イプシロン　2019. Vol.61，9 － 24

GC を使った数学的探究における事実と問いのダイナミズム
－対応表をもとに進める数学的探究に関するケーススタディを基にして－

愛知教育大学　数学教育講座　**飯　島　康　之**

1.　はじめに

1.1 GC は「わかりやすく解説する」ためだけの道具?

学部の授業，数学科教育 CII では，生徒の立場で体験することを出発点としつつ，いろいろな教材研究を重ね，それぞれが授業設計をして指導案をつくるところまでを求めている。「主体的・対話的で深い学び」を体感してくれることを期待して，いろいろな模擬授業を提示しているつもりだが，その後学生が試作する教材案の多くが，「解説」にとどまっていることが多い。生徒にわかりやすく解説する授業というものも，GC の一つの使い方であることはたしかなのだが，さらにすすめて，「主体的・対話的で深い学び」にチャレンジしてほしいと思う。

1.2 「豊富な観察を可能にするソフト」としての GC

GC は正確な図を作図し，動かすことによって生じる，いろいろな場合を調べること，つまり豊富な観察を可能にする。「百聞は一見にしかず」という言葉が示すように，言葉だけでは理解しにくい内容に対して現象を提示することで「わかりやすくなる」事例は多い。そういう意味では，「わかりやすく解説する」例を試作する学生の気持ちもわからなくない。

1.3 「インターラクティブに探究を進めていく」ための道具としての GC

私は，GC は「インターラクティブに探究を進めていく」ための道具を想定して開発してきた。GC にかぎらず動的幾何ソフト，あるいは一般に数学ソフトウェアは「インターラクティブに使い探究を進めていく」ことが重要と考える。ソフトウェアの設計において，ユーザーインターフェイスの作り方が「インターラクティブ」だからということもある。しかしもっと基本的なのは，ユーザーとソフトあるいはそこに実現されている図あるいはその向こうにある数学との間のやりとりが対話的なのだ。図を作ってみて，動かし，観察する。一定の結果が得られ，なにかを感じる。納得することもあれば，新しい事実を発見することもある。次に考えたい問題を思いつくこともある。そして，また動かす場合もあれば，ちょっと図を追加することもあるし，証明を考えたり計算してみたり，別の数学的活動をすることもある。そういうことをしていく中で次第にその問題にのめりこんでいく(私はそれが「主体的」を意味するものだと思う)。

1.4 「インターラクティブに探究を進めていく」ための原動力としての言語活動

この探究のサイクルごとに深まる理解は少しずつでも，何回もサイクルを繰り返していくことで深くなっていく。そういう様相を個人，グループあるいはクラスとして実現していくことが，GC を使った教材研究であり，授業設計である。ソフトあるいは図と生徒個人との対話は無言のまま行われることもあるが，グループでは個人と個人の対話における言葉として外化され，言語

活動になる。生徒たちの様子に教師がかかわるときは，発問とか切り返しなど様々な言語活動になる。どういう出発点からはじめるか，いまの状況を想定する次の状況につなげていくならどういう言葉を使うのがいいかなど，授業設計をする上で，言語活動への注目することが鍵となる。

だが，そういうサイクルを繰り返しながら進んでいく数学の探究のイメージは，なかなか学生に通じない。与えられた問題に対して，公式あるいは定理を当てはめて首尾よく解決していくことが数学という印象が強いのだろうか。おそらく，インターラクティブな探究をしてきた経験が少ないので，何をしていいかが想像できないし，行動できないということなのだろう。

1.5 GC での「インターラクティブな探究」を進めていくための原動力の一つとしての「事実」

GC のみならず，数学的ソフトウェアは，それを使わない場合と比較して，事実を豊富に提供してくれる。多くの事実を観察しその意味を考える中で数学的命題としての考察も生まれる。「観察したすべての事実の中で成り立っているから，この仮説は正しそうだ」と思ったり，「仮説が成り立たない事実が一つ見つかったので，この仮説は成り立たないこと」が分かったりする。教材研究を進める上でも，「事実をどう扱うのか」や，「事実を見いだした主体としての生徒」をどう生かすかは大切である。本論では「事実」に注目したい。

