

空気抵抗によるニュートンビーズ軌跡形状の変化 — くりこみ群方程式による大域的近似解と厳密解の比較 —

大岩 聖也* 阿武木 啓朗**

*豊明市立栄中学校 (愛知教育大学 2016 年度卒業生)

**愛知教育大学理科教育講座

Air Resistance Effect on anti-Newton Chain Fountain —Renormalization Group based global solution versus Exact solution—

Seiya OIWA* and Hiroaki ABUKI**

*Toyoake city Sakae Junior High School, Toyoake 470-1161, Japan
(Fiscal Year 2016 Graduate, Science course, Aichi University of Education)

**Department of Science Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1. 研究の目的

ビーズチェーンを絡まないようにコップに入れ、ある程度の高さからビーズチェーンの端をコップから落とすことにより不思議な運動が始まる。ビーズチェーンはコップの縁につかず、浮き上がったような様子ですべてのビーズチェーンが落ちる[1]。この現象は重力の法則に反しているように見えることから (アンチ)ニュートンビーズと呼ばれている。

ニュートンビーズの軌道形状は、チェーンが連続体 (ひも) 近似できるとし、定常状態が実現すると仮定すれば、反転カタナリー (逆懸垂線) 曲線となる[2,3]。カタナリー曲線は、一様重力のもとでひもを垂らしたときに実現する形であり、重力の大小によらず、両固定端の座標、ひもの長さといった境界条件のみによって定まる。そのため、月の上でも同じ形が実現する。ニュートンビーズの反転カタナリー曲線の場合も、遠心力は張力を一様にシフトする効果のみをもつことが示されるので、重力や質量密度には依らず、立ち上がり (pick-up) 点、最高到達点、着地 (pick-down) 点などの境界条件によってのみ形が決まると考えられる。¹そのため月の上でも境界条件さえ適当に与えることができるならば、同じ曲線が得られるだろう。

では、地上における特殊事情である空気による粘性抵抗の効果を考慮すると軌跡の相対的形状はどのように変化するだろうか。ここでは、空気抵抗を考慮して

も定常状態が実現するものと仮定し、つりあいの方程式を立て、チェーンの形状解析を行う。解析にあたっては、まず、抵抗が小さいときに有効と考えられる摂動論を用いて近似解を構成し、その適用限界、問題点について考察する。次に、摂動解を元に、くりこみ群の手法により大域的近似解を導出し[6,7]、その有効性について、検討を行う。最後に厳密解を導出し、くりこみ群の方法による大域的近似解との比較を行う。

2. ニュートンビーズの軌跡形状

まず、文献[2]で与えられている、空気抵抗のない場合の形状解析を簡単にフォローしておく。ニュートンビーズの定常状態で $y(x)$ という曲線が実現したとする。適当に原点をシフトして $y(0) = 0$ とできる。図 1(a) にセットアップを示す。

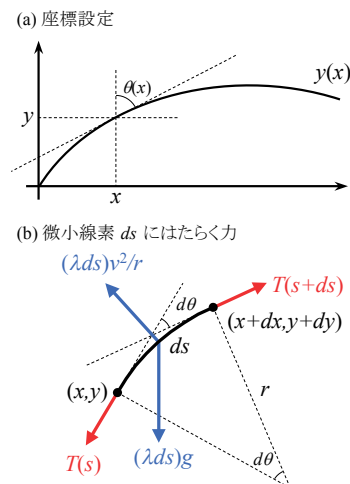


図 1

¹ ただし、重力の強さのみならず、質量密度、ビーズの形状といった物質定数が、定常状態で実現する速度や、立ち上がり点、着地点での張力などを通して、境界条件そのものに間接的に影響を与えていると考えられている[2,4]。

