

# ビー玉の数学

愛知教育大学 数学教育講座 小 谷 健 司

## 1 序

むかし、NHK 総合テレビで「新八犬伝」という番組がありました。(1973年4月2日～1975年3月28日の平日18:30～18:45。) 曲亭馬琴の「南総里見八犬伝」を原作とする人形劇で、仁義礼智忠信孝悌それぞれの文字が浮き出る玉を持つ8人の武士(八犬士)の物語でした。番組で八犬士の誰か、例えば犬山道節(私が好きだった犬士)が玉を出す時、テレビの画面には次のような動画が映し出されました。



図1: ビー玉を通して見た文字の変化

コンピュータグラフィックスなどなかった時代です。上のような動画はどのようにして撮影したのでしょうか？ それは小学生の私にも簡単にわかりました。紙に書いた文字(図1の元画像)をビー玉を通して見ます。そして、ビー玉を紙にくっつけた状態から徐々に遠ざけていくと、ビー玉を通して見る文字は図1の1.0から2.0のように変化します。この論文では、

この現象を「不思議な玉現象」と呼ぶことにします。なぜ、「不思議な玉現象」が起こるのでしょうか？ それは小学生の私には難しすぎました。昨年度、4年生の卒業論文 [1] の指導をする際、この問題を思い出し、考えてみました。

## 2 光の経路

まず、観察者の目は平面とみなし、目に垂直な方向から来た光線だけを見ることができると仮定します。これは科学的に正確ではないかもしれませんが、問題を簡単にするため、そのように仮定します。

この問題を考える際、画像から出た光線がビー玉を通過して目に入ると考えるより、目から出た視線がビー玉を通過して画像に到達すると考える方がわかりやすいです。なぜなら、目→画像の対応は関数になるのに対し、画像→目は関数にならない場合があるからです。（そして、関数にならない場合に、「不思議な玉現象」が起こります。）図2は左側の平面（画像）から出た光線が、ビー玉を通過して右側の平面（観察者の目）に到達するようすを表しています。左側の平面の1つの点から出た光線が、右側の平面の3つの点に垂直に到達しています。（先に述べた通り、平面に垂直ではない光線は観察者には見えません。）図1の画像1.2において、忠の字の「中」の部分が上下に2つ見えているのは、このように1つの点が複数の点に対応しているからです。このような1対複数の対応は関数ではありません。逆に、目→画像の対応は複数対1の対応ですが、これは関数です。

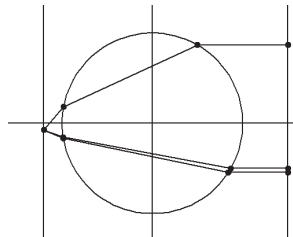


図 2: 画像→目の対応

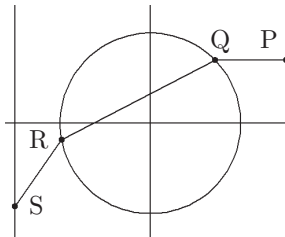


図 3: 各点の名前

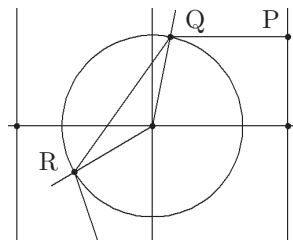


図 4: 点 S が存在しない場合

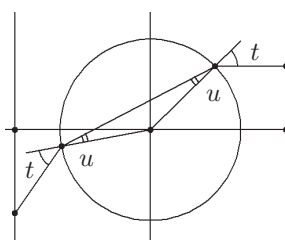


図 5: 角の大きさ

座標空間で考えます。図3は  $y$  軸を鉛直上向き、 $x$  軸を右向き、 $z$  軸を手前向きに取った図です。そして、ビー玉を原点  $O$  を中心とする半径  $a > 0$  の球、ビー玉を見る観察者の目を平面  $x = c$  ( $c > a$ )、画像を平面  $x = -d$  ( $d \geq a$ ) で表します。以降、前者を観察者平面、後者を

