Bulletin of Aichi Univ. of Education, 68 (Educational Sciences), pp. 127-132, March, 2019

大学生が数学の予習をする必要性と考察

金光　三男

名誉教授

Consideration and the Necessity of Preparation to Study Mathematics for a University Student

Mitsuo KANEMITSU

Professor Emeritus of Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

１．はじめに

学習指導要領で、「アクティブ・ラーニング」が小・中・高のすべてにおいて力説されている。またアクティブ・ラーニングの内容では、古くからビィゴツキー([Si, 2006]の「生活的概念と科学的概念、発達の最近接領域などの理論」)その他の人から言われているように、「自分一人の力は小さい。他人との議論をすることで考えが発展していく」。

このように自分で考え、また他人との対話や議論なども加味して、深く学ぶことが大学の数学の理解でも当然有効であり必要である。これに該当する一つとして「自分で数学の予習に取り組んで十分考えて、更により深い理解を得るために、その後教員に質問などして議論をする学生」がこのような例に相当する。また、他の例として、[OO, 2006]にも述べてあるように、「絶対値の定義は、数直線上で、点 P に実数 a が対応しているとき、a を点 P の座標といい、座標が a である点 P を P(a)で表す。数直線上の原点 O と点 P(a)との距離を実数 a の絶対値という」。「ある大学生に円周率を π とするとき、$|\pi-4|$ の絶対値をはずせという問題を与えた。誤答の例として、$|\pi-4|=\pi-4$ とか、$|\pi-4|=\pm(\pi-4)$などがあった。$|\ |$ は π と 4 との距離を表している。誤りの原因は絶対値の意味の理解が不十分で、表面的な記憶を中心とした学習をしていることが理由の一つとして考えられる([KS, 2010, pp.3-4])」。

古くから言われているように、教員は単に「教える人」ではなく、学生が学習できるような場所・環境を作り、学生の学習を励ます人であることが必要である。更に社会に出て未知の課題に遭遇した場合に、それに対応できる力を学習しながら自分で解決する学生になるように良き相談相手であることが望まれる。

このような状況を考慮して学生の応答など議論をしていると、勉強の仕方はもとより、どのような数学の内容が学生に理解し易く、またどのような内容・箇所が理解出来にくいかが観察できる。

以下述べることの多くは、あくまで、「まだ授業で習っていない箇所を、学生が自分で予習を行って学習している数学の内容を質問し、更に議論することが予想される内容」である。[Ka , p.42, 2014]でも述べたが、「良く言われていることであるが、無限小数も知らず、1/3 は 1÷3 という意味だけであって、3 の逆数という意味を知らない。円周率 π は 3.14 であって無限小数に表すどころか無理数であることも大学入学まで知らない学生が多い。自ら調べ考える活動を、数学でも行えるようにしなければ、教員になってからも教材研究等の工夫ができない、『数学を分かる』ことと『問題を解ける』こととの差の理解が必要である」。

問題を解くだけでなく、数学の体系や構造などにまで目を向ける必要がある。これにより、教員になった時に、「生徒・児童からの質問・つぶやき」を拾い上げ、教育に生かすことに役立つと思われる。

このことを頭にいれて(従って内容は良く知られた容易なものも多く含まれている)数学周辺に関して質問された内容や予想される考察・分析を行なってみよう。

杉山吉茂氏は、以前にある附属小学校での講演で次のように、小学校の先生のレベルについて話をされた。

レベル１の教師：算数・数学についての知識を伝達する(結果としての知識主義)先生。

レベル２：子供がなぜか聞いたら、子供たちに分かるように説明できる先生。

レベル３：子供が自分で算数・数学の事柄を獲得して発展させることが出来るようにする先生。

このことからも、学生が予習することの価値・重要性が良く分かる。杉山氏のこの講演は、主として教員養成系の学生・教員を対象にした話であったが、工学部などその他の学部の学生に対しても同様である。

ここでは、このようなことを頭の片隅におき、過去

に、学生の質問した幾つかの内容を想起し予想も込めて考察してみる。「微分方程式の任意定数(積分定数)に関する質問」や、「微分方程式の特性方程式(または補助方程式、同伴方程式とも呼ばれている)に関して、一般解と特殊解に関する話題」、また「解の１次独立性を判定するロンスキアンに関連する内容」、「ベクトルと図形」や「増加率と微分」など、更に「二重積分の領域と変数変換の意味」などについて記載を試みる。