曲線上の任意の基準点から曲線に沿って (x, y) の位置までの曲線の長さを $s(x)$ とする．チェーンが曲線の接線方向に動く（一定の）速度を v ，速度の方向と鉛直上向きのベクトル (\hat{y}) がなす角度を θ とする．このセットアップでは， $y'(x) = \cot \theta$ ， $s'(x) = 1/\sin \theta$ ， r を曲率半径として， $1/r = \theta'(s) = -y''(x)/s'(x)^3$ である．チェーンの単位長さ当たりの質量を λ ，重力加速度を g として，図1(b)にチェーンの微小線要素にはたらく力を示した．内力を赤で示している．チェーンの接線方向とそれに垂直な方向の力のつりあいの式は微小量の最低次まで残すと，次の形になる．

$$\begin{aligned} T'(s) &= \lambda g \cos \theta, \\ T(s)\theta'(s) + \lambda g \sin \theta &= \lambda v^2 \theta'(s). \end{aligned}$$

この微分方程式を解くと反転カタナリー曲線が得られる．

$$y = y_0 - k \cosh\left(\frac{x - x_0}{k}\right). \quad (1)$$

ここでの k, x_0, y_0 は積分定数である． $x = 0$ で $y = 0$ を課すると， $y_0 = k \cosh(x_0/k)$ である．もともとの力学定数 λg は積分定数 k の中に繰り込まれており，このことから，平衡状態でのチェーンの形状は重力の大小によらず，境界条件のみによって定まることが分かる．また速度 v の効果は，遠心力項を通じて，チェーン内部の張力を一様に λv^2 だけシフトするのみであり，定常状態が実現するとする近似のもとでは，形状の観測量には一切効いてこない．

3. 空気抵抗と摂動解

空気抵抗とは，物体が空気中を進むときに空気から受ける力のことである．そして，空気抵抗は空気のずり粘性に起因する．チェーンがある形を保って速度が一定の v になったとする．チェーンの周りの空気にはチェーンと同じ向きに流れが形成されると考えられる．このとき，流れが層流であればチェーンには単位長さ当たりおよそ $dF/dl = -2\pi\eta v/\ln(L/a)$ の抵抗力がはたらくことになる．ここで， η は空気のずり粘性係数， a はチェーンを円柱近似した場合の断面の半径， L はシステムサイズ（運動するチェーンの影響が及ぶ限界距離：カットオフ）である．この場合の抵抗は速度に比例する．層流乖離点が存在し，乱流や渦が発生する場合には，抵抗は速度に比例するとは限らない．代表的な例は流体中の物体が受ける慣性抵抗であり，抵抗力は速度の二乗に比例する．以下の議論は抵抗力が速度のいかなる関数であっても成立する．単位長さ当たりの抵抗力を $dF/dl = -(\lambda g)\epsilon$ と置く． ϵ は無次元の抵抗力であ

り，粘性係数とチェーン形状にも依存する速度の関数である．粘性抵抗の場合は $\epsilon = \eta(2\pi/\lambda g \log_e(L/a))v$ ，単純な慣性抵抗の場合は $\epsilon \propto v^2$ である．本記事では ϵ を抵抗パラメータと呼ぶことにする．

抵抗を考慮した場合，接線方向の力のつりあいが次のように変更を受ける．

$$T'(s) = \lambda g \cos \theta + \lambda g \epsilon, \quad (2)$$

$$T(s)\theta'(s) + \lambda g \sin \theta = \lambda v^2 \theta'(s). \quad (3)$$

この二式から $y(x)$ についての方程式をつくると次の微分方程式が得られる．

$$y^{(3)}(1 + y'^2) - \left(y' - \epsilon \sqrt{1 + y'^2}\right)y''^2 = 0.$$

抵抗がゼロの場合，この形状決定方程式には重力加速度や質量密度などの物質定数は現れない．これらは抵抗パラメータ ϵ を通してのみ，ビーズの形状に影響を与え得ることが分かる．上の方程式は y を含んでいないので， $z = y'$ についての二階の微分方程式である．

$$z''(1 + z^2) - z z'^2 = -\epsilon \sqrt{1 + z^2} z'^2. \quad (4)$$

この方程式の摂動級数解を次のように表す．

$$z = z_0 + \epsilon z_1 + \epsilon^2 z_2 + \dots$$

これを微分方程式に代入し，オーダーごとに解くことを考える．次の無限タワーが得られる．

$$\begin{aligned} \frac{z_0''}{z_0'} - \frac{z_0 z_0'}{1 + z_0^2} &= 0, \\ z_1'' - \frac{2z_0 z_0'}{1 + z_0^2} z_1' - \frac{z_0'^2 - 2z_0 z_0'}{1 + z_0^2} z_1 &= -\frac{z_0'^2}{\sqrt{1 + z_0^2}}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