一方，　実際の数学的探究は「豊富な事実を観察するだけで解決する」単純なものではない。Dewey が How We Think の中で一般論として述べたような，漠然とした問題状況から始まり，問題として定式化され，解決にいたるプロセスに近い。授業の中で学級全体としての探究や，グループとしての探究を進めていくために「言語活動」はとても重要である。

1.6 本稿のねらい

優秀なソフトさえあれば「事実をより深く観察する」ことができるわけではない。言語活動，たとえば問いの明確化との相互作用があるからこそ，深く観察・分析すべき視点と必然性が生まれてくる。問いも単独で生まれるわけではなく，それを考える必然性を与えてくれるものの一つが「事実」である。

本稿では，数学科教育 CII などで上記のような様相を学生たちが「大学生としての数学的探究」として体験するのに適切と思い提供している事例を紹介することで，数学的探究における「事実」や「言語活動」の役割について例示したい。特に，事実からどんな問いが生まれうるのか，その問いによってどんな活動が生まれ，どんな事実が観察可能になるかをケーススタディからそのダイナミズムに焦点を当てる。

2.　対応表を利用した数学的探究の事例における「事実と問いのダイナミズム」

2.1 四角形の四つの辺の中点を結んでできる四角形の問題の場合

(1) 「いろいろな場合を調べる」ための出発点としての「対応表」

GC を開発した 30 年前から，最も代表的な例として扱ってきたのが次の問題である。

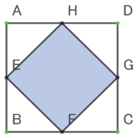
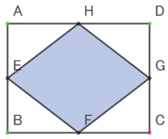
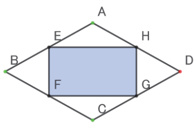
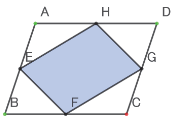
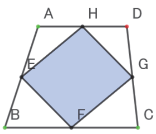
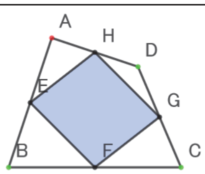
問題 1　四角形 ABCD の 4 つの辺 AB,BC,CD,DA の中点をそれぞれ E,F,G,H とするとき，四角形 EFGH はどのような形になるか?

対応表も当初から使ってきた。GC の最も基本的な使い方は「図形を動かす」ことであり，「いろいろな場合を調べる」ことである。「四角形 ABCD」というのが表すさまざまな事例を観察し，集約する上で，「いろいろな場合を調べるための暫定的な枠組み」として，「四角形にはどんな種類があるのか」を考え，「代表的な形」として，思いつくものを列挙し，それぞれの場合を調べる。

(2) 暫定的な枠組みによる対応表の作成

ほぼ確実に，学生たちはその方針に合意する。そして多くの場合，列挙される形は，正方形，長方形，ひし形，平行四辺形，台形，一般の四角形である。そして，ABCD がこの 6 種類の場合のそれぞれに関して，GC 上で表示し，それをワークシートにスケッチし，EFGH はどのような形と言っていいかを言葉で記入する。模擬授業の中では，一つずつ担当させて黒板等にかいてもらう。たとえば，次のような対応表が代表的な結果になる。

表 1 「4 辺の中点を結んでできる四角形」の対応表 1

ABCD	EFGH	スケッチ
正方形	正方形	
長方形	ひし形	
ひし形	長方形	
平行四辺形	平行四辺形	
台形	平行四辺形	
一般の四角形	平行四辺形	

(3)「ABCD がどんな場合でも EFGH は平行四辺形」

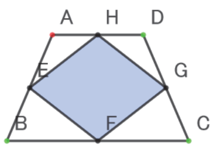
EFGH のバリエーションとして，正方形，長方形，ひし形もあるけれども，これらは平行四辺形の特殊な場合としてみなすなら，「ABCD がどんな場合でも EFGH は平行四辺形」といえる。この図形に関して，最も基本的な証明すべき事柄として注目し，その証明に取り組み，中点連結定理を使った証明に至る。これがこの図に関して基本的な「対応表を使った探究」といえよう。

