性質や定理を見つけていく活動にこそ面白さがある。既習内容に帰着させて、そこから新しいアイデアをつくる活動に「驚き」「達成感」「成就感」を味わうのだ。すなわち、これから求められる創造する力を養っていきたい。そのため本研究では、数学的活動の「ア　数や図形の性質などを見出す活動」に焦点を当てる。

以上の先行研究からも分かるように数学的活動は

広い。授業実践をするにあたり単元全体を通して行う活動を大きな数学的活動、授業の一部にある活動を小さな数学的活動と呼ぶことにする。

1.4　数学的活動と創造する力との関連

一般に創造する力とは、新しいものをつくりだす力のことを指す。しかし、本研究における創造する力とは、初めから新しいものをつくるのではなく、解決するためにはどうすべきかを考えることを指す。言い換えると、問題に対して数学的なアイデアを使う力である。

創造的な活動を強調した中島健三（1981）の研究を参考にする。中島は、「数学的な考え方」とは『算数・数学にふさわしい創造的な活動が自主的にできるようにすること』である」とし、その創造的な過程の体験を子どもに積み重ねることの必要性を述べている。

「算数や数学で、子どもにとって新しい内容を指導しようとする際に、教師が既成のものを一方的に与えるのではなく、子どもが自分で必要を感じ、自らの課題として新しいことを考え出すように、教師が適切な発問や助言を通して仕向け、結果において、どの子どもも、いかにも自分で考え出したような感激をもつことができるようにする」と主張した。

そして、「数学的な考え方」の構造と創造のための論理として、次を挙げている。

1.課題を簡潔、明確、統合などの観点をふまえて把握すること
2.仮想的な対象の設定と実在化（実体化）のための手法
3.解決の鍵としての「数学的なアイデア」の存在とその意識づけ
4.「構造」の認識と保存
5.評価－解決の認識とその真価の感得、残された問題と発展への志向－

創造的な活動がもつべき構造の５つの理論のうち、解決の鍵となる「数学的なアイデア」に注目する。新しいものを作っていくためには、その材料が必要である。その材料をデザインして、組み立てていくことで新しいものをつくることができる。数学では、デザインする力が「数学的なアイデア」である。生徒がアイデアに気付くことができるようなしかけをしていく。

また中島は、創造的な問題解決を遂行するために、その過程では必然的にいくつかの推論が行われ、全体として道筋の通ったものでなければならないと述べている。そこで、推論の形式として、３つのタイプを紹介する。

演繹（deduction）による推論	「一般」をもとに、それに該当する「特殊」な事例について判断すること
帰納（induction）による推論	「特殊」ないくつかの事例をもとに、どれにも成り立ちそうなこと
類比（analogy)による推論	何らかの相似があることをもとにして推論すること

きまりを見出すといった創造する力の育成を目指す理論研究は他にもある。そのうち、学習指導要領の数学的活動のうち中学校数学科で重視している３つの活動とリンクしているのが、長崎ら（2007）の算数・数学の力の研究である。算数・数学の力は、「算数・数学を生み出す力」、「算数・数学を使う力」、「算数・数学で表す力」、「算数・数学で考え合う力」の４つで構成されている。そのうち「算数・数学を生み出す力」は、「数学的な考え方」に関連していて、新しい考えを創り出していく側面と、その考え方を証明によって確固たる体系にしていく側面があると述べられている。

第２章　関数指導について

2.1　関数の意味の理解の困難性について

関数の意味を問う問題として全国学力学習状況調査（中学校数学）の問題を紹介する。

9　下のアからオまでの中に，y が x の関数であるものがあります。正しいものを１つ選びなさい。

ア　生徒数が x 人の学校の校庭の面積 y m^2

イ　底面積が x cm^2 の直方体の体積 y cm^3

ウ　身長が x cm の人の体重 y kg

エ　自然数 x の倍数 y

オ　整数 x の絶対値 y

（平成 25 年度数学 A 問題 9）

9　下の表は，ある運送会社の書類の宅配サービスの料金表です。

重量	100 g まで	250 g まで	500 g まで	1 kg まで
料金	150 円	190 円	270 円	320 円

このサービスで扱える書類の重量は 1 kg までです。

このとき，1 kg までの書類の重量と料金について，「重量を決めると，それにともなって料金がただ１つ決まる」という関係があります。

下線部を，次のように表すとき，$\boxed{①}$ と $\boxed{②}$ に当てはまる言葉を書きなさい。

$\boxed{①}$ は $\boxed{②}$ の関数である。

（平成 26 年度数学 A 問題 9）

平成 25 年の全国平均の正答率は 13.8％であり、平成 26 年の全国平均の正答率は 36.7％である。このことから、多くの生徒が関数の意味を理解できていない現状が分かる。私の実践でも検証問題として上記の問題を実施し、理解の定着を試みる。