主として参考文献に挙げてある微積分関係の[Ok, 2015]、[YI, 2017]、線形代数[OT, 2012]を大学初年級で予習を中心として学習している学生からの予想される内容または過去に実際に質問されたものの事例・考察で学生の現状を知ることができる。

２．微分方程式の任意定数（積分定数）

質問：微分方程式の任意定数(積分定数)について

よく知られているように、常微分方程式 $x\,\frac{dy}{dx} = 2y$の解は、変数分離形で求めることが出来る。 x が 0 のときは y= 0 で、これが解であることは明らか。 x ≠0 のとき、d y /dx=2 y/ x だから、(1/y) d y = (2/x) dx。よって、∫ 1/y d y = 2∫ 1/x dx。log |y| = 2log |x| + C’。このような、「log |y|となっているときは任意定数(積分定数)を C’とするよりも log |C|と置く方がよい(例えば、[Ok, p.218, 2015])」。この C‘とすることと log |C|とおくことが出来る理由について大学生の質問があったので説明してみよう。

C と置いても log |C|と置いても、どちらでも良いが、上記の log |y|=2log|x| + log |C|= log|Cx²|とすると、log |y|=log|Cx²|となり、直ちに y=|Cx²| (y = Cx²)となり初心者には理解しやすい。C も log |C|もどちらもすべての実数をとり結果は同じことである。

これを再度、まとめて記載しておこう。

質問の回答：微分方程式の計算で、単に解の任意定数をCと置くより､log C と置く方が便利な場合がある。

質問：微分方程式の解を求める計算で、任意定数を対数関数内の絶対値記号を付けて正確な計算をすべきなのに、絶対値を付けずに計算してあるのは何故か？

「対数関数内の絶対値記号をつけて正確な計算をしても、最後の一般解の形式は、任意定数を適当に書き換えると、対数関数内の絶対値を無視して簡略な計算結果と同一の結果になる([YI, p.10 の注意２, 2017])」。任意定数（積分定数）は実数すべてを取るから、高校数学で学習する y = log x のグラフは、x 軸上の座標の点(1, 0)を通過する－∞から＋∞まで動く単調増加関数であり上に凸である曲線で、この対数曲線は「y 軸」である実数 C’の集合と１対１対応である。この理由から、どちらを取っても同じであることが言える。

３．任意定数を消去して微分方程式を得る

良く知られているように、 微分方程式の「一般解は無数の曲線群(例えば、[YI p、6, 2017]では解曲線と呼ばれている)を表し」、初期条件や境界条件を与えて、任意定数にある値に定めて求まる解を「特殊解または特解」という。

質問：「曲線群 Cx² – y² = 1 (C は任意定数)・・・①の微分方程式を求めよ」という問題で、「どの文字で微分すればよいですか」。

あるいは、「微分方程式を作るのに、何故、微分方程式の任意定数を消去するのですか」。という質問があった。

上式①を x で微分すると、2Cx – 2yy’ = 0。C を消去すると、x y y’ = 1 + y²。この微分方程式は変数分離形で y/ (1 + y²) y’ = 1/ x となる。ここで、何の文字で微分するか？ 言い換えると x で微分するのか、任意定数を変数とみなしてCで微分するのかという学生の意見を大切にしたい。これは、例としてクレローの微分方程式 y = y’ x + 2(y’)²・・・①を考察するときに重要性があると考えられる。x で微分すると y” = 0 または x + 4y’ = 0 となる。一般解は前者より y = C x + 2C² (直線群)・・・②である。後者より y ’を求めて元のクレローの微分方程式に代入すると y =－1/8 x²（一般解の包絡線）となる。②を C に関する２次方程式とみて判別式 D = 0 より包絡線(②の C の値を入れた各直線と接する曲線)y =－1/8 x² が出てくる。

任意定数(積分定数)で微分することにより、クレローの微分方程式の一般解に対する包絡線が出てきた。更に②を C の二次方程式とみて、その判別式にまで関連していることが学生の質問からいえる。

最初にも述べたが、この例でも、数学では特に「自分一人の力は小さいが､他人との議論で考えが発展する」。学習指導要領でのアクティブ・ラーニングの大学版といえる。この学生は自分で「ワクワク感」を持ちながら予習に取り組んでいると予測される。

