イプシロン　2018. Vol.60,　17 − 24

加減逆思考問題における児童の解答とプリフォーマルな表現によるその指導の方向性

愛知教育大学　山　田　篤　史

1．はじめに

筆者は，本誌第 47 巻において，加減逆思考問題の解法が未習の小学校２年生と既習の３年生が，当該問題にどのような解答をするかについて議論した(山田, 2005)。当該の調査は，小学校２～６年生に対して行った加法構造及び乗法構造を持つ逆思考問題に関する調査(山田, 2004)の２・３年生のデータを抽出して行ったものであり，全体の調査自体は，加減逆思考問題に関して焦点を当てたものではなかった。しかし，その抽出したデータの結果は興味深いものであった。

加減逆思考問題の解法が未習の２年生に，その典型問題の１つである「子どもが遊んでいました。そのうち５人が帰ったので，９人になりました。はじめ何人いたのでしょう。あなたの考え方も説明してください。」という問題を解答してもらったところ，「14−5＝9」と立式し，「答え　9（人)」（誤答）あるいは「答え 14（人)」（正答）とする解答（の説明）が，19.2%（15/78）もあったのである（３年生では，この種の解答は１人もいなかった)。小学校１年生の指導では，式は「計算をするためのもの」「答えを出すためのもの」という役割が印象に残りがちになる。ところが，上記の児童は，答えを出す事自体は別途行い（多分に，暗算で行い)，答えの説明に際してフォーマルな式表現を「場面を記述するもの」として使い，「14−5＝9」と立式したのである。

学習指導要領解説(文部科学省, 2008; 2018)でも説明されているように，演算の指導では「当該演算が用いられる場合とその意味」の指導も強調されるべきであるし，後の学習を考える場合，「場面を記述するもの」という式の役割は更に強調されてもよいはずである（その意味で，この調査の被験者には，そうした指導が効いていたとみてもよい)。しかし，加減の相互関係に関わる標準的な指導では，（□等が使えないため）この種の問題に「9+5=14/5+9=14」のような加法での立式を迫るはずである。とすれば，「14−5＝9」と立式した児童にとっては，そうした指導が「式は答えを出すためのもの」という印象を逆に植え付けるものとなってしまうし，「9+5=14/5+9=14」と立式した児童にとっても，その印象を強化するものになってしまう。そこで，標準的な指導・教科書では，問題文と答えを導く式を繋ぐ表現として，ブロックの操作やテープ図などのようなプリフォーマルな表現[注1]が使われ，それらが「場面を記述する」役割を担うのだと思われる。

しかし，例えば，同じく加減逆思考問題の解法が未習の小学校２年生の児童に，上記と同じ問題を提示し「考え方を，図を使って説明せよ」という問いを投げかけた場合，児童はどのような解答を創出するだろうか。特に，１年生以来，数図ブロック，○図等の具体的な操作教具・表現を利用して問題を解いたり説明したりしてきた児童が，上記の問題を時系列に沿って翻訳しよう

とする場合，本来は未知数に当たる答えの「14」を（あるいは，未知数そのものを）どのように表現するかは興味深い所である。また，加減の相互関係に関わる教科書紙面で登場し出す，数図ブロックや〇図のかたまりを抽象化し，部分-全体関係だけを表現したテープ図に類するプリフォーマルな表現を，児童は，自然に解釈して使えるものかどうかについても，興味深いところであろう（乗除の二重数直線のように，かなりの児童が自然には解釈できず使えないのであれば，何らかの指導が必要になるはずである）。

そこで，本稿では，加減逆思考問題の解法が未習（加減の相互関係に関わる教科書紙面が未習）の児童に，「数量の関係表現は減法の形だが，答えを求めるための計算は加法である」ような（「はじめの量」が未知数であるような）典型的な加減逆思考問題を提示し，その考え方を図で説明せよと投げかけた場合の児童の反応と，部分-全体関係を表現するテープ図に当該問題に含まれる３つの数量（答えも含む）を書き込ませた場合の児童の反応について報告し，加減の相互関係に関わる指導の方向性について議論していくことにする。

２．調査の概要

調査の被験者は，国立大学法人附属の小学校２年生４クラスの合計 132 名であり，調査時期は，平成 30 年５月下旬であった。当該学校・学年では，加減の相互関係に関わる教科書紙面まで授業は進んでおらず，それまでにも，学校では加減逆思考問題に触れたことはなかった。