2.2　関数をどのように教えるのか

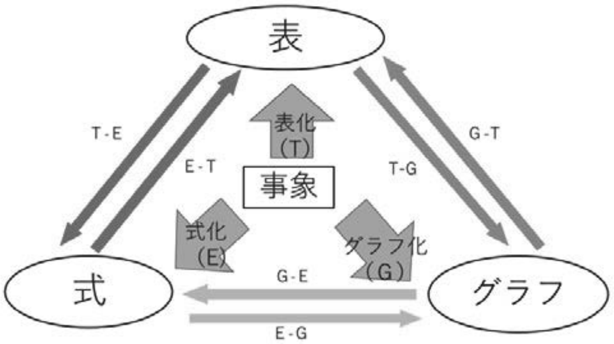
私たちの身の回りの変化を捉えるときに関数はとても重要な考え方であるとして、フェリックス・クラインや小倉金之助などによって今から約100年前に学校数学に導入された。小倉金之助は、「数学教育の核心は関数概念の養成にある。」と述べていて今までの方程式などの計算分野（代数）と図形分野（幾何）を分離するのではなく、関数の考えによって数学のカリキュラムが見直された。そのため関数は新しい考え方であると言える。

関数は現代数学では「２つの集合の間の一意対応、あるいは集合 A から集合 B への一意対応」であると定義される。理解しづらい定義であるため、中学校では「ともなって変わる x、y があり、x を決めると y がただ一つに決まるとき、y は x の関数である」としている。式で表現できるもののみを関数と捉えている人が多いのではないかと考える。

杉山吉茂(2009)は、関数のための関数指導ではなく、関数と見ることによって、問題の中にある特徴が明らかになり、そこにある法則や特徴を利用して、問題を解決することができることがあるので、関数の勉強をすると、述べている。

2.3　関数における数学的なアイデアについて

関数は式、表（関数表）、グラフを用いて表現されることを理解させたい。その際に、式、表、グラフは関数を表現するための方法、アイデアであるので、３つの表現の結びつきを図式化した。



一意対応の表現形式（著者作成）

さらに関数の意味に関するアイデアを分類した。

（α）決めれば決まる（対応のアイデア） （β）変われば変わる（変化のアイデア） （γ）数量を変化させる（変数のアイデア）

第３章　研究構想

3.1　連携協力校における生徒の実態

連携協力校の中学校第１学年における生徒の実態を述べる。４月からサポーター活動での観察から、授業中に挙手発言をする生徒が多く、多様な意見が出る。授業に集中して取り組む様子が見られ、数学ができるようになりたいという思いがひしひしと伝わってくる。実習前に一年生128名にアンケートを行ったところ約87%の生徒が、数学ができるようになりたいと回答した。この結果から、数学の学習に対する意欲が高いことが分かる。一方で、生活と数学の結びつきを考えたり、根拠をもとにして考えたり、答えが分かればいいと言った風潮がある。解答に至った数学的なアイデアや考え方に着目しているというより、解法の暗記に偏っている生徒もいるような印象を受ける。関数の学習でも、数学的な根拠や言葉の意味を考えることが苦手であると考える。

＜目指す生徒像＞

数学を創造する活動に楽しむことができる生徒

教師がいなくても自分で数学の学習を進めることができる生徒を育てたい。しかし、数学の学習では特有の考え方がある。その特有の考え方を身に付けて、考えることが楽しいと感じてほしい。特に、新しい性質を見つけるなど数学をつくっていく過程で楽しさを感じてほしい。そこで仮説を以下に設定した。

3.2　研究仮説

数学的活動と関数指導のカリキュラムを分析することによって、数学を創造する力が育つことになるだろう。

3.3　授業実践のための具体的な手立て

（１）カリキュラム分析

教師力向上実習Ⅱでは中学校第１学年の関数領域「４章　変化と対応」(啓林館）で授業実践を行うにあたり、基礎ゼミで志水廣先生にご指導をいただきながらカリキュラム分析を行った。カリキュラム分析においては大切な観点は次の３点である。