自然法則、社会現象などを数学的に表現すると微分方程式が得られる。また数学上では任意定数または任意関数を消去することにより微分方程式が得られる。

因みにクレローの微分方程式 y = y’x + $\sqrt{1+y'^2}$の一般解の y = Cx +$\sqrt{1+C^2}$の包絡線は中心が原点である半径１の半円の上部である。またあるクレローの微分

方程式 $y = y'x + \sqrt{1-y'^2}$ （−1< y' < 1)の一般解の包絡線には双曲線の一部が現れることがある。

質問：なぜ任意定数を消去するのですか(再掲)。
[YI, p.8 問題 B 3.2, 2017] 次の曲線群の微分方程式を求めよ。(2) 曲線群 $y = ae^x + be^{2x}$ (a, b は任意定数)。

これは a, b なる消去すべき任意定数が２個あるから、このためには等式が３個必要である。与えられた等式から、2 階微分方程式までつくると、

$y = ae^x + be^{2x}$。$y' = ae^x + 2be^{2x}$。$y'' = ae^x + 4be^{2x}$

となる。この３個の等式から、a と 1(移項すると—1)及び b を消去して微分方程式を求める。ここで 1 の係数は y, y', y"で 1, a, b を解に持つ連立方程式

$$e^x X + e^{2x}Y + y Z = 0$$
$$e^x X + 2e^{2x}Y + y' Z = 0$$
$$e^x X + 4e^{2x}Y + y'' Z = 0$$

をクラーメルの解法で解く。解が−1, a, b となる非自明な解だから、この連立方程式の係数の行列式は 0 である。この３次の行列式を展開すると、行列式の性質から e^x, e^{2x} を行列式の係数として外に出して、計算すると $y'' - 3y' + 2y = 0$ となる。

この微分方程式は階数が２だから２個の任意定数 a, b を一般解が含む。一般解が階数だけの任意定数を含むことも学生は理解した。

C を消去して微分方程式を作ると、C に無関係な性質即ち曲線群の特性を表している。例えば、よく知られている例として、原点を中心とする同心円群を表す $x^2 + y^2 = C$ 方程式より、x で微分すると $x + y\,dy/dx = 0$。これは C を含まないから同心円群の特性を表している。これを$\frac{y}{x}\cdot\frac{dy}{dx} = -1$と表すと原点と曲線上の点 P を結ぶ直線 OP が P における円の接線に直交することを表している。このように学生は微分方程式を作ることに線形代数の連立方程式の解の公式であるクラーメルの公式や幾何学の接線の傾きと直交する直線との関連を見つけることも出来る。

４．定数係数２階線形同次微分方程式の解

質問：何故微分方程式 $y'' + ay' + by = 0$ の解は、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解が重解のとき、$C_1e^{\lambda x}$ と $C_2xe^{\lambda x}$のように最初の解に x を掛けたもので良いのですか。

$y'' + ay' + by = 0$ の解は特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の解λ_1とλ_2によって３つの場合に分類できることは良く知られている。２つの解λ_1とλ_2が異なる実数のとき、$e^{\lambda_1 x}$と $e^{\lambda_2 x}$は１次独立で、解は $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ となる。特性方程式の解が重解即ち$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$のとき、解の一つは$e^{\lambda x}$であるが、もう一つの解は$xe^{\lambda x}$としてよい。解は $y = (C_1 x + C_2)e^{\lambda x}$ である。$C_1xe^{\lambda x}$ と $C_2e^{\lambda x}$ が１次独立な解であることを判定するものとしてロンスキアンがある。これは $C_1C_2(e^{\lambda x})^2$ で 0 でないから、$C_1xe^{\lambda x}$ と $C_2e^{\lambda x}$は１次独立な解である。

定数係数 2 階微分方程式の解全体は、2 次元のベクトル空間を作るから、２個の 1 次独立な解がみつかればこれらが基底になる。故にこれで十分である。

大学初年級で習得する線形代数のベクトル空間の 1 次独立や１次従属そして基底などが、微積分でも出現している。数学は一つであることを学生は納得していた。

次のような質問もあった。

質問：[Y1, p. 60 問題 12, 2017]の例えばオイラーの微分方程式「(1) $x^2y'' + xy' - 9y = 0$」の解を求める問題。$y = x^{\lambda}$ と置いてできる特性方程式が$\lambda^2 + (a - 1)\lambda + b = 0$ (a =1, b = −9)になるのは何故か。