調査問題は次の通りで，①と②の１問ずつを記した解答用紙２枚（２問）構成の問題であった。①に含まれる文章題は，「数量の関係表現は減法の形だが，答えを求めるための計算は加法である」典型的な逆思考問題になっている。ただし，それに付随して，考え方（答えの求め方）を説明させる問いがあり，児童にとっての真の問題はそちらになっているはずである。②は，①に含まれる文章題に加えて，部分-全体関係を表現するテープ図が添えてあり，答えを含めて当該文章題に登場する３つの数量を□に書き込ませることを意図した問題になっている。担任教師には，①を解き終え，解答用紙の回収が終わってから，②の問題を配付するようにお願いした。解答時間については，２問で 10〜20 分程度とお願いし，児童の様子を見て，適当に短くしてもらってよいことを告げた。実際の解答時間は４クラスで異なったが，11 分弱から 16 分の範囲に収まった。なお，両問とも，児童には消しゴムを使わないようにとの指示はお願いした。

①

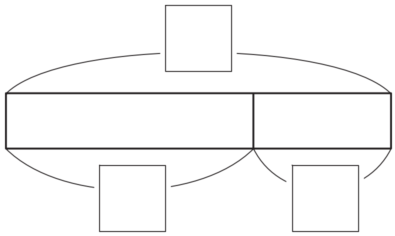
子どもが　何人か　あそんでいました。　そのうち　９人が　かえったので，５人に　なりました。　はじめに　何人　いたのでしょう。

上の　もんだいを　考えて，　あなたの　考え方（答えのもとめかた）を図を　つかって　せつめいしてください。また，答えも　出してください。

②

子どもが　何人(なんにん)か　あそんでいました。　そのうち　９人が　かえったので，５人に　なりました。　はじめに　何人(なんにん)　いたのでしょう。

まことさんは，　上のもんだいを　考(かんが)えるために，下のような　図(ず)を　かきました。　３つの□に　あてはまる数(かず)を　かきましょう。



３．結果

まず，①の解答の分類であるが，山田(2005)に準じて，何らかの形で「14-9(=5)」に類する式や表現がみられる解答は「場面記述型」とし，「答え 14(人)」としたものを「場面記述型の正答」(典型例は図１)，「答え ９(人)」のように 14 人とは異なる答えを出したものを「場面記述型の誤答」(典型例は図２）と分類することにした。また，「14-9=5」の式ではないが，計算間違いにより「はじめの人数」を 14 とは異なるものにしてしまった解答も「場面記述型の誤答」として分類することにした（典型例は図３)。さらに，最終的は「5+9=14/9+5=14」と立式しているが，最初から「？-9=5」のような式を立てたものや，消した式の中に「14-9=5」の記述が見られるもの（図４）は「場面記述型」と分類しておくことにした。

分類上困難な解答の幾つかは，次のようなものであった。先ず，図５のように明確に「□-9」や「9 人帰って/9 人引いて」の類の表現が見られ，問題文の時系列に沿って図を描いているにもかかわらず，式の上では「5+9=14/9+5=14」と表現している解答である。次に，当初の説明では，図による説明に「9 人帰った/9 人ひいて」といった類の説明があり，具体的な式の記述は見られないにもかかわらず，裏面になされた２回目の説明で「5+9=14/9+5=14」の式や加法的表現での説明を書いている解答である（図６)。この種の回答に関して，前稿(山田,2005)の分析では，式を頼りに解答の分類をしていたが，本稿の調査では図を使った説明を求めており，必ずしも式による説明を求めているわけではないため，本稿では，表面に「全部で」や「あわせて」のような表現が無ければ，積極的に「場面記述型」に分類することにした（情景図[注2]だけによる説明も「場面記述型」とした)。