①教科書比較を行う。
②教科書の構成要素を細分化する。
③構成要素の関連づけを行う。

この分析で明確になったことを一つ紹介する。

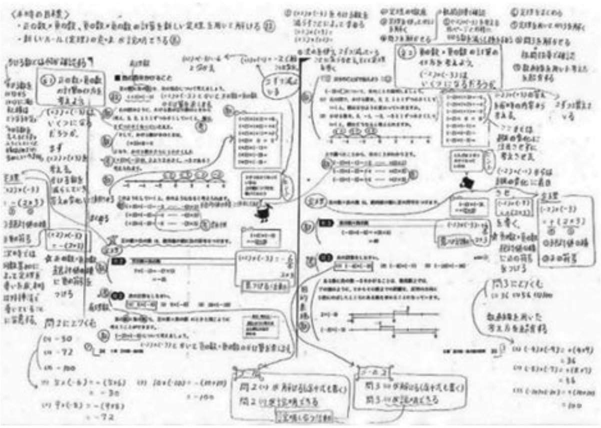
・関数であることを判断するために事例の不足

「y は x の関数であるといえますか」という問題があるが、それを判断するための考え方の事例が不足している教科書が多かった。実習では関数であるかを判断するたしかめ問題を多く取り上げた。

（２）ミニ指導案

教師力向上実習Ⅰ、Ⅱでは授業を行う範囲のミニ指導案を作成した。ミニ指導案とは、（志水 2006）によると、教科書を縮小コピーして、直接書き込んで教科書の内容理解から教材研究をはじめる方法である。私は教科書の中のどの場面に小さな数学的活動があるかを、次の６つのステップで分析した。

①教科書の問題を解く。
②授業後に生徒が解けてほしい問題を設定する。
③定義と定理（性質）を区別する。
④生徒のつまずきを予想する。
⑤教科書の行間を埋めるための問題を考える。
⑥数学的活動を導くための発問を作る。

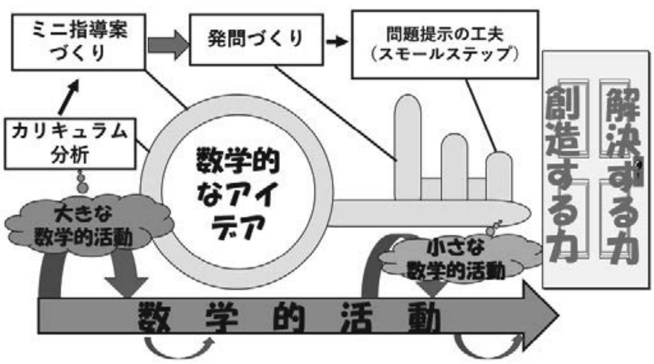


ミニ指導案の例

（３）問題提示の工夫（スモールステップ）

問題を提示するときに、いきなり全部を見せない。一部を見せて答えが求まるかを生徒に考えさせる。そして、徐々に定式化させた問題に落とし込む。教師が一方的に問題を提示するのではなく、生徒との対話の中であたかも教室のみんなで問題をつくったかのような問題提示行った。

3.4　研究構想図



第４章　研究の実際と検証

4.1　検証授業の概要（教師力向上実習Ⅱ）

＜調査対象＞

中学校第１学年　１２９名（４クラス分）

＜単元名＞

「変化と対応」（全１７時間）

4.2　質的研究

中教審教育課程部会算数・数学 WG が示した「算数・数学の問題発見・解決の過程」と一意対応の表現形式に従って、ディスコース分析を行った。

Ａ２　数学の事象における問題を数学的に捉えることについて

Ｔ：教師　　Ｓ：生徒　　SS：複数の生徒

T	今日は、小物箱の話から授業に入っています。
T	四隅から３ｃｍ切り取った正方形を A とします。
T	今度は四隅から５ｃｍ切り取ったものを B とします。
T	A と B の違い分かる？同じ１６ｃｍの正方形から切り取っています。どこが違う？
S4	切った大きさ。　－（γ）
T	そうそう。切った大きさって、どこの部分かな？
S5	白い部分（展開図の部分)。　－（γ）
T	まだある？
S6	建てたときの高さが違う。　－（γ）
T	賢いね。さあ、実際に小物箱 B を見せます。頭の中で想像してごらん。
SS	全然違う。
T	今、全然違うって言ってくれたけど、何が違う。二つの小物箱の違いは何ですか？
S7	高さの部分が違う。　－（γ）
T	（青色の小物箱を指して）具体的に言うと、ここの部分かな。ここが確かに違う。
T	じゃあ、次。
S8	底の大きさ。　－（γ）
S10	高さ、そこの大きさ。　－（γ）
T	いい意見だ。まだあるよ。
S11	側面の大きさ。　－（γ）
T	（二つの小物箱を指して）ここの部分かな。まだ、あるよ。
S12	面積
T	面積？
S13	体積、面積？　いや、容積。　－（γ）

小物入れ箱づくりという身近な話題から、ともなって変わる２つの数量に着目する場面である。正方形の厚紙を使って、四隅から同じ大きさの正方形を切り取って小物入れ箱を作っていく。このとき、四隅から切り取る正方形の大きさ、つまり正方形の一辺の長さを変えると、出来上がった小物入れ箱にはどのような数

