イプシロン　2018. Vol.60, 37 - 44

中等教育数学における練り上げについての一考察

愛知教育大学　髙　井　吾　朗

1. はじめに

日本の数学教育では，問題解決学習において，古くから練り上げが位置付けられており，今日では「主体的な学習の実現のために，子どもたちの多様な考えに基づく『練り上げ』が重視されている」(山口, 2013, p.12)。一方，2017 年 11 月に国立教育政策研究所から出された「PISA2015 協同問題解決能力調査」において，日本は協同問題解決能力の平均得点で 2 位となっているが，数学的リテラシーと協同問題解決能力の関係が読解力や科学的リテラシーに比べて相対的に低いことが示唆されている。

では，練り上げは数学教育において重視されているが，何故，協同問題解決能力に対して期待される効果が見られないのであろうか。その理由としては，練り上げを対象とした実践的研究は多数行われているが，その対象は小学校算数がほとんどであり，中等教育段階において「練り上げ」があまり行われていないのではないかと考える。勿論，協同問題解決＝練り上げというわけではないが，古くから日本の算数教育において問題解決場面においては，自力解決と練り上げの接続が強調されており，練り上げが協同問題解決能力にも影響を与えていると考えられる。

実際に，練り上げという言葉を知っているか高校の先生何名かに聞いたことがあるが，「よくわからない」,「話し合い活動？」という答えを聞き，愕然としたことがある。こうした観点から，本稿では，中等教育段階において練り上げが浸透せず，あまり取り入れられないのかを考察していきたい。

2. 練り上げについての基礎的考察

(1) 練り上げの必要性

問題解決学習のモデルは,「問題の提示」,「自力解決」,「解決の練り上げ」,「振り返り／評価問題」という流れが一般的である(溝口, 2010, p.177)。練り上げは問題解決学習の過程の一つであり，自力解決の後に行われる学習過程である。自力解決を個人による解決と捉えると，練り上げは集団による解決と捉えられるが，集団による解決の必要性は何であろうか。

自力解決は個人による解決であり，その解決には「個人差が出てくるのであり，児童は様々な水準で考え，実行し，解決していくのである」(伊藤, 1987, p.77)。この「個人差を有効に生かして作り上げていく場面」(p.77)が練り上げという集団による解決である。自力解決において課題に対する最低限の解決活動を行うことが「参加チケット」(溝口, 2010, p.177)であり，解決方法を見つけることができた学習者は，練り上げにおいて，その解決方法を他の学習者から意味を聞くことにより，その解決方法の意味を理解することができる。他にも，解決方法の意味を説明できる学習者であれば，他者に説明することにより，その考え方を振り返ることができ，その解決方法や自身の活動の価値について確認することができる。つまり，自力解決における個人差は，練り上げにおける個人の役割を生むことになり，それぞれが集団解決の中で個人の認識を変容させせることに繋がり，これが集団による解決の必要性といえるであろう。

(2) 練り上げの目的

次に，練り上げの目的を捉えたいが，先に述べたように練り上げを含めた実践的研究は多いが，練り上げの理論的な根拠を示した研究は多くはない。それ故に，実践研究を主としつつもその中で練り上げの捉え方を示した書籍から，まずは練り上げを捉えていきたい。

> 検討の目的：自力解決で得た成果をもとに，どのような考え方で解決しようとしたのか，それはどのような手順で進められたのかを話し合い，共に着想の豊かさや解決の仕方を味わい，よりよい解決を作り上げていくこと。
>
> (伊藤, 1987, p.77)

伊藤(1987)は，自分の考え方を振り返ることが検討の段階であるとしているが，同時に「独善的な考えに陥らず，友達の考え方のよさを認め，筋道立てて，共によりよい解決の過程を作り上げていく。いわば，集団解決の場面」(p.77)であるとも指摘している。次に清水(1990)の練り上げの捉え方をみると，次のように述べている。