$x= e^t$とすると、$d/dx = 1/x\, d/dt$。 $d^2/dx^2 = 1/x^2(d^2/dt^2 - d/dt)$が成り立つ。この変数変換を行った後、定数係数線形微分方程式にして特性方程式を求めた。この特性方程式は$\lambda^2 - 9 = 0$。解は$\lambda = \pm 3$。よって一般解は $y = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$。これは $y = C_1x^3 + C_2 x^{-3}$。

5. 増加率の問題

変数 X の「変化率」、「変化速度」、「増加率」、「現象の割合」など、これらはすべて時刻について微分係数 dX /dt を表している(例えば、[Ba, p.33, 2015])。バクテリアや人間の個体数 N は十分良い環境が整っているとき、個体数 N の増加率 dN /dt は、個体数 N と比例定数 k で比例する([Ba, p.32, 2015])。$y' = \lambda y$ の形の微分方程式は、自然現象や物理の問題などに現れる。個体数 N の最大許容数 M で N を割ったものである相対的個体数 N/M を n と置く。初めは指数関数的に個体数 N は増加するが、N の増加に従って環境が悪くなっていく。相対的個体数 n は N →M では $k = k_0(1 - N/M)$ (ここで k_0は初期条件)。従って $dN / dt = k_0(1 - N/M)N$。$n = 1/(1+ Ce^{-k_0 t})$はロジスティック曲線と呼ばれ、時間 t が経つと 1 に収束する S 字型の成長曲線であることは良く知られている([Ba, p.35, 2015])。これに関係した学生の質問を以下で述べる。

質問：（[YI, p.29 問２, 2017]）ある種のバクテリアの増加率は各時刻でのバクテリアの個数 x の平方根に比例するという。このバクテリアは３時間で２倍になるとすれば、９時間後には最初の何倍になるか。回答

が$(22-12\sqrt{2})$ 倍になるのは何故か。

解答例。dx / dt = k$\sqrt{x}$ (k は比例定数)。変数分離形であるのでこれを解くと $2\sqrt{x}$ = kt + C'。x = (kt/2 + C)²。t = 0 のとき、x_0だから、$2\sqrt{x_0}$ = k・0 + C'、従って、C'= $2\sqrt{x_0}$。よって、$2(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})$ = kt。 ３時間で２倍だから、3k = $2(\sqrt{2x_0}-\sqrt{x_0}) = 2(\sqrt{2}-1)\sqrt{x_0}$ 。よって、k = $(2/3)(\sqrt{2}-1)\sqrt{x_0}$。９時間後には、$2(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})$ = 9k より、$\sqrt{x}$=（９/2） k + $\sqrt{x_0}$ 。これより、x = x_0 $(3\sqrt{2}-2)^2$ = x_0 $(22-12\sqrt{2})$ 。よって$(22-12\sqrt{2})$倍。これは約 5.03 である。

この質問からも、微分方程式 y'= λy が種々の現象に関連していることがわかる。[Ba, p.33, 2015]では、フロの線を抜いて、湯を抜いていくとき水位 h の減少速度 dh/dt は水位と負の比例定数－k (k > 0)で比例するものとすると、h' = －k h なるｈの１階の微分方程式となる。ウラン 235 の放射性物質が崩壊して質量の減少経自変化も同様である。

質問(類題)：[YI, p.31 問題 9, 2017]
高温の物体が空気中にあるとき、この物体の温度が下がる割合は物体の温度 T と空気の温度差に比例する(この比例定数－k (k > 0)とする)。20° C に保たれた空気中に温度 T_0 の物体をおく。t 秒後の物体の温度 T を求めよ。また、室内温度 20° C の部屋に、80° C のコーヒーを放置しておいたところ、５分後には 60° C になっていたという。10 分後には何° C になるか。小数第一位までで答えよ。