ゼロ次の方程式は非線形微分方程式であるが，両辺を積分すると， a を積分定数として $z_0' = -a\sqrt{1 + z_0^2}$ となる．これを変数分離法で解けば，解は $z_0 = -\sinh(ax + b)$ となる．これを x で積分すると反転カタナリー曲線(1)が得られる．一次の補正 z_1 の決定方程式は，次の二階の非斉次線形微分方程式となる．

$$\begin{aligned} z_1'' - 2a \tanh(ax + b) z_1' + a^2(1 - 2 \operatorname{sech}^2(ax + b)) z_1 \\ = -a^2 \cosh(ax + b) \stackrel{\text{def}}{=} f_{\text{source}}(x). \end{aligned}$$

まず， $z_{h1}(x) \equiv \cosh(ax + b)$ が一つの斉次解になっていることはすぐに確かめられる．これをもとに一般解

を構成してみよう[5]．ロンスキー行列式は

$$\Delta(x) \propto e^{\int^x 2a \tanh(ax'+b) dx'} = (\cosh(ax+b))^2,$$

であるから，もう一つの斉次解は，

$$z_{h2}(x) \equiv z_{h1}(x) \int^x \frac{\Delta(x')}{z_{h1}(x')^2} dx' = x \cosh(ax+b).$$

斉次解のセット $\{z_{h1}, z_{h2}\} = \{\cosh(ax+b), x \cosh(ax+b)\}$ が得られたので，ヘヴィサイドのステップ関数 $\theta(x)$ を用いてグリーン関数を

$$D(x, x') \equiv \theta(x-x') \frac{z_{h2}(x)z_{h1}(x') - z_{h1}(x)z_{h2}(x')}{\Delta(x')},$$

と定義すれば，特解 $z_p(x)$ (の一番簡単なチョイス)は，

$$z_p(x) = \int D(x, x') f_{\text{source}}(x') dx' = -\frac{a^2 x^2}{2} \cosh(ax+b),$$

となる．一般解は特解と斉次解の和であるから， A と B を任意定数として，

$$z_1 = \cosh(ax+b) \left\{ -\frac{a^2 x^2}{2} + A + Bx \right\}.$$

摂動を開始する点を $x = \mu$ とすると， $\{z_1, z_1'\}$ に対する摂動補正が消える条件から積分定数 A と B が定まり，

$$z_1 = -\frac{a^2(x-\mu)^2}{2} \cosh(ax+b),$$

となる．一次までの摂動解は次のようになる．

$$z(x, \mu) = -\sinh(ax+b) - \epsilon \frac{a^2(x-\mu)^2}{2} \cosh(ax+b).$$

原理的には任意の次数まで同様にして補正項を計算することができる．積分して $\mu = -b/a$ と選べば，

$$y = y_0 - \frac{\cosh(ax+b)}{a} + \epsilon \left\{ \frac{ax+b}{a} \cosh(ax+b) - \frac{2+(ax+b)^2}{2a} \sinh(ax+b) \right\}.$$