> 自力解決の場では，一人一人の子供が程度の差こそあれ自分の考えたことをよく観察し，振り返っているはずであるし，その結果，誤りについてはそれを改めることが，一応の解決についてはそれをよりよいものに練り上げることなどがそれぞれなされていよう。しかし，自力解決の場は，子供一人一人による問題解決であるから，その成果は必ずしも十分とはいえない。そこで，自力解決の場における学習の成果を，集団解決の場に提供し合い，学級の皆で一層充実した成果に高め合うことになる。これは，学級の皆とする学習のよさといえる。つまり，集団解決は，このよさを生かした学習活動であり，子供一人一人において「皆と一緒に考えてよかった」との気持ちがもてるようにしたいものである。
>
> (清水, 1990, p.75)

清水(1990)も，伊藤(1987)と同様に練り上げを振り返りの段階であると捉えた上で，集団解決の場であるとしている。そして，個人差を個性と捉え，それぞれの持ち味を自身が理解し，多様な考えを表出することにより，消極的には一人一人が学習の成就感を持ち，積極的には一人一人が多様なでき方ができるようにすることをねらいとしている。この多様な考え方を生かした指導として，古藤(1998)も練り合いの場が重要であると指摘しており，そのねらいを次のように述べている。

> それぞれが手持ちの手だてを駆使して当面した問題についての解決の方法を構想し，その内容を友達に説明する際，相互触発の過程を通して，それぞれの考えを互いに関連づけ，さらに膨らませ，発展的に考察することができるのである。
>
> (古藤, 1998, p.17)

古藤(1998)は，集団解決とその中で起こる個人の振り返りを，練り上げに段階を設定することにより具体的に示している。また「個性尊重」(p.15)を重視し，練り上げの最後には多様な考え方のそれぞれのよさを認め合い，「自己選択」(p.43)することが重要であると指摘している。

これら 3 者の捉え方をまとめると，自力解決においては個人差や個性の違いから，多様な考え方が生まれるが，その時点では一人一人がその意味や価値について捉えきれておらず，練り上げは，他者との相互作用を通した自己評価により，曖昧な自己認識を明確にする過程となる。そして，自己認識が高まることにより，互いの考え方の共通点や相違点を捉え，よりよい解決を集団によって行う過程でもあると捉えることができる。また，溝口(2010)が自力解決における活動を練り上げへの「参加チケット」と評しているように，3 者も同様に自力解決における活動が練り上げの活動を左右すると指摘している。このこと

から，練り上げが問題解決学習の本質的な場面であると，規定することができる。

(3)練り上げについての問題点

練り上げは個性を尊重し，多様な考え方を元に相互作用しまう活動であるが，多様な考え方についての危惧を，清水(1990)は以下のように指摘している。

> 多様なでき方を認めることは，単にその多さをもってねらいとするものではない。ややもすると子供たちは「多さ」にとらわれて，技巧を弄し，徒らに「多さ」を求め，ねらいから離れていってしまっていることがある。
>
> (清水, 1990, p.75)

この多様な考え方に対する誤解は，学習者ではなく教師に責任があると考える。教師は多様な考え方を出させるために，「もっと他に考えられない？」，「別の方法も考えてみようか」と発言することが想定され，その結果として学習者に「色々な考え方を出すことが良い」という認識を刷り込んでいると考えられる。そして，複数の解決方法を提示した学習者を褒めることで，そうした認識を学習者はより強めていくことになる。つまり，こうした考えを持つ教師は，多様な考え方を出すことを目的にしてしまっており，こうした教師の下で行われる練り上げは総じて「発表会」や「品評会」になっている。さらに問題なのは，教師が練り上げの中で「みんなたくさんの考え方を出すことができたね」と学習者を褒めることで，学習者の練り上げに対する認識は，教師と同様のものになっていくということである。

