愛知教育大学研究報告，55（自然科学編），pp. 1～4， March, 2006

整数環の剰余環の零因子グラフと その隣接行列の固有多項式

金應烈*　　　　　金光三男**

*南開大学数学科学学院
天津市　300071 中国
**愛知教育大学数学教育講座
井ヶ谷町, 刈谷市 448-8542 日本

A Zero-divisor Graph of the Ring of Integers Modulo an Integer and the Characteristic Polynomial of its Adjacency Matrix

Yinglie JIN　　　Mitsuo KANEMITSU

**School of Mathematical Sciences and LPMC, Nankai University, Tianjin 300071 China*
***Department of Information Sciences, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan*

§0　はじめに

この論文では，整数環$\mathbf{Z}$のイデアル(n)よる剰余環

$$\mathbf{Z}_n(=\mathbf{Z}/(n)) = \{\,0, 1, 2, \cdots, n-2, n-1\,\}$$

の零因子グラフ，その隣接行列A_nの固有多項式$f(\mathbf{Z}_n, \lambda)$の係数の間の関係や直交性や大小関係とイデアルとの関連などを代表的なnで具体的な場合を考察する．
$\mathbf{Z}_n$の零因子全体の集合$Z(\mathbf{Z}_n)$から0を除いた集合$Z^*(\mathbf{Z}_n)$を頂点集合とし，異なる二つの頂点a，bが辺であるとは，$ab=0$のときであるとする．このように定義したグラフを$\mathbf{Z}_n$の零因子グラフといい，$\Gamma(\mathbf{Z}_n)$と記す．

R. LevyとJ. Shapiroは，次の定義を与えた．

定義 1 ([3]). 単純グラフGの二頂点a，bに対して，大小関係$a \le b$であるとは，aとbは隣接していないが，bに隣接しているすべての頂点xは頂点aにも隣接しているときであるときをいう．
$a \le b$かつ$a \ge b$のとき，二頂点aとbは同値であるといい，$a \sim b$と記す．

定義 2 ([3]). a，bが直交するとは，aとbは隣接しているがa，b両方に隣接している頂点が存在しないときをいい，$a \perp b$と記す．

定義 3 ([1]). グラフGが直交補グラフであるとは，Gの任意の頂点aに対して，$a \perp b$となる頂点bが存在するときをいう．

定義 4 ([1]). グラフGが一意直交補グラフであるとは，Gは直交補グラフでかつ$a \perp b$, $a \perp c$なら，$b \sim c$となるとき，即ちaとbが全く同じ頂点に隣接しているときをいう．

グラフ$G=(V(G),\ E(G))$において，$V(G)=\{\,v_1, v_2, \ldots, v_r\,\}$とおく．頂点$v_i$の次数を$d(v_i)$で表す．このとき数列$(d(v_1),\ d(v_2),\ \cdots,\ d(v_r))$を$G$の次数列という．

大小関係，直交性とイデアルの関係の基本性質として次の補題を述べよう．

補題 1 ([3]). nが平方因数を持たない整数とする．このとき，$\mathbf{Z}_n$に対して次のことが成立する．

(1) もし二つの巾等元a, bが同値であるなら, $a=b$である.
(2) $a, b \in \mathbf{Z}^*(Z_n)$に対して, $a \leq b$であることと, それらの元で生成される単項イデアル(a)と(b)の間には$(a) \subset (b)$なる関係が存在する.
(3) $a \perp x, x \sim y$なら, $a \perp y$.
(4) $a \perp x, b \perp x$なら, $a \sim b$.
(5) a, xがともに巾等元とする. このとき, $a \perp x$であることは, $x = 1-a$であることに同値である.

定義 5 (**[2]**). グラフGの辺全体の集合の部分集合MがGの2－マッチングであるとは, Mが2つの辺からなり, その辺が互いに隣接していないときをいう.

[2]において, 2－マッチングの個数の計算法として次の定理が示された.

定理 2 (**[2]**). 頂点数がtの単純グラフGにおいて, 次数列が

$$(d_1, d_2, d_3, \cdots, d_t)$$

とする. このとき, Gの2－マッチングの総数n_Mは次式で与えられる.

$$n_M = \tfrac{1}{8}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{t} d_i\right)^2 - \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{i=1}^{t} d_i{}^2 + \tfrac{1}{4}\textstyle\sum_{i=1}^{t} d_i$$

但し, diは各頂点の次数とする.