量に違いがあるのか、またそのきまりを考えさせた。授業者は、小物入れ箱の展開図を示したあとに、実際の小物入れ箱をスモールステップで提示して授業を進めた。

この場面では、関数の意味に関するアイデアの（γ）数量を変化させる（変数のアイデア）がたくさん見られた。S4 は「切った大きさ」という発言で、切り取る長さ（独立変数）に気付くことができた。そして、切り取る一辺の長さを変えると、それにともなって変わる数量（従属変数）を見つける活動へ移行した。S5、S6、S8、S9、S10、S11、S13 の発言は従属変数を見つけることができた。従属変数には、長さに関する一次元的な変数、面積に関する二次元的な変数、そして体積に関する三次元的な変数があり、全ての観点を見つけることができた。実際に小物箱を提示して、それに対応する展開図も示したことで、多様な意見が出たと考察できる。

B　数学を活用した問題解決に向けて、構想・見通しを立てることについて

T	切り取る正方形の長さを３ｃｍ、５ｃｍ、６ｃｍとします。
T	さっき皆が言ってくれた、長さ、面積、体積はどんなふうに変化するでしょう？それを今から考えていきます。
T	高さについて聞いていきます。高さはどうなるの？
S14	だんだん高くなっていく。　－（β）
T	そうだな。高くなってますね。じゃあ、底面積はどんなふうに変わっていく？
S15	短くなる。　－（β）
T	まあ、小さくなる。
T	側面積はどうなる？ちょっと難しいかな。
S16	長細くなる。　－（β）
T	まあ変化しているよね。
T	じゃあ、容積は？
S	小さくなる。　－（β）

ともなって変わる数量（従属変数）を見つけて、その変化の様子を考える場面である。授業者が小物入れ箱を実際に作って提示した。

この場面では、関数の意味に関するアイデアの（β）変われば変わる（変化のアイデア）がたくさんみられた。例えば、S14 は小物箱の高さが「だんだんと高くなっていく」と発言している。実際の小物箱を見ての直感的な判断であるが、見通しを持つという観点ではとても重要な意見である。S15 と S16 が底面積と側面積について、S17 が容積について、その変化の様子を見通すことができた。切り取る長さを変えたときの、それぞれの変化に見通しを立てることができている。数値で求めることも大切であるが、この場面では焦点化する前段階として、従属変数の変化に注目することができた。

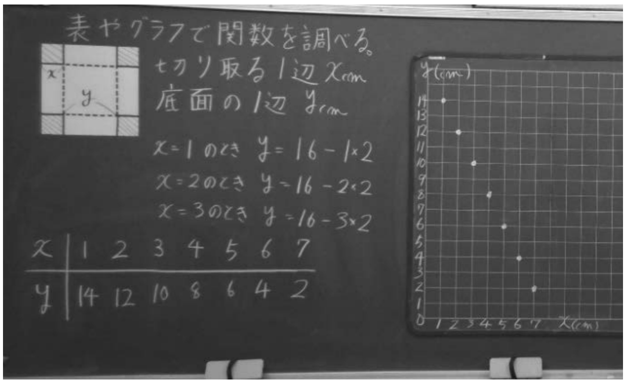
C　焦点化した問題を解決することについて

T	前の授業のときに小物箱をつくって見せたの覚えてる？それの問題からです。
T	切り取る部分３ｃｍ、５ｃｍ、６ｃｍとこうやって変わるので、これを文字を使って表します。
T	切り取る長さｘセンチ、底面の一辺をｙセンチとします。
T	そのことについて考えながら表やグラフの様子を見ていきましょうね。
T	最初だけみんなでいっしょにやっていきましょうね。ｘが１のとき、全部で１６センチ。切り取る長さが 1 のとき、一辺の長さはいくつですか？式も言って欲しい。
S14	１６－（１＋１）　－（α）
T	で、いくつ？
S15	１４　－（α）
T	次、ｘが２のときは？
S16	１６―（２＋２）で１２　－（α）
T	ｘが３のときｙはどんな式になりますか？
S17	１６－（３＋３）＝１０　－（α）

切り取る正方形の一辺の長さをｘとして、箱の底面の長さをｙとした。そして、表を完成させる場面である。

この場面では、関数の意味に関するアイデアの（α）決めれば決まる（対応のアイデア）がたくさん見られた。切り取る長さを決めると、底面の一辺も決まることを具体的な計算を通して理解できたと考察できる。また、事象から具体的なデータを求めていることから、関数の表現変換のイメージ図の表化（T）の活動と解釈できる。