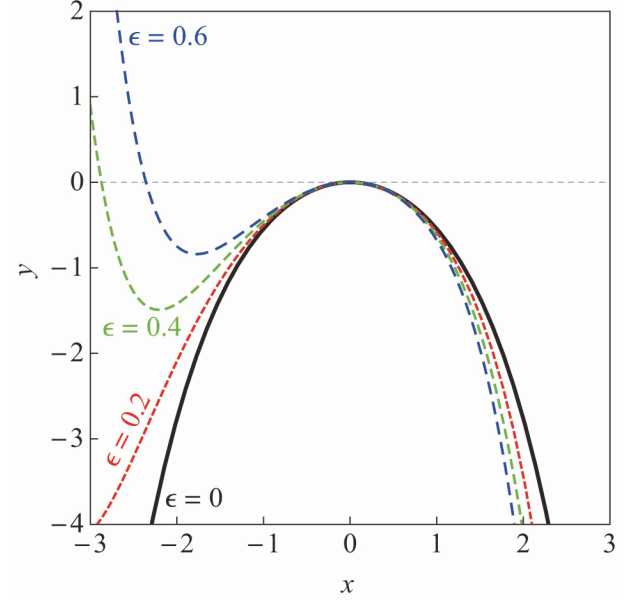


図 2

摂動を開始する点 $\mu = -b/a$ から離れ $|x-\mu| \gg 1/a$ の領域に入ると，摂動項が病的な振る舞いを示すことが見てとれる． $\mu = b = 0$ と選び， $y_0 = a = 1$ としたときの摂動解の振る舞いを図 2 に示す．各曲線は， $\epsilon = 0, 0.2, 0.4, 0.6$ の場合の形状の振る舞いである． ϵ がどんなに小さくとも， $x \ll -1$ の領域では現実のビーズチェーン形状からかけ離れた振る舞いを示している．この摂動項の異常は，力学系における永年項と類似した振る舞いと言える．

次に進む前に，これまでの二階の微分方程式の解析を，一階の二成分ベクトル方程式に対する解析として捉え直してみる．(4)式において， $z = u(x), z' = v(x)$ とおくと，次の一階のベクトル微分方程式が得られる．

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ uv^2/(1+u^2) - \epsilon \left(\frac{0}{v^2/\sqrt{1+u^2}} \right) \end{pmatrix} \quad (5)$$

ゼロ次の解は，

$$\begin{pmatrix} u_0(x; \{a, b\}) \\ v_0(x; \{a, b\}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sinh(ax+b) \\ -a \cosh(ax+b) \end{pmatrix},$$

となる． $\{a, b\}$ は初期ベクトルと一対一に対応するパラメータである．今の場合，ゼロ次の方程式が非線形であり，独立基底ベクトル解の線形結合の形には書けていない．この点は，ゼロ次の方程式が線形方程式に帰着することで，一般解が独立基底の線形結合となり，その係数が初期ベクトルと一対一に対応する他の多くの例とは異なる[8]．一次の補正に対す

る方程式は、線形方程式となり $x = \mu$ で初期（補正）ベクトルがゼロとなるような解は一意的に見つけることができる。結果は、先の議論を参照すれば、

$$\begin{pmatrix} u_1(x, \mu) \\ v_1(x, \mu) \end{pmatrix} = -\frac{a(x - \mu)}{2} \cosh(ax + b) \\ \times \begin{pmatrix} a(x - \mu) \\ 2a + a^2(x - \mu) \tanh(ax + b) \end{pmatrix}.$$

となる。 ϵ の一次までの摂動解は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} u(x, \mu) \\ v(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0(x, \{a, b\}) \\ v_0(x, \{a, b\}) \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} u_1(x, \mu) \\ v_1(x, \mu) \end{pmatrix}.$$

4. くりこみ群による大域近似解の構成

さて、このように摂動項が異常を示す場合、大域的解を構成する処方箋がいくつかある。力学系においては多時間尺度展開法、Bogoliubov の平均化法、くりこみ群法[6-10]などが挙げられる。ここでは、くりこみ群の方法で大域的解を構成してみよう。基本的な考え方は、積分「定数」を摂動開始点 μ （＝くりこみ点）の関数に格上げすることである； $\{a, b\} \rightarrow \{a(\mu), b(\mu)\}$ 。そうすることで $x = \mu$ を離れても近似ができるだけ破綻しないようにする。パラメータがくりこみ点にどのように依存するべきか、指針を与えてくれるのがくりこみ群方程式であり、幾何学的には包絡線の構成方程式と解釈できる[7]。

$$\frac{\partial}{\partial \mu} z(x, \mu) = 0.$$

この条件がコンタクト点 $x = \mu$ で成り立つようにする。具体的に計算をすると、例えば[7]で例示されている減衰振動の問題とは異なり、これだけでは必要な式が出てこない。そこで、文献[8, 9]にならい、ベクトル方程式に対する解ベクトルに対して条件

$$\left. \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} u(x, \mu) \\ v(x, \mu) \end{pmatrix} \right|_{\mu=x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