画像平面と呼ぶことにします。観察者平面上の点 P から出発した視線が  $x$  軸と平行に進んで球の表面上の点 Q で屈折して球内に入り、球の表面上の点 R で再び屈折して進みます。このとき、進んだ光線が図 3 のように画像平面と交わることもあれば、図 4 のように交わらないこともあります。(図 4 の場合、観察者は後方の光を見ていることになります。) 視線が画像平面と交わる時、その点を S とします。

目から出た視線が水平に進む仮定から、点 P の座標は  $(c, r \cos \theta, r \sin \theta)$  ( $0 \leq r \leq a$ ) と表すことができます。簡単のため、 $\theta = 0$  と仮定します。(  $\theta$  が他の値をとる場合については、座標を  $x$  軸のまわりに回転させれば  $\theta = 0$  とすることができます。) このように仮定すると、以降の視線の経路はすべて  $xy$  平面上にあります。なぜなら、線分 PQ は仮定より  $xy$  平面上にあり、球が  $xy$  平面に関して対称だから、それ以降の経路も  $xy$  平面内に留まるからです。以降、視線の経路は  $xy$  平面上で考えるので、 $z$  座標は省略します。

点 Q の座標を  $(a \cos t, a \sin t)$  と表すと、点 P, Q は同じ水平線上にあるので、

$$r = a \sin t, \quad \text{すなわち } t = \sin^{-1} \left( \frac{r}{a} \right). \quad (1)$$

同位角の性質より、 $t$  は点 Q における視線の入射角と一致します。点 Q における屈折角を  $u$  とすると、スネルの法則 (屈折の法則) より、

$$\frac{\sin t}{\sin u} = n, \quad \text{すなわち } u = \sin^{-1} \left( \frac{r}{na} \right). \quad (2)$$

ただし、 $n$  はビー玉の空気に対する屈折率です。屈折率は  $n > 1$  なので、 $t = u = 0$  のとき以外は  $u < t$  です。 $\triangle OQR$  は二等辺三角形なので、 $u = \angle OQR = \angle QRO$  が成り立ちます。(図 5 参照。) したがって、点 R における視線の入射角は  $u$  です。点 R における屈折で再び式 (2) が成り立つので、点 R における屈折角は  $t$  になります。 $\angle ROQ = \pi - 2u$  なので、 $\overrightarrow{OR}$  の偏角は  $\pi - 2u + t$  になります。そして、点 R を出た視線の偏角は  $\pi - 2u + 2t$  になります。したがって、点 R を出た視線が画像平面と交わる条件は  $\pi - 2u + 2t < 3\pi/2$ 、すなわち  $t - u < \pi/4$  です。もし  $t - u > \pi/4$  なら、観察者は後方の光も見ていることになります。

視線が画像平面と交わる時、点 S の座標を  $(-d, \rho)$  とします。 $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RS}$  だから、

$$(-d, \rho) = a(-\cos(t - 2u), -\sin(t - 2u)) + RS(-\cos(2t - 2u), -\sin(2t - 2u)). \quad (3)$$

上式は連立方程式で、RS を消去すると、

$$\begin{aligned} \rho &= -a \sin(t - 2u) - (d - a \cos(t - 2u)) \tan(2t - 2u) \\ &= \frac{a \sin t - d \sin(2t - 2u)}{\cos(2t - 2u)}. \end{aligned} \quad (4)$$

以上より、観測者平面上の点 P から画像平面上の点 S への写像は、次のように表すことができます：

$$(c, r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (-d, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta). \quad (5)$$

ただし、 $\rho$  は式 (4) で定まる関数で、 $t, u$  はそれぞれ式 (1), (2) で定まる  $r$  の関数です。したがって、 $\rho$  は  $r$  の関数になります。そして、 $r$  の定義域は  $0 \leq r \leq a$  の範囲で  $t - u < \pi/2$  を満たす値です。(後に定理 1 で求めます。)