次ページの板書は、表からグラフ（T-G）を考えさせた。「この表やグラフを見て、何か気づくことはありますか？きまりとか、気づくことはありますか？」という授業者の質問に対して、「２センチずつ減っている。（β）」「外側は１４、外側から一個ずれると２８、もう一個ずれると３０になる。（T）」「１と１４足すと、１５。２と１２足すと１４になる。和が一つずつ減っていっている。（T-E）」「一番端っこの２割るｘの１をすると２で、ｙの４割るｘの２をすると２になって、全部２になる。ｙの端っことｘの左側の端っこをする。（T-E）」など多様な意見が出てきた。深い学びにつながったと考察できる。



次の時間に *y=16-2x* と式で表現できることを押さえた。表→グラフ→式という順序（T-G），(G-E）で関数が表現できることを指導した。

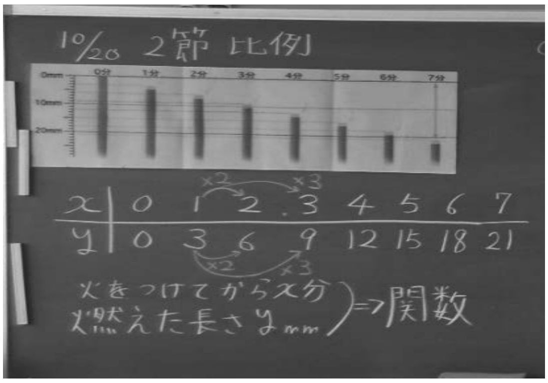
Ｄ２ 解決過程を振り返るなどして概念を形成したり、体系化したりすることについて

T	今からフラッシュカードを用いて関数の式を見せるので、比例だったら、比例、比例じゃなかったら、違うって答えてくださいね。（「ｙ＝５ｘ」を見せる）
SS	比例
T	比例定数はいくつですか？
SS	５
T	「ｙ＝ｘ」これは？
SS	比例
T	比例定数は？
SS	１
T	そうだね。
T	「ｙ＝1/2　ｘ」これは？
SS	比例
T	比例定数は？
SS	２分の１
T	いいですね。「ｙ＝２ｘ＋１」これどう？
SS	違う。
T	違うよね。足し算だからもう計算できないね。
T	「ｙ＝―ｘ」これどう？
SS	比例、マイナス１
T	最後ちょっと難しいぞ。「ｙ＝３ｘ×２」
SS	違う。比例。
T	比例だと思う人？その中で比例だって理由いえる人？
S25	２×３を計算したら６ｘになるから、比例。
T	それで比例定数が６になる。
T	ほー。みんな２ｘ×３って計算できるよね。
T	だから、ｙ＝６ｘで比例の形になるよね。だから、比例定数が６って分かるね。

y=ax で表せるものが比例であることを教えた後で、フラッシュカードを用いて、定着させる場面である。*y=2x+1* を取り上げた。そのため、比例ではない関数のイメージが膨らんだ。しかし、*y=3x×2* を見て、多くの生徒が戸惑った。そこで、理解度の高い S25 を取り上げた。S25 の発言を通して、その他の生徒の表情を観察から理解できてきたと言える。多くの生徒が定義を活用できている。尚、この場面では関数の表現変換は見られなかった。

Ａ２ 数学の事象における問題を数学的に捉えることについて

比例の最初の授業である。線香の燃えた長さと時間の２つの数量関係を表にして、そこから分かることを見つける場面である。



T	表から分かることを発表してもらいましょう。表からどんなことが分かりましたか。
S8	ｘたすｙをすると４の倍数。　―（α）
T	わかった人？　確かに４の倍数になるね。
T	まだある？
S9	ｙ―ｘをすると２の倍数になる。　―（α）
T	これはどう？わかった人？もうちょっと説明して欲しい人いる？いいな。
T	次。
S10	ｙ÷ｘをすると全部３になる。　―（α）
T	わかった人？もうちょっと説明して欲しい人いる？
SS	はい。
T	よし、もうちょっと説明して。例えば３を
S11	だからｙを３だとすると、ｘは１で、３÷１で３になるし、６÷２でも３になる。
T	わかったかな？ｙの値をｘでわると３になるよ。
T	さあ、どうでしょう？
S12	ｘの数を２倍すると、ｙも２倍になる。　―（β）
T	１を２倍すると２になる。３も２倍するってことかな。
T	ほー。
S13	ｘを２倍したらｙも２倍になる。