その他，「5+9=14/9+5=14」のような式による解答や，図からも明確な「場面記述型」と判別

できないものは「典型正答」あるいは「その他の誤答」として扱った。

上記のような分類基準に従って結果をまとめたものが，表１である。

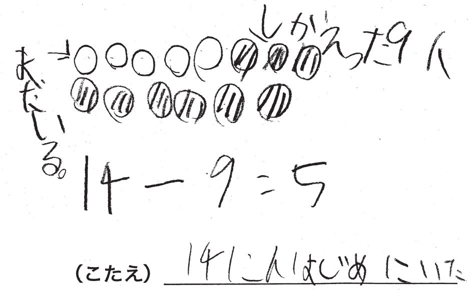


図１：答えを 14 人とする場面記述型正答の例

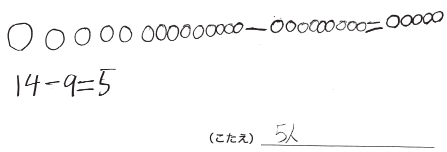


図２：答えを５人とする場面記述型誤答の例

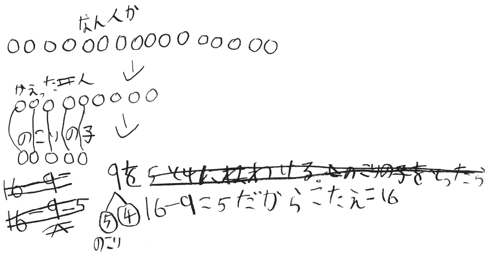


図３：最初の人数を誤った場面記述型誤答の例

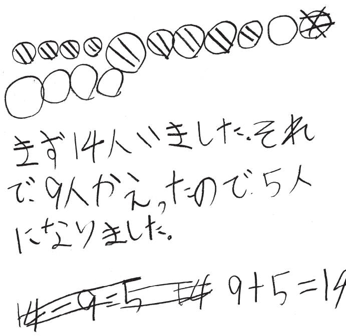


図４：14-9=5 を消した場面記述型正答の例

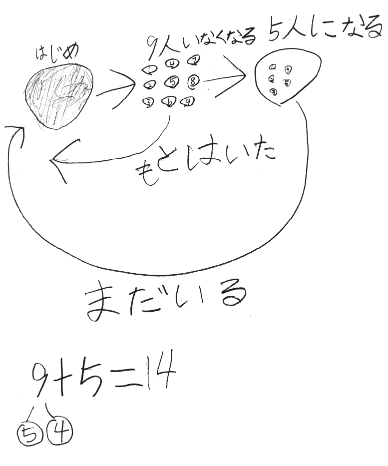


図５：9+5 の式があるが場面記述型とした解答

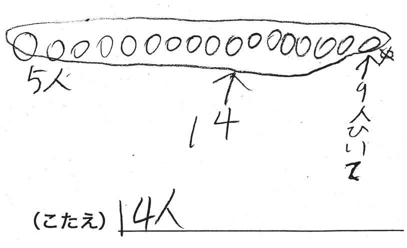


図６：表面に式表現が無い場面記述型の正答

表１：場面記述型の正誤を加味した度数分布

	度数	相対度数
典型正答	107	81.1%
場面記述型の正答	14	10.6%
場面記述型の誤答	5	3.8%
その他の誤答	6	4.5%
合計	132	100%

次に②の解答の分類であるが，本問については，単純に□の中に適切な数を入れているか否か（上の□には 14，下の□には５と９を順不同で入れているか否か）で，正誤を判断した。なお，下の□に５と９を入れているが，上の□に「？」を入れているものは正答とした。その結果を，①の結果とクロスし，まとめたものが表２である。

表２：①と②の結果のクロス表

		②		計
		正答	誤答	
①	典型正答	94	13	107
	場面記述型の正答	14	0	14
	場面記述型の誤答	3	2	5
	その他の誤答	6	0	6
計		117	15	132

４．議論

先ず，表 1 を見る限り，加減逆思考問題を学習する以前の児童が，場面記述型の解答の説明をする割合は，山田(2005)と比してさほど変わらないということが分かる。実際，先の結果 15/78≒0.192 と今回の結果 19/132≒0.144 に関して比率の差の検定の結果は，$\chi^2(1)=0.845$（連続性の補正無し），$p=0.358$ であり，有意差があるとは言えないようである。このように，加減逆思考問題（加減の相互関係）が未習の状態でも，本稿の問題のように登場する数値が小さい加減逆思考問題であれば，何らかの形で答えを出せる児童は多く（①の正答率は 121/132≒91.7%），明示的な場面記述型の解答（の説明）として，例えば「14-9=5，答え 14 人」や「□-9=5 ⇒ 5+9=14」のような式表現，更には，そうした式表現に直結する図（例えば，図１～６）を創出する児童も一定程度存在するというのが実態であろう。とすれば，実際の授業場面でも，ある程度，そうした児童の存在を想定してよいのであり，山田(2005)にあるような指導のバリエーションを検討してもよいと思われる。