図 6 は、各  $d/a$  の値に対して、図 1 の元画像が式 (5) の写像によってどのように変化するかをコンピュータを使って描いたものです。(屈折率はガラスの屈折率に近い値  $n = 1.5$  としました。) 各画像の下には、そのときの関数  $r \mapsto \rho$  のグラフも掲載しました。グラフの横軸は  $r$ 、縦軸は  $\rho$  を表し、グラフ中の細い横線は元画像の大きさを示しています。

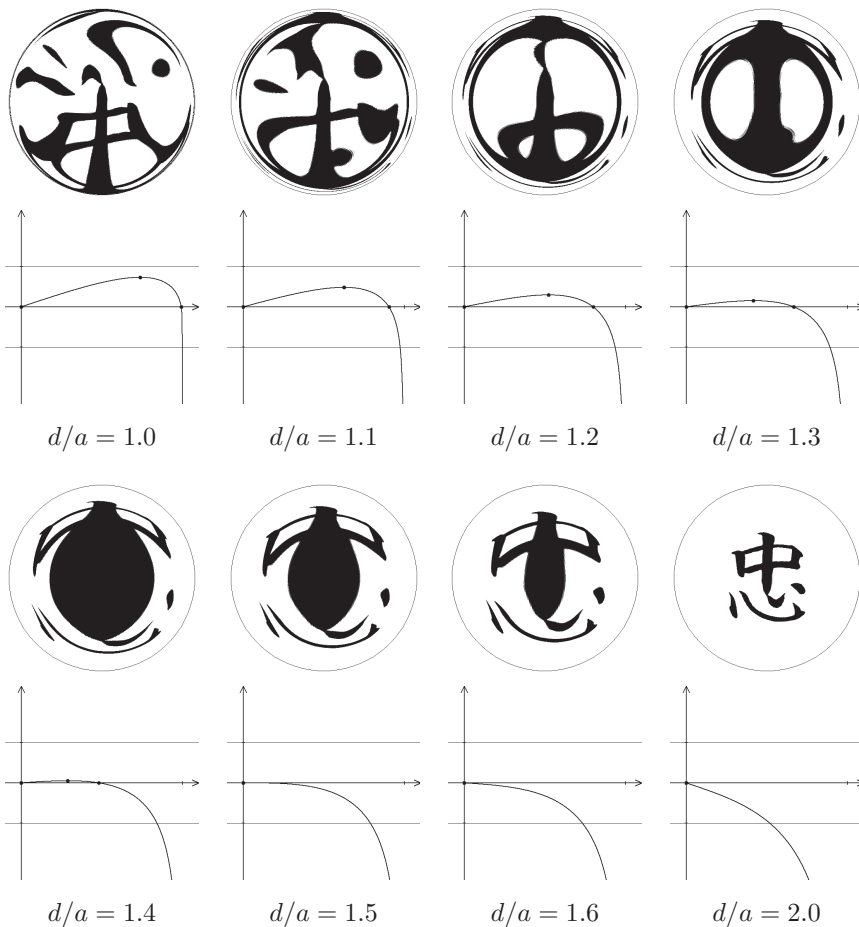


図 6: 各  $d/a$  の値に対する見える画像とそのときの  $\rho(r)$  のグラフ

図 6 を観察しましょう。 $d/a = 1.0$  のときは、関数が正値単調増加になる区間が大きいため、それに対応する部分では図 1 の元画像に近い画像が表示されています。 $d/a = 1.1 \sim 1.3$  のときは、関数が正値単調増加・正値単調減少・負値単調減少の 3 つの区間が存在するため、元画像とはかけ離れた画像が表示されています。(これが、「不思議な玉現象」が起こる理由です。)

$d/a = 1.5$  以降では、関数が負値単調減少な部分だけになり、元画像を上下左右反対にしたものに近い画像が表示されています。 $d = 2.0$  のときは、細い横線の間のグラフの形が直線に近いので、元画像にかなり近くなっています。

### 3 後方からの光が見える部分

図 4 で見たように、観察者平面内の円  $r \leq a$  の点 P から出発した視線のすべてが画像平面に到達するわけではありません。では、どの範囲の点から出発すれば到着するのでしょうか？ 次の定理がその答えです。