§1. n＝15の場合の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$

$\mathbf{Z}_{15} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 14\}$の零因子の集合$Z(\mathbf{Z}_{15})$は次で表わされる.

$$Z(\mathbf{Z}_{15}) = \{0, 3, 5, 6, 9, 10, 12\}$$

で, その個数はオイラー関数$\varphi(n)$を使用して, $n-\varphi(n)$個となる. 0を除いた集合はそれより1少ない個数である.

$$Z^*(\mathbf{Z}_{15}) = \{3, 5, 6, 9, 10, 12\}$$

であるから, $\mathbf{Z}_{15}$の零因子グラフは6個の頂点からなり, 次数列

$$(2, 4, 2, 2, 4, 2)$$

となる. 辺は

$$[3, 5], [3, 10], [5, 6], [5, 9], [5, 12], [6, 10], [9, 10], [10, 12]$$

の8個の辺からなる単純グラフである. その隣接行列A_{15}は次のように6次の正方行列になる.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

行列A_{15}の固有多項式$f(\lambda)$は, $f(\lambda) = \lambda^6 - 8\lambda^4$となる.

固有多項式の係数とグラフの関係は, λ^4の係数の－8は辺の個数 (＝サイズ) の個数にマイナスをつけたものを表わし, λ^3の係数はグラフの三角形の個数の2倍の符号を変えたものを表わし, このグラフには三角形がないから0である. また, 零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$はループを持たない無向グラフだから2－マッチングの総数をn_M, 4－サイクルの総数をn_Cとすると, [2]より, λ^2の係数は, 0であるが, これは$n_M - 2n_C$を計算すると0になる. 何故なら,

$$n_M = 12, \ n_C = 6$$

だからである. これらをまとめると,

定理 3. $\mathbf{Z}_{15}$の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$に関して次のことが成立する.

(1) 零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$の隣接行列A_{15}の固有多項式は$f(\mathbf{Z}_{15}, \lambda) = \lambda^6 - 8\lambda^4$
(2) 2ーマッチングの個数$n_M = 12$
(3) 異なる4ーサイクルの個数は6個である
(4) $3\perp5, 3\perp10, 5\perp6, 5\perp9, 5\perp12, 6\perp10, 9\perp10, 10\perp12$. 従って, $\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$は一意直交補グラフである.
(5) $\mathbf{Z}_{15}$のイデアルは, $(5) = (10) = \{0, 5, 10\}$, $(3) = (6) = (9) = (12) = \{0, 3, 6, 9, 12\}$ 及び
$(1) = (2) = (4) = (7) = (8) = (11) = \mathbf{Z}_{15}$と$(0)$の4個である
(6) 同じイデアルの2つの生成元a, bは同値($\mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \mathbf{a} \geq \mathbf{b}$)である.

§2 n=16の場合の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{16})$

$\mathbf{Z}_{16} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 15\}$の零因子の集合$Z(\mathbf{Z}_{16})$は次で表わされる.

$$Z(\mathbf{Z}_{16}) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

で, その個数はオイラー関数$\varphi(n)$を使用して, $n - \varphi(n)$個となる. 0を除いた集合はそれより1少ない個数である.

$$Z^*(\mathbf{Z}_{16}) = \{3, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$$

であるから, $\mathbf{Z}_{16}$の零因子グラフは7個の頂点からなり, 次数列(1, 2, 1, 6, 1, 2, 1)となる. 辺は

$$[2, 8], [4, 8], [4, 12], [6, 8], [8, 10], [8, 12], [8, 14]$$

の7個の辺からなる単純グラフである. その隣接行列A_{16}は次のように7次の正方行列になる.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列A_{16}の固有多項式$f(\mathbf{Z}_{16}, \lambda)$は, $f(\lambda) = \lambda^7 - 7\lambda^5 - 2\lambda^4 + 4\lambda^3$となる.

前に述べたように, 固有多項式の係数とグラフの関係は, λ^5の係数の-7は辺の個数(=サイズ)の個数にマイナスをつけたものを表わし, λ^4の係数はグラフの三角形の個数の2倍の符号を変えたものを表わし, このグラフには三角形が1個だから-2である. また, 零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{15})$はループを持たない無向グラフだから2ーマッチングの総数をn_M, 4ーサイクルの総数をn_Cとすると, λ^2の係数は, 4であるが, これは$n_M - 2n_C$を計算すると4になる. 何故なら,