を課す。この条件は二次元相空間上の解軌道群がつくる包絡線の構成方程式として見ることもできるだけでなく、この条件を解いて得られる解は元の微分方程式を同じオーダーまで（今の場合 ϵ の一次まで）で満たすことが示されている[7-9]。具体的に計算すると、上の条件は以下の二本の微分方程式＝くりこみ群方程式に帰着する。

$$\begin{aligned} \mu a'(\mu) + b'(\mu) &= 0, \\ \epsilon a(\mu)^2 - a'(\mu) &= 0. \end{aligned}$$

変数分離法を用いてこれらの微分方程式を解くと次が得られる。

$$\begin{aligned} a(\mu) &= \frac{a_0}{1 - \epsilon a_0 \mu}, \\ b(\mu) &= b_0 - \frac{a_0 \mu}{1 - \epsilon a_0 \mu} - \frac{\log(1 - \epsilon a_0 \mu)}{\epsilon}. \end{aligned}$$

これらを一次の近似解 $u(x, \mu)$ に代入し、 $\mu = x$ と選ぶと、次の大域的包絡線解 $u_E(x) = u(x, x)$ が得られる。

$$u_E(x) = -\frac{1}{2} \left(e^{b_0} f_\epsilon(x; a_0, 0) - \frac{1}{e^{b_0} f_\epsilon(x; a_0, 0)} \right),$$

ただし、

$$f_\epsilon(x; \alpha, \beta) \equiv (1 - \epsilon(\alpha x + \beta))^{-\frac{1}{\epsilon}}.$$

これがくりこみ群で改良された解である。 $1/\epsilon$ を含んでおり、ナイーブな摂動論では出てきそうにない形をしていることに注意されたい。 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では、 $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_\epsilon(x; \alpha, \beta) = e^{\alpha x + \beta}$ である。また、関数 $f_\epsilon(x; \alpha, \beta)$ への乗数の効果を調べると、以下のようにパラメータの変更に繰り込めることが分かる。

$$A f_\epsilon(x; \alpha, \beta) = f_\epsilon \left(x; A^{-\epsilon} \alpha, A^{-\epsilon} \beta + \frac{1 - A^{-\epsilon}}{\epsilon} \right).$$

これを用いると、くりこみ群による大域解 $u_E(x)$ は次のように簡単に表記できる。

$$\begin{aligned} u_E(x) &= -\frac{1}{2} \left(f_\epsilon(x; \bar{a}, \bar{b}) - \frac{1}{f_\epsilon(x; \bar{a}, \bar{b})} \right), \\ \bar{a} &= e^{-\epsilon b_0} a_0, \bar{b} = \frac{1 - e^{-\epsilon b_0}}{\epsilon}. \end{aligned}$$

$\{a_0, b_0\}$ の代わりに、上の $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ を新しいパラメータと見れば、ビーズの形状は、 $dy_E/dx = u_E(x)$ を積分して、次式が得られる。

$$\begin{aligned} y_E &= y_0 - \frac{1}{2\bar{a}} \left(\frac{1}{1 + \epsilon} (1 - \epsilon(\bar{a}x + \bar{b}))^{1 + \frac{1}{\epsilon}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1 - \epsilon} (1 - \epsilon(\bar{a}x + \bar{b}))^{1 - \frac{1}{\epsilon}} \right). \end{aligned}$$

あるいは、パラメータ $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ の代わりに、より物理的な意味が明らかな $k = 1/\bar{a}$ 、 $x_0 = -\bar{b}/\bar{a}$ を採用することにすれば、大域解は、次のように書き直される。