	―（β）
T	じゃあ聞いてみよっか。ｘを３倍したらどうなる？
S14	ｙも３倍になる。　　　　　―（β）
T	確認してみよか。ｙの３を３倍すると９になるね。４倍でも言えるね。
S15	ｘを２倍、３倍…とすると、ｙも２倍、３倍…になる。　　　　　―（β）
S16	ｙの３とｘの２をかけて６で、全部そうやってしていくと答えが出る。
T	ｙの３とｘの２をかけると、下が６になる。次どうしようか。
S17	次は２の横の３とｙの方の３。
S18	そうそうｘ×３。３ｘ？
T	じゃあ、ｘが１０のときｙはいくつかな？
S19	３０

関数の表現変換のイメージ図の表化（T）の活動をした後の場面である。表を見て、表からきまりや性質を見出そうとする活動の過程を分析した。ここでは、一般化を試みようとする発言がいくつも見られた。

まず、（α）と（β）の両方の見方に多くの生徒が気づくことができた。比例の表から、関数の変化と対応の２つの見方を理解できたと言えよう。

S8 と S10 と S14 の発言は、具体的な事例を一般化しようとしているから、帰納的推論を行っていると言える。一方で、S13 はｙ÷ｘをすると全部３になる（T-E）という命題を具体的な例を用いて説明している。また、「じゃあ、ｘが１０のときはｙはいくつかな？」という教師の発問により、S21 は「３０」という答えを導くことができた。一般化した命題から、特殊な場合を答えている。これは、演繹的推論を行っていることが読み取れる。帰納的推論と演繹的推論を行うことで高次の数学的なアイデアを見出すことができたと考察できる。

4.3　関数の意味の定着に向けた実践

授業では、教科書に従って関数を次のように定義した。『ｘの値を決めると、それに対応してｙの値がただ１つに決まるとき、ｙはｘの関数である』である。この定義に従って、ｘにいろいろな値を入れたときにｙがただ１つに決まるかを帰納的に生徒に確かめさせた。授業での知識の定着を目指した場面を示す。

関数となる例の説明場面

T	半径がｘセンチメートルの円の面積ｙ平方センチメートルです。
T	これはｙはｘの関数であるかどうかを見ていきます。
T	じゃあ、半径の長さ１０センチとします。
T	半径１０センチの円の面積っていくつですか？
S8	１０×１０×３．１４で３１４平方センチメートルです。
T	３１４ね。ｘ一つ決めるとｙは決まったね。ｘが１センチだったら円の面積はいくつですか？
S9	３．１４
T	というふうにｘを一つ決めるとｙは一つに決まるから、これは関数で？
SS	ではない。ある。分からん。（つぶやき）
T	ｘは１０のとき、ｙは３１４で一つに決まったね。だからこれは関数なの。ｙはｘの関数なので、円の面積は半径の関数である。

「半径がｘcm の円の面積ｙcm²」について、ｙはｘの関数であるか、関数でないかを判断する問題を実施した。生徒にとっては、関数であるかそうでないかの二択のうち適切なものを選ぶ問題であるため、容易であるように思われる。

しかし、私としては、このような問題を丁寧に指導した。「ともなって変わるｘ、ｙがあり、ｘを決めるとｙがただ一つに決まるとき、ｙはｘの関数である」という定義が成り立つかを帰納的に確かめる活動を促した。「半径１０センチの円の面積っていくつですか？」と発問した。この発問ではｘ＝１０のときを考えさせている。そして次は、ｘ＝１のときを考えさせた。ｘ＝１のとき、ｘ＝２のとき、ｘ＝３のときと考えさせた方が帰納的に推論する力が育成させると思うが、計算ミスなどの別の要因でつまずく恐れを避けるためにｘ＝１０とｘ＝１を考えさせた。定義を具体的な数字で確かめる指導をした。

関数でない例の説明場面

T	ｘ歳の人の身長ｙセンチメートル、これは関数ですか？
T	聞いてみます。
T	これは関数ですか？
SS	関数ではない。
T	１３歳の人は手を挙げて。
T	○○くん、身長いくつ？
S6	１６５ｃｍ
T	△△さんは？
S7	１５８ｃｍ
T	１３と決めても身長は一つに決まらないね。
T	だから、関数ではないね。

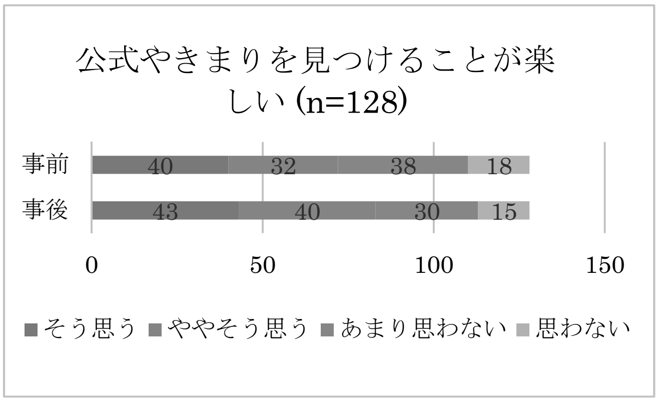
「ｘ歳の人の身長ｙcm²」について、ｙはｘの関数であるか、関数でないかを判断する問題である。これも定義に立ち返って考えさせた。中学１年生に向けて授