さらに特殊な場合に注目なら... というのが， 私が 30 年前に想定していた「対応表を使った探究」だった。しかし，数年前から「20 人以上が参加している場合には，違う展開が可能なことが多い」ことに気づいた。

(4)「ABCD が台形のとき，EFGH は平行四辺形」でないケースの存在

台形の欄に注目すると，「ひし形」と書いている学生もいるし，「平行四辺形，台形」と列挙している学生もいる。一定の確率でそういう記述をする学生が存在するのだろうが，20 人以上の集団になるとほぼ確実に一人は存在するというのが私の経験則だ。上記の対応表が黒板に書かれたときに，学生が自発的に「私の対応表は違います」と発言することはまれだ。「この結果以外の人はいますか?」と投げ掛けたら反応することもある。反応しないときには，（机間指導をしたときの観察結果をもとに）次のような図を書いている学生のそばに行って，「そう。こういうのもありうるよね。図をかいてきて」と指示したり，あるいはワークシートを受け取り，書画カメラで「こんなのもあるらしい」と提示する。そして，「これ， どう思う?」と問いかける。

表 2 台形に対してひし形

台形	ひし形	

これまで， 次のような発言があった。

「ABCD が台形の場合でも EFGH がひし形になることはありますね」

「これは ABCD が等脚台形なので，普通の台形ではありません」

「台形には一般的な台形を書くべきなんじゃないですか」

他にもいろいろな発言がありうる。みなさんだったら，その発言はどう生かすだろうか。

(5) 対応表に「等脚台形」を追加し，再整理する

大学生なら等脚台形という概念は知っている。「どんな等脚台形でもひし形になる」ことを確認して，「それは別にしよう」と合意されるなら，表(言葉のみ)は次のようになる。

表 3 「4 辺の中点を結んでできる四角形」の対応表 2

ABCD	EFGH
正方形	正方形
長方形	ひし形

ひし形	長方形
平行四辺形	平行四辺形
等脚台形	ひし形
台形	平行四辺形
一般の四角形	平行四辺形

「これを見て，どう思う」と投げ掛ける。ここで反応が学生から返ってくることは少ない。その様子を見極めてさらに次の問いに続ける。

(6) 「EFGH が長方形になる」ような(ABCD の)形はないのか?

「EFGH の方に注目すると，ひし形になる場合だけが，長方形と等脚台形と二通りあるって，なんかずるくないか?」

「ずるい」という言葉が適切かどうかは，参加している学生集団によって判断する。「バレンタインデーに，正方形君と長方形君はそれぞれチョコを一人ずつからもらっているのに，ひし形くんだけ二人分みたいな感じに見えるけど，これってずるくないか?」「長方形とひし形って，将棋の飛車と角みたいな存在だから，ほぼ同格のはず。とすると，等脚台形っていう名前のはっきりしている図形のときに EFGH がひし形になるのだったら，やっぱり知られた名前の形のときに，EFGH が長方形になることもあるんじゃないか」

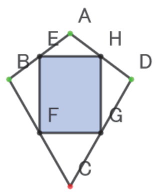
学生はなんとなく納得する。

「じゃあ，調べてみて」

(7) たこ形の登場

本学の学生の場合，1 年生での算数科研究などの授業で，たとえば対称性の観点に基づいて図形の概念を整理し，たこ形という概念を扱っている。たこ形という名前は教科書では扱っていないけど, 二等辺三角形を二つ組み合わせた形などとして扱っていることに触れている。そのため，数分経過すると，次の図を見つける学生が何人も出てきて，結果を共有し，対応表に反映できるようになる。「ずるい」状況は，(EFGH が)長方形に対して，(ABCD が)ひし形とたこ形という二つの形があることがわかり，解消されたことになった。