このような練り上げの形骸化を山口(2013)や小池(2016)も指摘しているが，最も痛烈に批判しているのが溝口(2010)である。

> 解決 A は，どのような点に着眼したのか，そこにどんな工夫があったか，そして，解決 A のどこを改善するともっと優れた解決が考えられるか，といった，文字通り「解決の練り上げ」が行われてこそ練り上げである。そのような練り上げは，従って，よりすぐれた解決を追求したり，さらに既習事項との関連を吟味したり，さらに，一般化をめざしたりといったような統合的発展的考察が展開されることが望まれる。その際，教師は《課題》によって児童の活動を組織的，計画的に引き出し，あたかも児童が主体的に数学を作り上げていく過程を経験するように環境を整えることが要請される。これこそが，《教師主導しかし児童主体》である。このとき，無作為に児童に発表させることは，児童が，真の練り上げを経験する機会を奪う危険があり，そのような安っぽい児童の主体性を私たちはよしとしない。
>
> (溝口, 2010, p.183)

溝口(2010)の「教師主導しかし児童主体」という指摘は正に練り上げの本質であり，練り上げの形骸化は，「児童主体」ということを安易に「児童が考え，児童が発表すること」と捉えることにあると考える。しかし，逆に考えれば，教師は単に楽をしたいから児童主体の問題解決学習をしているのではなく，その教師なりの学習者に主体的に学んでほしいという思いがそこにはあると，捉えることができる。つまり，研究者から言わせれば形骸化している問題解決学習も，教師としてはより良い問題解決者となれるように意識して実践しているのである。しかしそれは教師が教育に対して歩みを止めていることに変わりはなく，教師は常に自らの教育に対する認識を更新しつづけなくてはならないのである。よい教師について，波多野(1952)は次のように述べているが，正に形骸化した練り上げを行う教師に向けた言葉に見える。

> だれだって熱のない授業など，やりはしないのだ。熱のない人は初等教師としてははじめから落第である。天才的な算数教育家のもっているものはたえず向上をのぞみ，あかるいほがらかな，しかも着実さを失わない性格である。いわゆる「生きた性格」，張りのある性格である，これが児童にうつるのである。
> (波多野, 1952, p.261)

以上のことから，練り上げを問題解決学習に取り入れるためには，教師のもつ価値観を適切なものにすることが重要となり，言い換えればそれは，教師が持つ練り上げ（もっと広く見れば問題解決学習）に対するメタ認知を変える必要があるということである。平林(1986)は，「よい教師は，よいメタ知識をたくみに子どもに与えるであろうが，わるい教師は，ときにはわるいメタ知識を与えてしまうことさえある」(p.3)と述べているが，これは，「教師の練り上げに対するメタ認知が，学習者の練り上げに対するメタ認知を形作る」ということであり，よい練り上げとは，教師が作るものであると言える。

3．中等教育数学における練り上げについて

(1)解決方法の妥当性から見た考察

練り上げとは，問題解決学習において本質的な活動であり，個人の解決を振り返らせることにより，自己認識を明確にし，集団解決によりより良い課題に対する解決を目指し，さらに次の課題へと発展させることが可能なものである。では，初等教育段階においては（形骸化したものも含めて）多くの授業場面で取り入れられているのに，何故中等教育段階においてはあまり取り入れられていないのであろうか。

第一に，初等教育段階の算数（以下，「算数」と省略する）と中等教育段階の数学（以下，「数学」と省略する）の妥当性の違いが挙げられる。古藤(1998)は練り上げのステップとして，まず「妥当性の検討」を挙げている。このステップにおける検討とは，「解法個々における着想（アイデア）は追求問題を解くのに妥当（ふさわしいもの）であるかどうかということ」(p.40)であり，その後に続く，関連性の検討，有効性の検討を行うための前提的な活動である。

算数における妥当性とは何かというと，帰納的論証から導かれる論拠であり，長沢(2015)は Argumentation の視座から算数において構成される論拠の特徴を，「蓋然的」なものであると指摘している。そして，「集団の存在は説明に対する論駁や客観性を保証する役割を担う」(p.143)と述べている。この集団の存在の役割について，中原(1995)は協定的構成主義の立場から，知識は学級における社会的相互作用を通して，生存可能性などの視点から検討されると述べている。つまり，算数における妥当性は，学習者の曖昧な解法を，集団を通してほとんど確実に正しいものへと変えることで保証されるものであり，練り上げこそ妥当性を保証するものと言える[1)]。