次に，表２を見る限り，本稿の調査のように，何らかの形で答えを出した加減逆思考問題に関しては，かなりの児童が（117/132≒88.6％），②のようなテープ図の□に当該問題に登場する３つの数量を当てはめることができるようである（これは，乗法構造の問題場面の理解や問題解決に対する二重数直線の理解・使用の様相とかなり異なる）。本稿の調査の場合，始めに①で文章題を解決することを迫っており，多くの児童が正答に辿り着くことができているため，②は，（少なくともそうした児童にとっては理解の範疇にある）文章題の数量関係に沿ってテープ図を解釈するという活動になっていたと思われる。これは，多分に，通常想定される加減の相互関係の単元における最終的な目標（つまり，テープ図等の抽象的な表現を思考の道具として使って，加法構造を持つ数多の問題中の数量関係を把握することができるようにするという目標）とは逆方向の活動になっているのだが，その初期の指導とは同一方向の活動系列になっているとも思われるのだ。というのも，そうした単元の初期の指導では，問題場面やそこでの数量の変化，数量間の関係の説明などを，それまでの数図ブロック等の操作や○図等による説明から，抽象的な部分-全体関係だけを表現したテープ図等による説明に置き換える活動が（つまり，それまでの操作的な表現に基づく場面理解を使って，部分-全体関係を抽象的に表現する図それ自体とその使い方の理解を促す活動が）必要になるからである。実際，教科書の中には，加減の相互関係の指導の単元（図７a）の直前に，「図のかきかた」と称する紙面（図７b）を独立に置き，より丁寧な指導を志向するものもある。

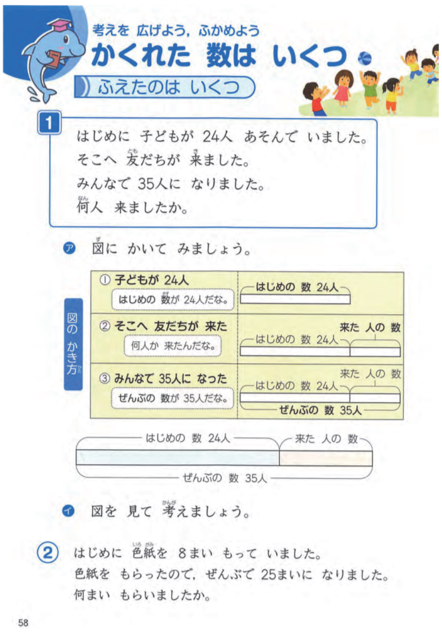


図７a：加減の相互関係の指導の紙面

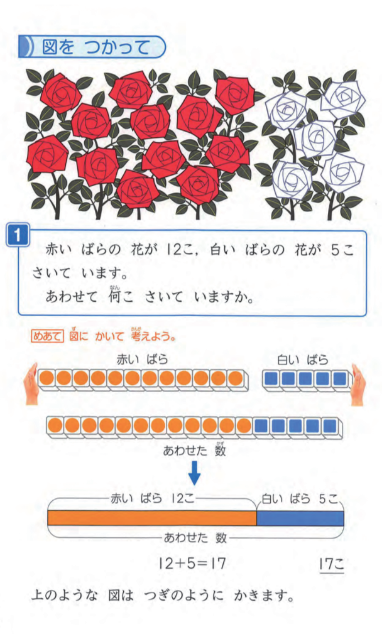


図７b：手続き図から概念図への抽象化の紙面[注3]