業を行ったため、ｘ＝１３とした。学級内には１３歳の生徒はたくさんいた。その中で生徒を指名して、身長を聞いた。同じ年齢の生徒でも、身長ｙは複数存在しないことに多くの生徒が気がついた。そのため、この問題は関数でないと判断できた。

4.4　量的研究（アンケート・学力調査）

①アンケート調査

アンケート調査では、私の授業を通しての生徒の意欲面での変化を分析した。アンケート結果から事前と事後を比較して、新しい性質やきまりを見つけることに楽しさを感じているかを増加している。最終的には、創造する力を育て、生徒自らが進んで数学を学ぶことが究極の目標であるが、まずは生徒が考えたくなるしかけを教師が提供しなくてはならない。発問や問題提示をスモールステップで行うことで、さまざまな数学的なアイデアを見つける活動をつくった。その活動の積み重ねをしていくことで、新しい性質やきまりを見つける力、つまり創造する力の育成につながって行くであろう。



②検証問題

私の授業によって生徒が知識を定着できたか分析するために、調査問題を実施した。調査問題として用いたのは、全国学力学習状況調査の平成 25 年度数学 A9―H25 と平成 26 年度数学 A9―H26 の２題（この問題は第２章 2.1 で紹介したもの）である。

調査問題は、１節「関数」の内容が終わった段階で実施した。調査時間は５分間である。全国学力学習状況調査は中学校第３学年の生徒が対象であるが、今回実施した問題は「関数の意味」を問う問題であり、第１学年の知識で理解できると判断した。全国の正答率は問題 H25 が 13.8％、問題 H26 が 36.7％である。それに対して、連携協力校の生徒 129 人の正答率は問題 H25 が 27.1％、問題 H26 が 49.6％だった。二つのデータを比較して、連携協力校の生徒の正解率が問題 H25 では 13.3 高く、問題 H26 でも 12.9 高い。このことから、データには有意差が見られて、連携協力校の生徒の理解度が高いことが分かる。

私の授業実践において次のような手立てが成果の一因となると考える。

まず、カリキュラム分析の段階で、関数であることを判断するために事例の不足していることが分かった。そのため、授業で関数であるか、関数でないかを判断する問題を追加したことで、生徒の理解度が高まったと考える。

次に関数の定義を意識して、問題文のことがらが定義を満たしているかを帰納的に確かめる指導を行ったことが有効であったと考える。「ともなって変わる x、y があり、x を決めると y がただ一つに決まるとき、y は x の関数である」という関数の定義に従って、「ｘ＝１のときはｙは１つに決まるかな？」「ｘ＝２のときはどうかな？」「ｘ＝３のときは？」などとスモールステップで考えさせる指導を行った。

最終的には、生徒の中でｘ＝１、ｘ＝１０などと具体的に数値を入れて判断させたいが、最初は考える視点を与えるというスモールの指導が有効であったと思われる。

その他、ミニ指導案における発問づくりや問題提示や教材提示の工夫などの手立てを講じたことが生徒の理解度が高まった一因と考察できる。

第５章　本研究の成果と課題

5.1　成果

- ● 一意対応の表現形式を意識して式、表、グラフに基づいてカリキュラム分析を行うことができた。
- ● カリキュラム分析から、生徒に創造する力をつけさせる箇所が明らかになり、それに基づいて授業実践を行うことができた。
- ● 生徒は、きまりや性質を見つける活動に触れながら、数学的なアイデアを使う力が向上した。

5.2　課題

■ 一意対応の表現変換のイメージ図の全てのパターンの実践
⇒教師力向上実習Ⅱの期間が比例の途中で終わってしまったため、グラフや反比例の学習の授業実践ができなかった。今後も実践していく。

■ 関数領域以外での創造する力の育成
⇒数と式、図形、資料の活用の分野でも実践をしていく。

5.3　総合考察

本研究では、わかる前に数学を「つくる」こと、できた後に数学を「使う」ことを意識して、創造する力と解決する力の育成を目指した授業実践を行った。成

果としては、一意対応の表現形式を意識して、式、表、グラフとの関係性を意識して指導できたことである。カリキュラム分析やミニ指導案を作成して、教科書を緻密に分析して、教科書の意図を汲み取ったことが、生徒の理解へとつながったと思う。