**定理 1.** 関数  $r \mapsto \rho$  の定義域は、 $n < \sqrt{2}$  のとき  $[0, a]$  で、 $n \geq \sqrt{2}$  のとき  $[0, r_0)$  である。ただし、 $r_0$  は次式で定まる定数である：

$$r_0 = \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \sqrt{2}/n)^2}}. \tag{6}$$

上の定理より、 $n < \sqrt{2}$  のときは後方からの光は見えない、 $n > \sqrt{2}$  のときは見えることがわかります。右の表は、各屈折率の値に対して、観察者平面の円  $r \leq a$  のうち後方からの光が見える部分の面積比  $\mu$ 、すなわち次式の  $\mu$  を表にしたものです：

$$\mu = \frac{\pi a^2 - \pi r_0^2}{\pi a^2} = 1 - \left(\frac{r_0}{a}\right)^2. \tag{7}$$

(ただし、 $n \leq \sqrt{2}$  の場合は  $\mu = 0$  としました。) 通常のガラスは屈折率が 1.5 程度ですから、画像平面以外からの光が見えている部分は非常に少ないことがわかります。一方、ダイヤモンドは屈折率が 2.4 程度ですから、ダイヤモンドのビー玉があったら、後方からの光が見えている部分が 14.4% もあることになります。

**定理 1 の証明.** 先に述べた通り、視線が画像平面に到達する条件は、 $t - u < \pi/4$  である。これをスネルの法則 (2) に適用すると、

$$\sin t = n \sin u > n \sin(t - \pi/4) = \frac{n}{\sqrt{2}}(\sin t - \cos t). \tag{8}$$

上式を変形して、 $(1 - \sqrt{2}/n) \tan t < 1$ 。したがって、 $n < \sqrt{2}$  のときは、どんな P に対しても視線は画像平面に到達する。そして、 $n > \sqrt{2}$  のとき、視線が画像平面に到達しない P がある。そのような P の範囲を求めると、

$$r = a \sin t = \frac{a}{\sqrt{1 + 1/\tan^2 t}} > \frac{a}{\sqrt{1 + (1 - \sqrt{2}/n)^2}}. \tag{9}$$

$n$	$\mu$	$n$	$\mu$
1.4	0	2.0	0.079
1.5	0.003	2.1	0.096
1.6	0.013	2.2	0.113
1.7	0.027	2.3	0.129
1.8	0.044	2.4	0.144
1.9	0.061	2.5	0.159

表 7: 後方からの光が見える部分の面積比

## 4 「不思議な玉現象」が起こる条件

図6の  $d/a = 1.5$  の画像は元の画像を上下左右を反対にしたものに近い画像になっていますが、これは関数  $\rho$  のグラフが負値単調減少だからです。一方、 $d/a = 1.2$  の画像は元の画像とはかけ離れた不思議な画像になっていますが、これは関数  $\rho$  のグラフが正值単調増加、正值単調減少、負値単調減少の3つの部分を持つからです。 $d/a = 1.0$  の場合もグラフが3つの部分を持っていますが、正值単調増加の部分が大きいので、元の画像に近い画像になっています。このように、ビー玉を通して見た画像がどのように見えるかは、関数  $\rho$  のグラフの形と大きな関係があります。

**定理 2.** (1)  $n \geq 2$  のとき、すべての  $d \geq a$  について関数  $r \mapsto \rho$  は負値単調減少である。

(2)  $n < 2$  のとき、 $d \geq d_0$  ならば関数  $r \mapsto \rho$  は負値単調減少、 $d < d_0$  ならばそうではない。ただし、 $d_0$  は次式で定まる定数である：

$$d_0 = \frac{a}{2(1 - 1/n)}. \quad (10)$$

上の定理より、 $n < 2$  のときは「不思議な玉現象」は起こり、 $n \geq 2$  のときは起こらないことがわかります。右表は、各屈折率  $n$  の値に対して、「不思議な玉現象」が起こる画像と玉の距離の上限、すなわち  $d_0/a$  の値を表にしたものです。(ただし、 $n \geq 2$  については  $d_0 = a$  としました。) 右表より、屈折率が小さい方が「不思議な玉現象」が起こりやすいことがわかります。通常のガラスは屈折率が1.5程度ですから、「不思議な玉現象」が起こるのは  $d/a < 1.5$  の場合です。一方、ダイヤモンドは屈折率が2.4程度ですから、画像と球をどれだけ近づけても「不思議な玉現象」は起こりません。