微分方程式は、dT / dt = －k (T－20)。これを解くと解は log (T―20)/(T_0―20) = －kt。即ち、(T―20)/(T_0―20) = e^{-kt}。よって答えは、T=20 + (T_0－ 20)e^{-kt} (° C)。
コーヒーの温度を T_0 = 80° C とすると、上式を使用すると、 k = －1/5 log (60 －20)/(80 －20) = －1/5 log 2/3。10 分後の温度を T とすると、T = 20 + (T_0 － 20)e^{-10k} = 20 + 60 $e^{2\log 2/3}$ = 20 + 60×(2/3)² = 140/3 = 46.7° C 。
多くの具体的な数学の学習とそれらを更に統合する自分なりの数学を構築ができることが望まれる。それにより教師になった時の教材の工夫も崇高になることが期待される。

６．重積分における変数変換

質問:変数変換の意味が分かりにくい。例として、[Ok, p.198, 問題８.５の(10), 2015] $\iint_D 1/(x^2+y^2)dxdy$ の値を変数変換によって求めよ。但し、D: 1≤ x ≤ 2,0 ≤ y ≤ x (ヒント：x = u, y = uv)。

極座標や球座標、円柱座標系など、2 変数 x, y による xy 平面上の領域 D 上の z = f(x, y)の 2 重積分を、u, v なる変数に変換して uv 平面上の１：１対応する領域 D'上の重積分を計算すると、計算しやすいことがある。
ヤコビアン J により、面積要素 dx dy = |J| du dv となる。但し、x = x(u, v), y = y(u, v)は連続な偏導関数を持つとする。よく知られているように、2 重積分は凸領域上では、積分順序変更が可能である。

上の質問では、積分順序を v で積分した後、u で積分する。ヒントのように変数変換すると、ヤコビアン J=u となるので、1/(x² + y²) = 1/u²(1 + v²)となり、1/(1 + v²)の積分が$[tan^{-1}v]_0^1=\pi/4$となることを見越してこのように変数変換している。与式= $\frac{\pi}{4}\int_1^2\frac{1}{u}\,du$＝$\frac{\pi}{4}$log2。予習のときの学生にはこのような見方は難しいかもしれないので、思考錯誤を重ねることが勉強になる。

７．平行四辺形を平面上に射影してできる平行四辺形の面積

質問：[OT, p.30 問題 1.20, 2012] ベクトル OA＝(1, －1, 2)と OB = (1, 1, －1)によってつくられる平行四辺形を、平面 x + y + z = 5 の上に射影してできる平行四辺形の面積を求めよ。

この平面の x 軸上の切片は(5, 0, 0)で、y 軸上の切片は(0, 5, 0)、z 軸上の切片は(0, 0, 5)である。この問題にかぎらず、常に図形を描いて問題にあたることは重要である。出来の良い学生ほどきちんとした図が描けている。この平面に垂直なベクトル(平面の法線ベクトル)は **n** = $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ である。**n** とベクトル OA の内積 **n** ・OA = $1/\sqrt{3}-1/\sqrt{3}+2/\sqrt{3}$ = $2/\sqrt{3}$, **n**・**n**= 1。(**n**・OA)/(**n**・**n**)＝$2/\sqrt{3}$ 。これより、ベクトル OA を平面 x + y + z = 5 への正射影したベクトルを OA"とすると、OA" = OA－$2/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ = (1/3, －5/3, 4/3)。同様に OB の平面 x + y + z = 5 上への正射影 OB" = (1, 1,－1)－$1/\sqrt{3}(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ = (2/3, 2/3,－4/3)。よってベクトル OA"とベクトル OB"の外積を計算すると、(4/3, 4/3, 4/3)となる。外積の大きさの絶対値が平行四辺形の面積だから、$4/\sqrt{3}$が答えである。ベクトルの内積と外積の定義を良く理解していればでき

る問題である。

質問(類題)：[OT, p.37, 問題 9 (3), 2012]
a = OA = (1, 1, 1), **b = OB** = (2, 1, 0)について、a と b で作られる平行四辺形を、平面 2x−y−z = 5 に射影した平行四辺形の面積を求めよ。