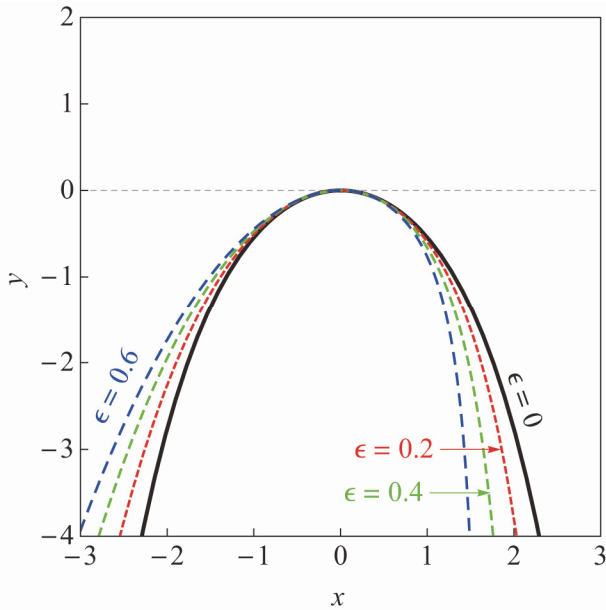


図 3

$$y_E = y_0 - \frac{k}{2} \left(\frac{\left(1 - \epsilon \frac{x - x_0}{k}\right)^{1+\frac{1}{\epsilon}}}{1 + \epsilon} + \frac{\left(1 - \epsilon \frac{x - x_0}{k}\right)^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1 - \epsilon} \right).$$

この表示では、 $x = x_0$ で y_E が最大値を取ることが明らかである。一方、 k をスケールパラメータと呼ぶことにする。例えば、 k の値が c 倍に変化すると $y_E(x)$ のグラフは変化するが、 x 軸と y 軸を共に c 倍にスケール（ズームイン）して見れば、グラフは重なる。²

ここで得られた大域解は、抵抗パラメータ ϵ がゼロの極限で反転カタナリー曲線 $y = y_0 - k \cosh((x - x_0)/k)$ を正しく再現することが分かる。また、 ϵ について展開し、1 次までとれば、病的な摂動項を再現する。

図 3 では、 $k = 1$ 、 $x_0 = 0$ と選んだときの、大域解をプロットしている。原点で $y = 0$ になるように y_0 を選び、比較しやすいように図 2 と同じスケールで描画した。抵抗力がゼロで無い場合、ビーズの形は左右非対称となっているが、摂動解のようなおかしい振る舞いは無い。定性的には抵抗が大きくなると最高点より右側では急激に落ちるようになる。

具体的な定量的比較をするためには境界条件を指定して、パラメータ $\{x_0, k\}$ を決めなければならない。しかし、抵抗値を決めたときに、実現する境界条件

表 1

	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0.2$	$\epsilon = 0.4$	$\epsilon = 0.6$
k	2.41	2.14	1.90	1.68
x_0	2.13	2.06	2.00	1.95