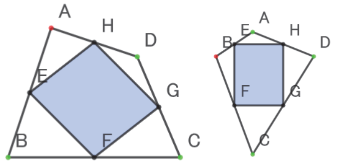
表 4 たこ形の場合には長方形

たこ形	長方形	

(8) たこ形でないのに，長方形になることもある

しかし，多くの場合，それでとどまらない。「EFGH を長方形にするような ABCD」を意識的に探すことによって，「たこ形」以外に，次のような図をつくってしまう学生も出てくるのだ。

表 5 たこ形でさえない形なのに長方形

一般の四角形	平行四辺形, 長方形	

「これって，どんな名前の四角形なんだ?」

当然，この形に適切な四角形の概念はない。「名前がないとすると，一般の四角形は平行四辺形の場合も，ひし形の場合もあるっていうこと? 整理できない? どう考えるといいんだろう。」

(9) 対応表についての再考

「いろいろな場合について調べよう」と思った。「いろいろな場合」の代表例として，いろいろな形を列挙した。本来それは集合だ。そして，観察しているのは，無限個ある要素の中の一つあるいは数個だ。その観察結果(の中の一つ)を右にスケッチしている。

「ABCD が台形の場合, EFGH は必ず平行四辺形になる」のだけれども,「特別な場合として, EFGH がひし形になることもある」ことがわかった。そして，そういう場合には,「等脚台形という名前があるので，対応表を修正することで対応できた」

「一般の四角形の場合に，EFGH が長方形になる場合もある」ことが分かったが,「EFGH はたこ形のときに ABCD は長方形になる」ということ以外に,「名前がない一般の四角形でも, ABCD が長方形になることがある」ことが分かった。

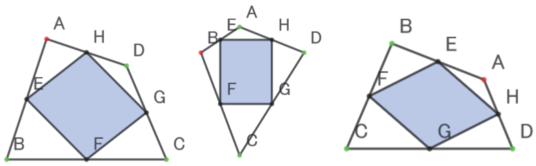
「適切な名前がないとすると，図形の何に注目して整理するといいのだろう。」

(10)対角線に関する性質に注目

さすがに大学生なので,「図形の性質」という言葉が登場する。上記の場合には，「AC⊥BD」という特徴があり，そのときには ABCD が長方形になる証明も発表してくれる。

そして,「ABCD がどんな特徴を満たせば EFGH がひし形になるのだろうか」ということも自然な問いとなり,「AC=BD となる次のような場合に EFGH はひし形になる」ことが発見される。

表 6 一般の四角形の対応表を整理するための性質としての対角線の長さと直交性

一般の四角形	平行四辺形, 長方形 ひし形	

(11)特殊な場合は必ず存在するのか?

上記の流れのまま，EFGH が正方形になる場合が発見されることが多い(AC=BD, AC⊥BD のときに EFGH は正方形)。(発見されない場合には，「EFGH が正方形になるのはかなり特別な場合だから ABCD が正方形のときのみである」という暗黙の仮説をどう生かしていくかに注目することになる。）すると，(言葉だけの)対応表は次のような形になる。

表 7 「4 辺の中点を結んでできる四角形」の対応表 3

ABCD	EFGH
正方形	正方形
長方形	ひし形
ひし形	長方形
平行四辺形	平行四辺形
等脚台形	ひし形，正方形
たこ形	長方形，正方形
台形	平行四辺形，ひし形，長方形，正方形
一般の四角形	平行四辺形，ひし形，長方形,正方形

この対応表を見て，みなさんは違和感を感じないだろうか。

等脚台形，たこ形，台形，一般の四角形の場合には，たとえば，正方形が入っている。「台形の特殊な場合としての長方形」では確実に「EFGH はひし形になる」わけだが，「長方形ではない台形の場合にも，EFGH がひし形になる場合がある」。なのに，「ABCD が平行四辺形」の場合には，「EFGH は平行四辺形」しかなく，特別な場合としての「長方形，ひし形，正方形」が「ない」。