課題としては、上記に挙げた課題以外に大きな疑問が残った。そもそも教科書の内容を緻密に教えるだけで創造する力が身に付くのだろうかという疑問である。もちろん学習指導要領に示された内容に関する概念や知識や技能を習得させることは大切である。しかし、その内容をこなすだけで本当に社会に出てから役立つような考える力が身に付くのかと思う。数学の授業では、課題学習といって各領域の内容を総合したり日常の事象や他教科等での学習に関連付けたりするなどして見出した課題を解決する学習が位置づけられている。教科書の内容をしっかりとこなした上で、余裕があれば問題設定（問題作り）やオープンアプローチ型の授業も今後は実践していきたいと考えている。

終章　今後の挑戦と展望

実習の始まる数ヶ月前から、カリキュラム分析やミニ指導案などの教材研究を進めてきたことが、成果となって現れたと考える。カリキュラム分析やミニ指導案などの教材研究は、理論と実践を往還するための橋渡しである。

また本稿では、関数に関する専門的な知識も記載した。それは数学教師として学問に対して深い理解が必要であると考えるからである。

子どもに算数・数学を教えるにあたって教師自身が楽しみながら教えることが一番大切であると考える。数学が楽しいと思えるような感性をこれからも大切にしたい。

そして、数学には長い歴史があり、多くの先人たちが汗水を流しながら、発展させてきた。数学教師として、ただ内容を教えるのではなく、学問が発展するにあたって起きた人間ドラマも同時に生徒に伝えていくことが大切である。そして、子どもに考えることは楽しいことであるという経験を積み重ねていきたい。

【付記】

本研究を形にすることができたのは、指導教官の志水廣先生をはじめ多くの先生方の熱心なご指導と、連携協力校の先生方のご指導と協力があってのことと思います。感謝の気持ちと御礼を申し上げたく、謝辞にかえさせていただきます。今後は岐阜県の教師として、２年間の学びを還元していきます。そして、今後の教職大学院のさらなる発展を願ってやみません。

【引用・参考文献】

＊文部科学省(2015)「産業競争力会議 雇用・人材・教育WG（第４回）」
・文部科学省(2016)「学習指導要領改訂の方向性（案）」
・文部科学省(2016)「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」
・文部省(1971)「中学校新しい数学教育―数学教育現代化講座指導資料」
・新井仁(2007)『世界をひらく数学的リテラシー』小寺隆幸、清水美憲編著　明石書店
・江森英世(2016)「学習者の自然な思考に沿った授業のために」第 98 回全国算数・数学教育研究（岐阜大会）講習会テキスト p7-10
・國本影亀(2000)$\boxed{13}$関数『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』中原忠男編集　明治図書 p226
・熊倉啓之(2016)「「数学的活動」を重視した高等学校数学科の学習指導」第 98 回全国算数・数学教育研究（岐阜大会）講習会テキスト p79-82
・佐々木徹郎(2015)「数学科におけるアクティブ・ラーニング」イプシロン, 2015, 57, p. 11-16.
・塩見拓博(2007)「ハンス・フロイデンタールの数学化」鳥取大学数学教育研究
・島田茂(1997)『新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案』東洋館出版社
・志水廣(2006)『算数力がつく　教え方ガイドブック』明治図書 p 50
・杉山吉茂(1999)『確かな算数・数学教育をもとめて』東洋館出版社
・杉山吉茂(2007)『中等科数学科教育学序説』東洋館出版社
・長尾篤志(2016)「数学におけるアクティブ・ラーニングの考え方」Rimse　No.17 p10-14
・中島健三(1981)『算数・数学教育と数学的な考え方―その進展のための考察』金子書房 p82-123
・永田潤一郎(2012)『数学的活動をつくる』東洋館出版社 p46-50
・根元博(1999)『中学校数学科 数学的活動と反省的経験』東洋館出版社
・日野圭子(2016)「関数の授業における数学的対象の構成－Sfard の談話論からの考察」日本数学教育学会第 4 回春期研究大会創成型課題研究Ⅱ p41-48
・平林一榮(1987)『数学教育の活動主義的展開』東洋館出版社
・ボンウェルとアイソン(1991)「Active learning:Creating excitement in the classroom.」
・松下佳代(2015)『ディープ・アクティブラーニング　大学授業を深化させるために』勁草書房
・溝上慎一(2014)『アクティブラーニングと教授学習パラダイムの転換』東信堂
・両角達男(2002)「中学校数学における関数領域の研究動向と方向性について」日本数学教育学会第 35 回数学教育論文発表会 p138-144
・山田篤史(2015)「アクティブ・ラーニングが注目されるに至った経緯と算数・数学における実現のポイント」Root No.17 日本文教出版 p1-3