² 大域解が $y_E/k = F(x/k)$ の形をしているので当然である。

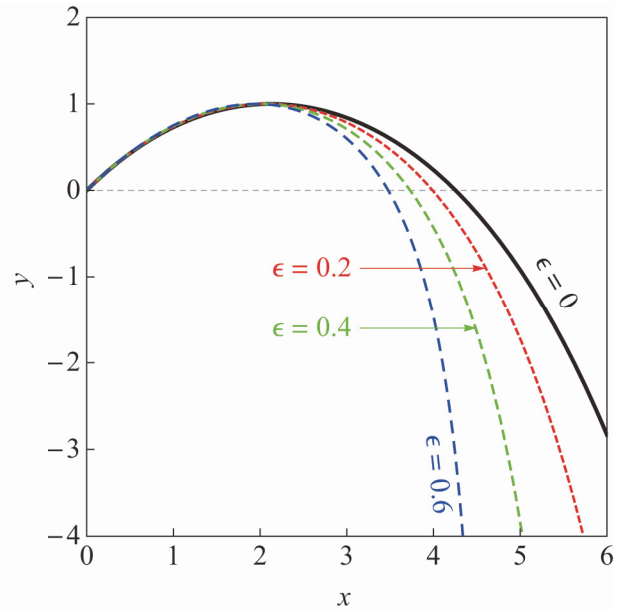


図 4

がはっきりしない。これは、定常状態に至る過渡的状态について全く知識がないからであろう。ここでは、半定量的な比較をするために、立ち上がりの角度を 45° 、最高到達点を $y=1$ に揃えて横方向の相対的な形の比較を行う。この二つの条件から、 ϵ が与えられたときに、 $\{x_0, k\}$ をユニークに決めることができる。表 1 に各抵抗値に対して、決定されたパラメータ $\{k, x_0\}$ の値を記載した。

図 4 にビーズチェーンの形状をプロットした。いずれの曲線も、 $x = 0$ で 45° で飛び出しており、最高点 $y = 1$ に到達したあとに降下している。降下の具合は抵抗が大きくなるにつれて急激になる。最高点に到達する x_0 は、抵抗が大きくなるにつれて左にシフトしている。

抵抗力を増加させたときに、最高到達点が上下どちらにシフトするのか、この解析だけでは分からない。言えることは、実験の条件を整えることで、立ち上がりの角度を 45° に揃えることができたとして、最高到達点が $y = 1$ に見えるようにスケールを変更して見たときに、図 4 の形が実現するということである。スケールもきちんと決めることができれば、最高到達点についても予言ができるようになる。このためには、定常状態に至る過渡的状态について知る必要がある。チェーンがいかんして定常状態へと至るのか、チャレンジングな今後の検討課題である。

5. 厳密解との比較

この問題には厳密解が存在する。ここでは、厳密解を導いて前節のくりこみ群による大域解と比較する。(2)式と(3)式から $T'(s)/(\lambda v^2 - T(s))$ を作り積分すると、第一積分定数を k として、

$$\lambda v^2 - T(s) = \frac{\lambda g k}{\sin \theta} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^\epsilon.$$

これを用いて, (2)式から $T(s)$ を消去して $\theta'(s) =$

$(\sin \theta) \frac{d\theta}{dx}$ などを用いて整理すると,

$$\frac{1}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \right)^{-2} \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^{\epsilon-1} \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{k},$$

両辺を積分すると, x_0 を新しい積分定数として,

$$\frac{1}{\epsilon} \left(1 - \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^\epsilon \right) = \frac{x - x_0}{k}.$$

従って,

$$\cot \frac{\theta}{2} = \left(1 - \epsilon \frac{x - x_0}{k} \right)^{1/\epsilon}.$$

ところで, $\frac{dy}{dx} = \cot \theta = \frac{1}{2} (\cot(\theta/2) - 1/\cot(\theta/2))$ で

あるから, これを x について積分すると,

$$y = y_0 - \frac{k}{2} \left(\frac{\left(1 - \epsilon \frac{x - x_0}{k} \right)^{1+\frac{1}{\epsilon}}}{1 + \epsilon} + \frac{\left(1 - \epsilon \frac{x - x_0}{k} \right)^{1-\frac{1}{\epsilon}}}{1 - \epsilon} \right).$$

これが厳密解である. くりこみ群による大域解と一致していることが分かる. すなわち, この問題は, 一次の近似解をもとにくりこみ群方程式により改良を施した解が厳密解に一致する一例を提供している. くりこみ群による大域解と厳密解が一致する十分条件については[11]で調べられており, これによれば一次の摂動解に永年項以外の正則な部分がない場合には, くりこみ群による大域解は厳密解に一致する. ここで考えた例でも, $x \rightarrow -\infty$ で正に発散する項を永年項と捉えるならば, この条件を満たしている.