気がついていないだけで，実は「普通の平行四辺形のときに，EFGH が正方形や長方形，ひし形になる場合は，実はあるはずなのだろうか」ということが疑問になる。

「ABCD がいわゆる平行四辺形」の場合には，「EFGH はいわゆる平行四辺形のみ」つまり，長方形，ひし形，正方形でないような平行四辺形のときには，特殊なことは「ない」。

たこ形にすっきり整理できるが，「台形」に注目してみると，「等脚台形ではない台形」の場合に EFGH がひし形になることは「ない」が，EFGH が長方形・正方形となる場合の ABCD に適切な名前がないので，形の名前で整理することには限界があり，図形の性質に注目せざるをえないことが改めて認識できる(図 1 にベン図を掲載してみたがややこしい)。

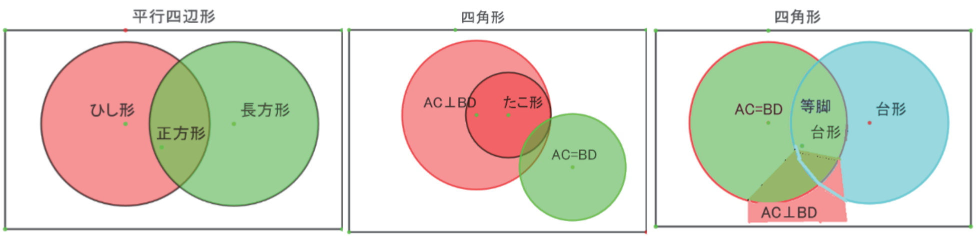


図 1 ABCD の形や性質と EFGH の形(正方形，長方形，ひし形)との対応を表すベン図

2.2 四角形の四つの角の二等分線の交点を結んでできる四角形の問題の場合

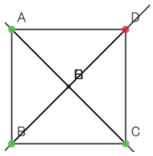
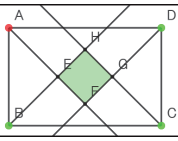
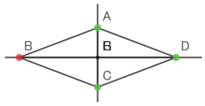
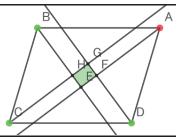
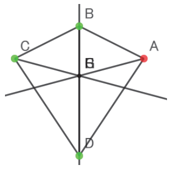
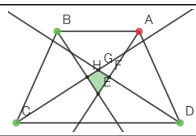
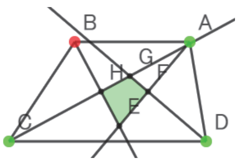
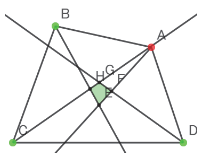
次の問題もやはり 30 年前から扱ってきた問題の一つである。対応表を使った探究に関しては，中点を結ぶ問題の場合と少し違った展開になる。

問題 2　四角形 ABCD の 4 つの角の二等分線をひき，それらの交点を E,F,G,H とする。このとき，四角形 EFGH はどのような形になるか?

(1) 暫定的な枠組みによる対応表の作成

まず対応表をつくってみると，多くの場合，次のような対応表になる。

表 8 「4 つの角の二等分線の交点を結んでできる四角形」の対応表 1

ABCD	EFGH	スケッチ
正方形	一点	
長方形	正方形	
ひし形	一点	
平行四辺形	長方形	
たこ形	一点	
等脚台形	たこ形	
台形	一般の四角形	
一般の四角形	一般の四角形	

最初の結果で特徴的なのは，EFGH に関して共通する特徴が見いだせず，「一般の四角形」という記述になる点だ。「次に何を考えたい?」とたずねると，多くの場合，次のような答えになる。

「EFGH が一点になるのは，ABCD がどんな形の場合だろうか」

「EFGH の種類が少ない。平行四辺形，ひし形，台形がない。」

「どんな場合にも共通する性質は何だろうか。」

(2) EFGH が一点になるための ABCD の条件

まず，「EFGH が一点になるのは，ABCD がどんな形の場合だろうか」という問いに取り組むことにする。すると「正方形，ひし形，たこ形」を含むような ABCD の条件を見つけることになる。A～D を動かすことで，図 2 のようにそれら以外にも存在することを多くの学生が実感する。見慣れた名前の四角形ではないことから，どんな条件を満たせばいいのかと考えることになる。