一方，数学における妥当性は，演繹的論証から導かれる論拠であり，その方法として「証明」[2)]がある。証明は「推論を行う前に命題の『仮定』と『結論』をはっきりさせる。その上で，『仮定』から出発し，すでに正しいと認められている事柄を根拠にして，『結論』を導くこと」(文部科学省, 2008, p.96)であり，妥当性を保証するものは，練り上げではなく「証明」と捉えることになる。

第二に，教師が持つメタ認知が挙げられる。第一の妥当性の違いにおいて示したように，数学の妥当性は証明によって保証されるということから，「証明すれば，正しいことを示すことができる」という数学に対するメタ認知を持つ教師は，練り上げを証明よりも格下の指導法と捉え，「何故証明したものを話し合わなければならないのか」と考えるであろう。また，練り上げをすでに取り入れているという教師もいるが，練り上げを「生徒に発表させること，説明させること」と捉えている教師も，算数の形

骸化と同様に多いと考えられる。

このことから，数学において（真の意味で）練り上げが行われにくい状況は，証明が絶対的な妥当性を示すものと捉え，形骸化した練り上げを行っているからではないかと推測できる。

(2)証明活動における練り上げの必要性

では，本当に証明をすれば，妥当性を示すことができ，練り上げをする必要はないのであろうか。平林(1991)は，「証明の記述は，生徒のもっとも苦手なことかもしれない。どの程度詳しく書くか，どこを省略するか，ということを会得させることは，かなり難しい。それに対して，はっきりした基準がないからである」(p.19)と証明の困難性を示している。教師にとっては，数学で学ぶ証明は自らの経験の元で，すでに正しいことを理解しているが，学習者にとっては，そもそも「証明したけど正しいのだろうか」という不安が残ると考えられる。國宗(2017)はこうした教師と学習者のずれについて，「現在の中学校や高等学校における学習指導は，論証や文字式の重要性が授業者にとってあまりに当然のことであるためか，学習者の理解の状況を十分に把握して行われているとは言い難い」(p.5)と指摘している。

つまり，教師にとっては，証明は絶対的なものとして捉えられているが，学習者にとっては，証明の価値が捉えられておらず，「証明は暗記するもの」として教師や一部の証明が得意な学習者に従う状況が生まれているということである。本来，「証明に到達するのに保証された方法というものはない」(デービス&ヘルシュ, 1986, p.142)はずだが，数学で扱われる証明は，すでに「批判と再正当化の絶え間ないプロセス」(p.142)に従って綺麗にされたものである。しかし，批判と再正当化の絶え間ないプロセスの元に洗練された証明を，完成されたものとして捉えてしまうことも，無理からぬ話であろう。

以上のことから，数学における証明が絶対的な妥当性を示すものという考えは，証明という方法の重要性，また証明され続けてきたある種の完成品という二重の意味で教師にとっては当然のことなのかもしれない。しかし，学習者にとっては，証明の意味や価値は何なのか，自身の証明はどうすれば正しいと認識できるのかということを説明活動や討論を通して，経験することが重要である(岡崎, 2014)，という証明に対する教師と生徒間の不和がここから見えてくる。

このように考えると，小学校で行っている妥当性の検討という練り上げではなく，むしろ証明とは何か，証明することにどのような意味があるのか，という証明そのものに対する問題解決として，練り上げを取り入れ，教師と生徒間の不和を無くすという授業が必要になると考える。Cobb et al(1995)は，こうした教師と生徒間のずれが信念同士のずれであると指摘し，教師と生徒間で生まれる規範形成のために協同解決が重要であることを指摘している。つまり，教師が持つ証明についてのメタ認知的知識と生徒が持ち始めているメタ認知的知識を練り上げの中で互いに確認し，間主観的なメタ認知的知識を教室内で構成していくことが，中等教育段階における練り上げの目標となりえると考える。

(3)数学的モデル化における練り上げの必要性

一方で，数学においては，「証明」できないものもある。例えば「課題学習」であり，高等学校では次の学習指導要領改訂で新設される「理数探究」である。現在現実的な問題を扱う研究は「数学的モデル化」として，多数の研究成果が挙げられている。しかし，数学的モデル化過程における現実の問題を数学の問題へと置き換える「記号化」や，数学的解決により表出した結論が現実の問題を解決するに至っているかどうかを判断する「文脈化」，「確認」については，困難性があることが示されている(三輪ら, 1983)。