6. まとめ

本小稿では, 空気抵抗がニュートンビーズの定常状態における形状にどのような影響を与えるのかについて考察を行った. 空気抵抗を摂動的に取り扱うと, 非物理的な振る舞いが生じることが分かった. そこで一次の摂動解をもとにくりこみ群の処方箋により大域近似解を導出し, 摂動解との比較を行った. 大域的近似解では, 非物理的な振る舞いは消失するだけでなく, 厳密解に一致することが確認された. ビーズチェーン

の平衡形状に対する空気抵抗の定性的な効果は, 最高点を与える点に関する反転対称性を破ることである. また, 立ち上がりの角度を揃え, 同時にスケール変換で最高点を揃えることで, 抵抗がビーズチェーン形状に与える効果について半定量的な比較を行った. 抵抗が大きくなるにつれて, 最高点を与える点は立ち上がりの点に近くなり, 最高点に到達した後のチェーンの降下の度合いは大きくなることが分かった. これらは直感と合致する.

今後の展望をいくつか挙げておきたい. 一つは先述したように, 定常状態が実現するメカニズム, 及びそれに至る過渡的過程を明らかにすることだ. これは, ニュートンビーズが上昇する原因を突き止めることでもある. この要因として, 慣性力や垂直抗力などが考えられてはいるが, 未だにコンセンサスはない. これを明らかにすることで, 境界条件の取り方についての何らかの指針が得られるだろう. 管中の流体の輸送についてのサイフォンの原理との関係性・類似性も興味深い. また, 応力が張力のみのもみ状のチェーンだけでなく, 柔らかいゴムのような(小さな曲げ応力のある)弾性体でもニュートンビーズ現象が現れるのか, 実験的にも理論的にも面白い研究テーマである.

謝辞

草稿の段階で, 有益なアドバイス・コメントを賜りました, 愛知教育大学数学教育講座の市延邦夫さん, 元東京理科大学教授の鈴木公先生に感謝します. 元京都大学教授の國廣悌二先生には, 草稿段階の Sec. 4 で展開されていたくりこみ群方程式の ad hoc な導出と, 文献[7]の処方箋との相違についてご指摘頂き, これについて, いくつかの有用な参考文献を教えて頂く等, 数々の助言を頂きました. 感謝いたします.

註

本記事は, 第一著者大岩聖也による 2016 年度卒業研究に加筆・修正を加えたものである.

参考文献

- [1] ニュートンビーズの動画は youtube や google で “chain fountain” と検索すればいくつか見つかるが, 例えば次のリンクを参照して欲しい:
S. Mould, “Self siphoning beads” (2013), <http://stevemould.com/siphoning-beads/>.
- [2] J.S. Biggins and M. Warner, “Understanding the chain fountain”, *Proceedings of the Royal Society A*. **470**: 20130689.
- [3] 松田卓也, 「ニュートンビーズの力学と逆懸垂線」, 基礎科学研究所 科学の散歩道 記事 (2013).
- [4] Epifanio G. Virga, “Dissipative shocks in a chain fountain”, *Phys. Rev. E* **89** (2014), 053201.
- [5] 例えば, 和達三樹「物理のための数学」岩波書店,

を参照して欲しい.

- [6] L. Y. Chen, N. Goldenfeld, Y. Oono, “Renormalization Group Theory for Global Analysis”, Phys. Rev. Lett. 73 (1994) 1131-1135; “The renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers and reductive perturbation theory”, Phys. Rev. E54 (1996) 376-394.
- [7] Teiji Kunihiro, “A geometrical formulation of the Renormalization Group method for global analysis”, Prog. Theor. Phys. 94 (1995) 503-514.
- [8] T. Kunihiro, “The Renormalization group method applied to asymptotic analysis of vector fields”, Prog. Theor. Phys. 97 (1997) 179-200.
- [9] S. Ei, K. Fujii, T. Kunihiro, “Renormalization group method for reduction of evolution equations: Invariant manifold and envelopes”, Annals Phys. 280 (2000) 236-298.
- [10] 包括的レビューとして, 国広悌二, “微分方程式の縮約と包絡線: くりこみ群法の幾何学的解釈と不変多様体の構成”, 日本物理學會誌 65 no.9 (2010), 683-690, が挙げられる.
- [11] 山口義幸「微分方程式におけるくりこみ群方程式」数理解析研究所講究録 1275 巻 (2002).

(2018 年 9 月 10 日受理)