$n$	$d_0/a$	$n$	$d_0/a$
1.1	5.5	1.7	1.214
1.2	3	1.8	1.125
1.3	2.167	1.9	1.056
1.4	1.75	2.0	1
1.5	1.5	2.1	1
1.6	1.333	2.2	1

表 8: 「不思議な玉現象」が起こる画像と玉の距離の上限

**定理 2 の証明.** スネルの法則 (2) より、 $0 \leq t \leq \pi/2$  の範囲で  $u$  は  $t$  の微分可能関数です。式  $n \sin u = \sin t$  の両辺を微分することにより次式の第1式、それをさらに微分することにより第2式を得ます：

$$u'(t) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos t}{\cos u}, \quad u''(t) = -\frac{n^2 - 1}{n^3} \cdot \frac{\sin t}{\cos^3 u}. \quad (11)$$

上式の第2式より  $u'(t)$  は区間  $[0, \pi/2]$  で単調減少だから、 $u'(t) \leq u'(0) = 1/n$  です。式 (4) の両辺を  $t$  で微分すると、

$$\rho'(t) = \frac{a \cos t \cos(2t - 2u) - 2(1 - u'(t))\{d - a \sin t \sin(2t - 2u)\}}{\cos^2(2t - 2u)}. \quad (12)$$

まず,  $d \geq d_0$  で  $\rho(t)$  が負値単調になることの証明を 2 つの場合に分けて考えます。

場合 1.  $n < 2$  のとき, 式 (12) に  $u'(t) \leq 1/n, d \geq d_0$  を適用すると,

$$\begin{aligned} \rho'(t) &\leq \frac{a \cos t \cos(2t - 2u) - 2(1 - 1/n)\{d - a \sin t \sin(2t - 2u)\}}{\cos(2t - 2u)} \\ &\leq \frac{a \cos t \cos(2t - 2u) - a + \{1 - (2/n - 1)\}a \sin t \sin(2t - 2u)}{\cos(2t - 2u)} \\ &\leq \frac{a \cos t \cos(2t - 2u) - a + a \sin t \sin(2t - 2u)}{\cos(2t - 2u)} \\ &= -a \frac{1 - \cos(t - 2u)}{\cos(2t - 2u)} \leq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

上式において等号が成立するのは  $t = 0$  のときだけです。なぜなら, 等号が成立するなら, 3 番目の不等式において  $\sin t \sin(2t - 2u) = 0$  が成り立たねばなりません。この式が成り立つのは  $t = 0$  のときだけです。したがって,  $\rho(t)$  は単調減少関数です。

場合 2.  $n \geq 2$  のとき, 式 (12) に  $u'(t) \leq 1/n \leq 1/2, d \geq a$  を適用すると,

$$\begin{aligned} \rho'(t) &\leq \frac{a \cos t \cos(2t - 2u) - a + a \sin t \sin(2t - 2u)}{\cos(2t - 2u)} \\ &= -a \frac{1 - \cos(t - 2u)}{\cos(2t - 2u)} \leq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

上式の等号が成立するのは  $t = 0$  のときだけです。なぜなら, 等号が成立するなら  $\cos(t - 2u) = 1$ , すなわち  $u = t/2$  が成り立ちます。もし  $t \neq 0$  と仮定すると, 式 (2) より, 次の矛盾が生じます:

$$\cos(t/2) = \frac{2 \sin(t/2) \cos(t/2)}{2 \sin(t/2)} = \frac{\sin t}{2 \sin u} = \frac{n}{2} \geq 1. \quad (15)$$