この困難性について，まず「記号化」の問題として，「単純化，理想化，近似という思考が必要であ

り，設定される仮定について矛盾がないことを意識しなくてはならない。また，数学的に表現するには，数量化，図形化，記号化という数学的なアイデア（「形式化」）を必要とする」(三輪, 2004, p.224)ことが挙げられる。学習者が，自らのアイデアに矛盾が無いことを意識すること自体が困難であり，それ以前の段階として，どのような活動をすればよいのかという判断するための根拠が無いということも困難である。「文脈化」「確認」については，「科学的なデータによるモデルの検証抜きで行う数学的モデル化は，実際のところ数学的推論のみを前提にした問題設定とその数学的解決にすぎない。学校数学における数学的モデル化は科学者の真正の活動に対して虚構的性格を本質的に抱えている」(岸本ら, 2012, p.43)という困難性が挙げられる。この困難性についても，「記号化」の問題と同様に，結論の正しさを示す根拠が無いという問題が挙げられる。

このように，数学的モデル化過程を授業に取り込む場合，自身の活動の妥当性を示すものは少なく，その根拠は，他者との協同が必要となる。しかし，問題解決学習における一般的な型がこの過程に適用できるかというと，不可能であろう。カイザー(2014)は数学的モデル化能力を伸ばす指導法として，「全体主義的指導」と「原子論的指導」の二つを挙げているが，現行カリキュラムにおいては，「原子論的指導」を行い，その中で自力解決と練り上げを繰り返し，自身の活動を進めていくことが望ましいと考える。

この筆者の提言に近い研究として，Anhalt et al(2018)の研究を挙げることができる。Anhalt et al (2018)は，数学的モデリングと“Culturally Relevant Pedagogy”(p.310)を統合した教授的アプローチを提言し，数学的モデリングに対して，生徒同士のディスカッションを取り入れることを提言している。CRP は，「学問的知識やスキルが様々な文化的背景をもつ生徒の実体験や枠の中にあるという前提に基づいており」(p.315)，普段の問題解決学習において行われている練り上げを方法知として，数学的モデル化において活用するということが考えられる。

4. おわりに

本稿の目的は，中等教育数学において練り上げを行う必要性を提示することであった。まず，練り上げが問題解決学習における本質的な活動であることを先行研究から提示し，練り上げの形骸化という問題については，教師が持つ練り上げに対するメタ認知にその原因があることを提示した。そして，本稿の目的である，数学学習における練り上げの必要性については，解法の妥当性という観点から考察し，証明の意味や価値を知ることを示唆し，課題学習や理数探究において行われる数学的モデル化においては，練り上げを中心に据えた指導が重要であることを提案した。また，教師が持つ練り上げに対するメタ認知が，学習者の練り上げに対するメタ認知に影響を与えることから，教師の練り上げに対する考え方を変容させる必要があることも示唆された。

今後の課題としては，証明活動や数学的モデル化における練り上げの具体化を進めることが挙げられ，そこから教師のメタ認知を変容するための教師教育についても考察していくことになると考えている。

注

1)小学校においても，演繹的論証を行うことはある。例えば，平行四辺形の面積公式を求める場合，既習事項である三角形の面積公式を用いて，{(底辺）×（高さ）÷2} ×2 とするが，前提となる三角形の

面積公式が「蓋然的」であるため，そこから導き出される平行四辺形の面積公式である（底辺）×（高さ）もまた「蓋然的」であるといえる。

2)証明についての捉え方は様々であり(國宗, 2017)，例えば小松(2014)は「既に正しいと認められた事柄を根拠として，事柄が成り立つことを演繹的に示すこと」(p.2)と広義に捉え，中学 2 年生から学ぶ証明を「数学的な記号や言語を用いて事柄が成り立つことを演繹的に示すもの」(p.11)とし，「形式的証明」(p.12)と呼んでいる。本稿で用いている証明は，小松(2014)の「形式的証明」を指す。

参考・引用文献

Anhalt, C., Staats, S., Cortez, R., Civil, M. (2018). Chapter14 Mathematical Modeling and Culturally Relevant Pedagogy, In Dori, Y.J., Mevarech, Z. R., Baker, D. R. (Eds.) *Cognition, Metacognition, and Culture in STEM Education: Learning, Teaching and Assessment*, (pp.307-330). Springer, Cham.