先の質問より平面が少し複雑になっている。平面の切片は、x 軸上が(5/2, 0, 0), y 軸上が(0, −5, 0), z 軸上が(0, 0, −5)である。またこの平面の法線ベクトル **h** は **h** =(2, −1, −1)である。 h の大きさは$\sqrt{6}$。よって平面の単位法線ベクトル **n** は、**n** = (2/$\sqrt{6}$, −1/$\sqrt{6}$, −1/$\sqrt{6}$)。これより、OA の 2x − y −z = 5 への射影 OA" = **a**" = (1, 1, 1)。同様に OB" = b" = **b** −(**n**・**b**)/(**n**・**n**)**n** = (1, 3/2, 1/2)。よって、**a**" × **b**" = (−1, 1/2, 1/2)。従ってその大きさは$\sqrt{6}$/2。

質問：3 次元空間直線おける直線 L_0: $\frac{x+5}{-3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{2}$ を平面α：x−y + 4z−7=0 に正射影した直線 L_1 の方程式を求めよ。

まず求める方程式は L_1: $\frac{x+23}{-19}=\frac{y-14}{13}=\frac{z-11}{8}$となる。

これは、直線 L_0 の方向ベクトルは d_0 = (−3, 2, 2)で、平面αの法線ベクトルは **h** = (1, −1, 4)である。また、L_0 とαとの交点 R= (−23, 14, 11)で、内積 h・d_0=3, |h|^2 = 18。よって、d_0 の h 上への正射影ベクトルは、$\frac{h\cdot d0}{|h|2}$h = $\frac{1}{6}(1,-1,4)$ である。よって直線 L_0 を平面αへ正射影した直線 L_1 と平行なベクトルは、$d_0-\frac{h\cdot d0}{|h|2}\boldsymbol{h}$= 1/6$(-19,13,8)$となる。よって L_1 の方向ベクトルは(−19, 13, 8)でありかつ R(−23, 14, 11)を通るから最初に記した通りである。図を描いて考えれば教材作成などに役立つ。

8．大学院入試過去問題からの質問

学生の質問：[NA, 1. 線形代数の問題, 2010]

W = $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, W^2 + W + E = 0 のとき、

問題 A、a, b を求めよ。但し、E は単位行列とする。
問題 B. W^3 を求めよ。また W^{100} + W^{50} を求めよ。

4 年生の大学院を受験する学生からの質問である。最近の大学院の入試は紙に書いて答案を提出するというのではなく、この大学院の成績は、面接で質疑・応答してから判定するようである。面接の練習も兼ねて質問したと思われる。

上の問題の略解の例を以下示す。

A. W = a$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ + b$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ だから、J = $\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ とおくと、J^2 = −E で W = aE + bJ となる。E と J は交換可能だから、W^2 = $(aE + bJ)^2$ =a^2E + 2abJ + b^2J^2 =(a^2−b^2)E+2abJ。

一方、W^2 + W + E = 0 より、W^2 = —W—E だから、−aE −bJ −E=(a^2−b^2)E+2abJ。これより、2ab = −b かつ a^2−b^2=−(a + 1)。これより、b ≠ 0のとき、a = −1/2, b = $\pm\sqrt{3}/2$である。b = 0 なら、a = $\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる。

B. W^3 = —W^2—W = E。よって
W^{100} + W^{50} = $W^{33\cdot 3+1}$ + $W^{16\cdot 3+2}$= W + W^2 = −E
となる。

数と行列の間には、類似する事柄とそうでないものがある。E は数の 1、J は虚数単位 i の行列表現である。数の作る環は可換環であるが、2 次の正方行列全体の作る完全行列環は非可換環である。共通の性質とそうでない性質が、見つけられる。

数学の体系化や構造の把握を意識する必要がある。

再び、微分方程式の問題に移る。

学生の質問：[NA, 解析学の問題, 2011] xy dy/dx = y^2 − 1

置換積分で最初に求めてみよう。
y/(y^2− 1) dy/dx = 1/x。y^2−1= t と置くと、1/(2t) dt = 1/xdx。これより t =C'x^2 = y^2−1。よって、Cx^2 + y^2 = 1

次に 2y/(y^2 − 1)dy = (2/x)dx と変形して$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+\log C$を使用しても良い。

学生の質問：[NA, 解析学の問題, 2012]
a_n = $\sqrt{n+1}$ − $\sqrt{n}$ について、

A. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$。

B. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$が発散することを示せ。

解答例、A．a_n = $\sqrt{n+1}$ − $\sqrt{n}$ = 1/($\sqrt{n+1}$ + $\sqrt{n}$)
これより、lim a_n = 0