したがって,  $\rho(t)$  は単調減少関数です。

次に,  $d < d_0$  で  $\rho(t)$  が単調でないことの証明を 2 つの場合に分けて考えます。

場合 1.  $n < \sqrt{2}$  のとき, 定理 1 より,  $\rho(t)$  は区間  $[0, \pi/2]$  で定義された関数です。このとき,  $f(t) = \rho'(t) \cos^2(2t - 2u)$  とおくと,

$$f(0) = a - 2(1 - 1/n)d > a - 2(1 - 1/n)d_0 = 0, \quad (16)$$

$$f(\pi/2) = -2\{d - a \sin(\pi - 2u(\pi/2))\} \leq 0. \quad (17)$$

式 (17) の等号が成立するのは  $d = a, u(\pi/2) = \pi/4$  のときだけです。このとき, 式 (2) より  $n = \sqrt{2}$  となります。これは, 場合分けの条件に反します。したがって, 式 (17) の不等号は  $<$  です。この不等式と式 (16) より,  $\rho'(t)$  の符号は 0 と  $\pi/2$  で異なります。したがって,  $\rho(t)$  は単調ではありません。

場合 2.  $n \geq \sqrt{2}$  のとき, 定理 1 より, 関数  $\rho(t)$  は区間  $[0, t_0]$  で定義された関数です。ただし,  $t_0$  は定理 1 で定義された  $r_0$  に対応する  $t$  の値とします。このとき,  $t_0 - u(t_0) = \pi/4$  なので,

$$f(t_0) = -2(1 - u'(t_0))\{d - a \sin t_0\} \leq 0. \quad (18)$$

式 (18) の等号が成立するのは  $d = a, t_0 = \pi/2$  のときだけです。このとき,  $u(t_0) = \pi/4$  ですから, 式 (2) より  $n = \sqrt{2}$  となります。この場合だけは, 後ほど別に考えることにします。これ以外の場合, 式 (18) の不等号は  $<$  です。この不等式と式 (16) より,  $\rho'(t)$  の符号は 0 と  $t_0$  の左近傍で異なります。したがって,  $\rho(t)$  は単調ではありません。

次に, 先ほど除外した場合, すなわち  $n = \sqrt{2}, d = a$  の場合を考えます。このとき, 先述の通り,  $t_0 = \pi/2, u(t_0) = \pi/4$  です。したがって, ロピタルの定理を用いると,

$$\lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \frac{\cos t}{\cos(2t - 2u)} = \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \frac{-\sin t}{-\sin(2t - 2u) \cdot 2(1 - u'(t))} = \frac{1}{2}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \frac{1 - \sin t \sin(2t - 2u)}{\cos^2(2t - 2u)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \frac{-\cos t \sin(2t - 2u) - \sin t \cos(2t - 2u) \cdot 2(1 - u'(t))}{-2 \cos(2t - 2u) \sin(2t - 2u) \cdot 2(1 - u'(t))} \\ &= \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \left\{ \frac{1}{4(1 - u'(t))} \cdot \frac{\cos t}{\cos(2t - 2u)} + \frac{\sin t}{2 \sin(2t - 2u)} \right\} = \frac{5}{8}. \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19), (20) より, 次式を導くことができます:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} \rho'(t) &= \lim_{t \rightarrow \pi/2-0} a \left\{ \frac{\cos t}{\cos(2t - 2u)} - 2(1 - u'(t)) \frac{1 - \sin t \sin(2t - 2u)}{\cos^2(2t - 2u)} \right\} \\ &= a \left( \frac{1}{2} - \frac{5}{4} \right) = -\frac{3}{4}a. \end{aligned} \quad (21)$$

式 (16), (21) より,  $\rho'(t)$  の符号は 0 と  $\pi/2$  の左近傍で異なります。したがって,  $\rho(t)$  は単調ではありません。

## 参考文献

- [1] 前田 侑香, ビー玉の向こう側に見えるもの, 愛知教育大学卒業論文, 2018.