Cobb, P., Yackel, E., Wood, T. (1995). The Teaching Experiment Classroom, In Cobb, p., Bauersfeld, H. (Eds.)*The Emergence of Mathematical Meaning*, (pp.17-24). Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale New Jersey.

伊藤説朗（1987）.「1　算数科において，いまなぜ，問題解決か」，伊藤説朗 埼玉県笠原小学校編著『算数科・新しい問題解決の指導［基礎編］―どの子も楽しく学んで力がつく授業―』，東洋館出版社，pp.5-14.

岡崎正和（2014）.「第 5 章　中学校「図形」領域の学習指導」，小山正孝編著『教師教育講座　第 14 巻　中等数学教育』，協同出版，pp.153-180.

カイザー, G. （2014）「未来への準備―数学的モデル化の役割」，『日本数学教育学会誌』，第 96 巻，第 3 号，pp.4-13.

國宗進（2017）.『数学教育における論証の理解とその学習指導』，東洋館出版社.

小池嘉志（2016）.「ヴィゴツキーの発達理論から見た算数・数学の授業における練り上げの重要性―小学校 2 年生かけ算の単元の実践の考察を通して―」，愛知教育大学大学院・静岡大学大学院教育学研究科共同教科開発学専攻『教科開発学論集』，第 4 号，pp.101-110.

古藤怜（1998）.「第 I 部　コミュニケーション活動を重視した算数科の授業　第 1 章コミュニケーション活動を重視した算数科授業のねらい」，古藤怜 新潟算数教育研究会著『コミュニケーションで創る新しい算数学習』，東洋館出版社，pp.11-26.

小松孝太郎（2014）.『算数・数学教育における証明指導の改善』，東洋館出版社.

清水静海（1990）.『90 年代算数科授業の新研究③　個性を生かす算数授業』，明治図書.

デービス, P. J.,ヘルシュ, R. （1986）. 柴田和三雄 清水邦夫 田中裕訳『数学的経験』.（原著は 1982 年）

長沢圭祐（2015）.「Argumentation を視点とした算数教育における練り上げに関する研究」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究（臨時増刊）』，第 97 巻，pp.137-144.

中原忠男（1995）.『算数・数学教育における構成的アプローチ』，聖文社.

波多野完治（1952）.『算数の学習心理』，牧教育新書.

平林一栄（1986）.「数学教育における認識論上の問題」，『西日本数学教育学会第 31 回例会要旨』，pp.1-4.

平林一栄（1991）.「第 I 部　第 1 章　図形の指導内容の外観と問題点の考察」，能田信彦 福森信夫編『新・中学校数学指導実例講座　第 3 巻　図形』，金子書房，pp.3-34.

溝口達也（2010）.「第 10 章　指導方法」，数学教育研究会編『新訂　算数教育の理論と実際』，聖文新社，pp.172-197.

三輪辰郎，長野東，島田和明，礒田正美（1983）.「数学教育における数学的モデル化過程」，『日本科学教育学会年会論文集』，第 7 巻，pp.253-254.

三輪辰郎（2004）.「数学教育における数学的モデル化の教授-学習の意義と課題」，日本科学教育学会『第 28 回年会論文集』，pp.223-224.

文部科学省（2008）.『中学校学習指導要領解説　数学編』，教育出版.

山口武志（2013）.「算数・数学教育における社会的相互作用に関する認識論的研究—社会文化主義的アプローチにおける社会的相互作用に関する考察—」，『鹿児島大学教育学部研究紀要　教育科学編』，第 64 巻，pp.11-27.

謝辞

本研究の一部は科研若手研究(B) 17K14037 の助成を受けて行った。