表２の結果は，少なくとも当該文章題が（数図ブロックの操作等によって）解決できるのであれば，上の図７b のような指導に大きな困難は無いかもしれない，ということを示唆するものだろう。これは「解けるから図がかけるのだ」という有名な命題をサポートするものかもしれないのだが，正確には「解けているから，（その問題場面に沿うと想定される）未習の図も解釈できるのだ」ということを示唆すると考えた方がよい。そして，それは勿論，一旦特定の文脈で問題②にあるような図が理解できれば，その図を使ってあらゆる一段階加減文章題が理解・解決できるようになる，ということを意味するわけではない。その意味で，図７b の学習と図７a の学習の間には依然大きなギャップがあるのだが，本稿の調査に見るように，図７b の学習に関しては比較的ハードルが低い面もあり，図７a における学習に困難を示すのであれば，一旦，図７b の指導にまで戻る（つまり，加減の相互関係を学ぶ単元でつまずくのであれば，そこで頻繁に使われる図に関する理解を促す指導を，１年生で学ぶ加減文章題を使って丁寧に実施する）ことが必要だと考えられる。

さらに，表２に関して興味深いのは，問題①で典型正答を得られているにもかかわらず問題②で誤答だった（問題②の図が上手く解釈できなかった）児童が 13.8%（≒13/94）存在する一方で，問題①で場面記述型の正答を得られた児童の中には問題②で誤った児童がいなかったという点である。これは，偶然ということも有り得るが，後者が強力な場面記述型の解答をする児童を母数にしていることから来る自然な帰結なのかもしれない。ただし，問題①で場面記述型の誤答の児童を含めて考えると，問題②での正答率は 11.8%（≒2/17）であり，問題①において「答えを求める式をかこうとするか」「場面を記述する式・表現をかこうとするか」によって，問題②のような図の解釈の正誤に殆ど差は生じていないとみることもできるため，詳細な検討は今後の課題となるだろう。

５．おわりに

本稿では，加減の相互関係に関わる教科書紙面が未習の児童に，典型的な加減逆思考問題を提示し，その考え方を図で説明せよと投げかけた場合の児童の反応と，部分-全体関係を表現するテープ図に当該問題に含まれる３つの数量（答えも含む）を書き込ませた場合の児童の反応について報告し，加減の相互関係に関わる指導の方向性について議論した。

調査結果に関して，前者の結果については，山田(2005)に準ずるものであった。また，後者については，９割弱の児童がテープ図の解釈に成功しており，少なくとも当該文章題が（数図ブロックの操作や○図による説明等によって）解決できるのであれば，抽象的に部分-全体関係を表現する図それ自体の指導やその図を問題場面に沿って解釈するような指導には大きな困難は無いかもしれない，ということを示唆するものであった。実際，教科書の中には，加減の相互関係の指導に先立って，そうした部分-全体関係を表現するテープ図（概念図）を数図ブロックの操作に関わる手続き図から抽象させる紙面を用意するものもあり，本稿の調査結果は，その種の丁寧な指導が肝要であることを示唆していると思われる。また，表２に関して，問題①で場面記述型の正答

を得られた児童の中には問題②で誤答を示した児童がいなかったことは，場面記述型の思考・説明が問題場面の理解を強固なものにするという（ある意味では当然の）示唆に繋がると共に，そこでの理解がテープ図のような抽象的表現の解釈（理解の転移）にも貢献することも示唆しうるものであろうが，これらの論点の詳細な検討は今後の課題である。

注

[注 1]　「プリフォーマルな表現」については，Webb, Boswinkel, & Dekker(2008)，清水・山田(2015)，山田(2016)を参照のこと。

[注 2]　「情景図」という用語は，中原(1995)を参考にした。

[注 3]　「手続き図」「概念図」の用語は，中原(1995)を参考にした。

引用文献

清水紀宏・山田篤史(2015).「算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組み」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 20 巻, 第 2 号, 89-102.

文部科学省(2008). 『小学校学習指導要領解説：算数編』. 文部科学省.

文部科学省(2018). 『小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説：算数編』. 文部科学省.

中原忠男(1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』.東京:聖文社.

山田篤史(2004).「逆思考問題の問題解決に関する調査とその分析：正答率と正誤パターンの学年間での変化に焦点をあてて」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 46 巻, 21-30.

山田篤史(2005).「式の役割と逆思考問題の指導の選択肢：加減逆思考問題の第２及び第３学年における正誤パターンの解釈」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 47 巻, 39-44.

山田篤史(2016).「数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 58 巻, 21-34.

Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School, **14*** (2), 110-113.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：17K00968）の助成を受けたものである。