$$n_M = 4, n_C = 0$$

だからである. これをまとめると,

定理 4. $\mathbf{Z}_{16}$の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{16})$に関して次のことが成立する.
(1) 零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{16})$の隣接行列A_{16}の固有多項式は$f(\mathbf{Z}_{16}, \lambda) = \lambda^7 - 7\lambda^5 - 2\lambda^4 + 4\lambda^3$
(2) 2-マッチングの個数$n_M = 4$
(3) 異なる4-サイクルの個数は4個である
(4) $2\perp8, 6\perp8, 8\perp10, 8\perp14$. 従って, 4は直交な補元を持たないから$\Gamma(\mathbf{Z}_{16})$は直交補グラフではない. これは, 16が平方因数を含むためである.
(5) 零因子グラフで全く同じ隣接の仕方をする頂点が同じイデアルの生成元になる. これを使用しても$\mathbf{Z}_{16}$のイデアルは,
$(0), (1) = (3) = (5) = (7) = (9) = (11) = (13) = (15) = \mathbf{Z}_{16}, (2) = (6) = (10) = (14), (4) = (12), (8)$
の5個であることが分かる.

§3 n=12の場合の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$

$\mathbf{Z}_{12} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, 11\}$の零因子の集合$Z(\mathbf{Z}_{12})$は次で表わされる.

$$Z(\mathbf{Z}_{12}) = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

で，その個数はオイラー関数$\varphi(12)$を使用して，$12-\varphi(12)$個となる．0を除いた集合はそれより1少ない個数である．

$$Z^*(\mathbf{Z}_{12}) = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$$

であるから，$\mathbf{Z}_{12}$の零因子グラフは7個の頂点からなり，次数列 (1, 2, 3, 4, 3, 2, 1) となる．辺は

$$[2, 6], [3, 4], [3, 8], [4, 6], [4, 9], [6, 8], [6, 10], [8, 9]$$

の8個の辺からなる単純グラフである．その隣接行列A_{12}は次のように7次の正方行列になる．

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

行列A_{12}の固有多項式$f(\mathbf{Z}_{12}, \lambda)$は，$f(\lambda) = \lambda^7 - 8\lambda^5 + 8\lambda^3$となる．

前に述べたように，固有多項式の係数とグラフの関係は，λ^5の係数の-8は辺の個数(= サイズ)の個数にマイナスをつけたものを表わし，λ^4の係数はグラフの三角形の個数の2倍の符号を変えたものを表わし，このグラフには三角形が0個だから係数も0である．また，零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$はループを持たない無向グラフだから2－マッチングの総数をn_M, 4－サイクルの総数をn_Cとすると，λ^3の係数は，8であるが，これは$n_M - 2n_C$を計算すると8になる．何故なら，

$$n_M = 14,\ n_C = 3$$

だからである．これをまとめると，

定理 5. $\mathbf{Z}_{12}$の零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$に関して次のことが成立する．

(1) 零因子グラフ$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$の隣接行列A_{12}の固有多項式は$f(\mathbf{Z}_{12}, \lambda) = \lambda^7 - 8\lambda^5 + 8\lambda^3$

(2) 2－マッチングの個数$n_M = 14$

(3) 異なる4－サイクルの個数は3個である

(4) $2\perp 6, 3\perp 4, 3\perp 8, 4\perp 6, 4\perp 9, 6\perp 8, 6\perp 10, 8\perp 9$. 従って，$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$は直交補グラフである．
$4\perp 6, 4\perp 9$だが, $6 \not\perp 9$, 従って，$\Gamma(\mathbf{Z}_{12})$は一意直交補グラフではない．(9)≠(6)．これは$n = 12$が平方因数を持つことが原因である．

(5) 零因子グラフで全く同じ隣接の仕方をする頂点が同じイデアルの生成元になる．これを使用しても$\mathbf{Z}_{16}$のイデアルは,

$$(0), (1) = (5) = (7) = (11) = \mathbf{Z}_{12}, (2) = (10), (4) = (8), (3) = (9), (6)$$

の5個であることが分かる．

これらのことは，上の定理の場合と同様に一般の自然数nに対して拡張できる．例えば，nが素数でないと仮定する．nが平方因数を持たない場合は，定理3と同様な結果が成立する等．

参考文献

[1] D.F.Anderson, R. Levy and J.Shapiro, Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean algebras, *J. Pure and Applied Algebras* **180** (2003) 221-241.

[2] Y.Jin and M.Kanemitsu, Beck's graphs associated with $\mathbf{Z}n$ and their characteristic polynomials, *to appear*

[3] R.Levy and J.Shapiro, The zero-divisor graph of von Neumann regular rings, *Communications in Algebra*, **30** (2002) 745-750.

（平成17年8月23日受理）