今年の授業では普段と違う展開になった。多くの学生が，「対角線が直交すればいいのではないか」と考えた。

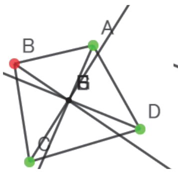


図 2

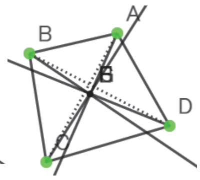


図 3

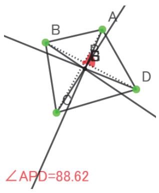


図 4

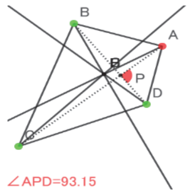


図 5

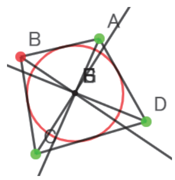


図 6

図 3 のように対角線を書き込んでみると直交するように見える。測定をしてみた。いろいろな場合を調べてみた。図 4,5 のように，90° 以外の場合もあると。だが，かなり 90° に近い。「反例が仮説を却下すべき例」ともいえるし，「反例を見つけようとしても，なかなか明確な数値になりにくい例」ともいえる変わった例であることが分かった。

なお，この例の場合，「4 本の角の二等分線が一点で交わる」ということの意味を，たとえば「三角形の 3 つの角の二等分線は必ず一点(内心)で交わる」ことの理由と関連づけて考察できれば，図 6 のように「円に外接する四角形」に到達することができるのだが。

(3) 平行四辺形，ひし形，台形は本当にないのか?

「平行四辺形，ひし形，台形がない」という観察結果があった。この対応表を信用するとすれば，「一般の四角形」の中に潜んでいることになる。

「EFGH をそれらの形(平行四辺形，ひし形，台形)にしてみよう。」

すると，「平行四辺形，ひし形はつくれない。でも，台形だったらつくることができた」という反応だった。

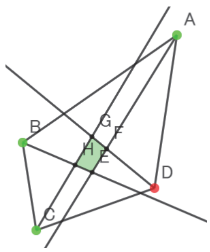


図 7

なるほど，いわゆる平行四辺形，ひし形はつくれないが，台形はつくれるのだ。

(4) 本当に「一般の四角形」なのか? 観察や解釈がいい加減ではないのか? まずは台形の場合

図７の事実と, 平行四辺形やひし形はつくれないという観察結果から, 二つの問いが生まれる。

「一般の四角形というのは，共通する特徴を見いだせないという観察結果を示している言葉であり，実は隠れた性質があるのではないか?」

「ここでは台形をつくることができたが，この台形は一般の台形なのか，特別な台形なのか」

そして，最初の問いに基づいて「観察や解釈の精緻さが足りないかもしれないので『ABCD が台形の場合の観察結果』を再検討してみよう」という具体的な問いが生まれる。

あるいは,「台形の場合には，１組の辺が平行。その少し特殊な場合が２組の辺が平行な平行四辺形。そこで，台形の場合と平行四辺形の場合を比較してみよう」という問いが生まれる。

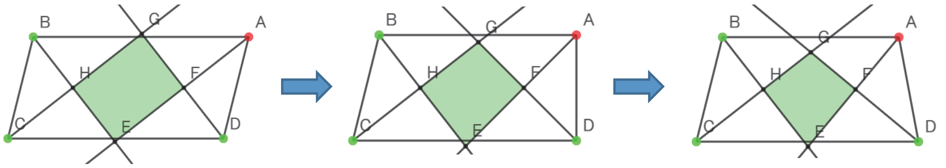


図８

図８は平行四辺形 ABCD において，頂点 A を左側に移動している。左端以外は台形になっている。このとき，∠H は動かない。つまり，90°のままになっている。右側も同じであることを考えると，台形の場合には，∠H と∠F という二つの角が 90°になっていることが分かる。

(5) 本当に「一般の四角形」なのか? 観察や解釈がいい加減ではないのか?