C. 部分和 $\sum_{n=0}^{t} a_n$ = ($\sqrt{1}-\sqrt{0}$) + ($\sqrt{2}-\sqrt{1}$) + ($\sqrt{3}-\sqrt{2}$)+ ・・・+ ($\sqrt{t+1}$ − $\sqrt{t}$)= $\sqrt{t+1}$

故に、$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$は発散する。

分母の有理化のみならず、分子を有理化することも、この場合は n が消去されて定数になることを理解しておく。このため、極限の判定が容易になる。

また、数学では定義の深い理解が必要であるが、無限級数は、部分和の極限として定義されている。これが理解されていれば、この問題は容易。

学生の質問：[NA, 解析学の問題 2011]
次の微分方程式を解け。
xy' log x = y log y

解答例. x = 1, y = 1 は解。従って x ≠ 1,y ≠ 1で考えればよい。

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ dx = \log|f(x)| + \log C$$

を利用する。与式は x と y の対称式で、1/(y log y) dy = 1/(x log x) dx.

よって、$\frac{(\log y)'}{\log y} dy = \frac{(\log x)'}{\log x}\ dx.$ 故に、

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \int \frac{(\log x)'}{\log x} dx = \log|\log x| + \log C$$

よって log |log y| = log |log x|。log|y|= log|x|+ log C より、x = y, y = 1/x

9．おわりに

大学初年級の学生は[Ok, 2015]を教科書で使用している想定をした。質問にきた学生は、ノートに教科書の問題が多く解いてあり、分からない問題には付箋紙が貼られていた。更に教科書の本文にも付箋紙が貼ってあった。丁寧に教科書を読み、本分の説明の予習を行うことで「自分の頭で考えて、ワクワク感を持ち、学習指導要領のアクティブ・ラーニングの大学版」の体験をしたと考えられる。微分方程式は２年生になってから[YI, 2017]の教科書からの質問である。初年級の大学生で、数学好きの学生がどの程度の力量であるかを知ることは教員にとって必要なことである。

「実際に大学での授業を振り返ると、数学の好きな大学生は、決して教科書や教師のヒントなどを軸に数学をするのではなく、自分の関心・興味を中心に算数・数学を考察している場合が多い。良く例えられるが、数学を考えることは『庭師が庭を自分のデザインに沿ってどのように美しく仕上げるか』とか『箱庭で子どもが遊ぶとき、石、木、家をここに置き、川がここに流れているようにしたいなど自分の思いを実現し作っている得意そうな子どもの顔というか満足そうな姿に似ている』。いった通りにしか出来ない学生の数学の出来は芳しくないことが多い」([KY, ｐ.21, 2012])。

高校の教師以外の小・中の教師には、線形代数や微積分は、単に問題を解くのみならず、数学の小さな自分なりの体系として捉えて、構築を目指し、また積分の範囲など図示することにより小中の教師として役に立つ事例に気付くことが大切である。自分で予習して得られるものは、例え線形代数や微積分からでも教員として必要な何かが、例えば、問題を解くことを越えて、自分なりの数学の体系化・構造化などが得られると思われる。

参考文献

[Ba] 馬場敬之、スバラシク実力がつくと評判の常微分方程式キャンパス・ゼミ 改定 2, マセマ出版社、2015

[Ka] 金光三男、算数・数学教育における教材の意義とその背景、中部大学現代教育学部紀要、第 6 号、35－44、 2014

[KS] 金光三男・鷲見俊郎、大学と高等学校までの数学のつながりにつて、中部大学現代教育学研究紀要、第 3 号、1－6, 2010

[KY] 金光三男・矢木修、誤答から考察する数学教育、中部大学現代教育学研究紀要、第 5 号 21－29, 2012

[NA] NAIST(情報科)入試過去問題集(数学),2010－12

[OO] 大矢雅則・岡部恒治他、改訂版 新編 数学 I, 数研出版、2006

[Ok] 奥村吉孝、基礎から学び考える力をつける微分積分学、培風館 2015

[OT] 奥村吉孝・手嶋忠之、基礎から学び考える力をつける線形代数、プレアデス出版 2012

[Si] 柴田義松、ヴィゴツキー入門、子どもの未来社、2006

[YI] 矢野健太郎・石原繁、基礎解析学(改訂版)、裳華房 2017

(2018 年 9 月 7 日受理)