一般の場合は，円の内接する四角形である。学生たちがそこに自然に到達するにはどういう問いが適切なのか，いつも悩む。私自身が初めてこの問題に取り組んだときには,「台形の結果は１組の向かい合う角が直角の四角形。このとき，EG を直径とする円がかける。つまり円に内接する四角形になる。この結果が成り立つ場合と成り立たない場合を見極めてみよう。」と考え, E,F,G を通る円を作図し，A を動かしたときに,「この円は H を通らなくてもおかしくないのに，いつも H を通る。しかも四角形にならない場合でも」ということを，図９のように観察し，とても驚いた。そして,「あってもいいはずの形がなぜ見つからないのか」という問題もすぐに解消された。

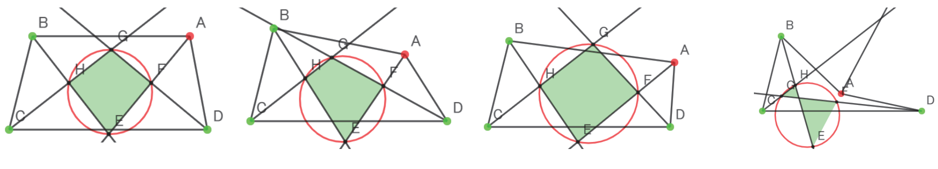


図９

前回の数学科教育 CII の授業の中では，そのような流れをある程度踏襲することを考え，次のような流れにした。

「ABCD が台形の場合, EFGH はどんな特徴があるといったらいいのかな。」

「∠E と∠G が 90°の四角形」

「それって，どういう特徴があるといったらいいの?」

「円がかける」

「どんな円が」

「EG を直径とする円」（図 9 左端のように書き込んでみる）

「同じような円って，一般の場合にもかけるのかな。さっきの対応表の図の場合にどうなるか，かいてみて」

フリーハンドでえがいた図なので，四角形の 4 頂点を円が通るようにかけそうな気もするが，自信は持てない。そこで，

「ここに円を追加してみて，いつも 4 点を通るようになるかどうかを GC を使って確かめてみよう。そのためには作図のスキルが必要だよね。こんな感じにすると求める円がかけるから。」と，作図の手順を説明し，その場で，E,F,G を通る円を追加。

その後，学生は各自図形を動かすことによって，先程の図 9 のような結果を観察した。

(6) 平行四辺形などが「ない」ことは説明できるか?

観察結果を踏まえて，当初の問題が解決したかどうかをたずねる。

「このことから，平行四辺形やひし形が『ない』ことは説明できるか?」

「台形はあったけど，それに関して何かいえることはあるか?」

ここまで解決が進み，具体的に証明すべきことが明らかになってくると，円に内接する四角形では，対角の和は 180°。平行四辺形・ひし形では対角は等しいので，90° にならなければならないから，平行四辺形・ひし形になるときには自動的に長方形，正方形になることを説明することができるようになる。同様に，台形の場合には，角の関係を計算すると，等脚台形になることが説明できるようになる。

そして，すべてに共通する性質として「EFGH は円に内接する四角形」であることがわかったことで，対応表にかかわる問題がすべて解決されたことを実感することが多い。

2.3 四角形の四つの辺の垂直二等分線の交点を結んでできる四角形の問題の場合

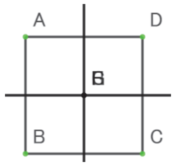
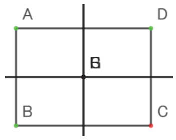
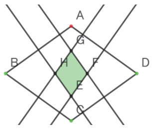
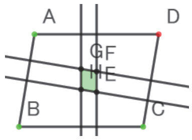
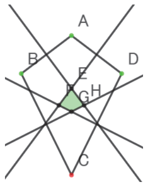
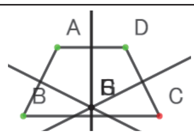
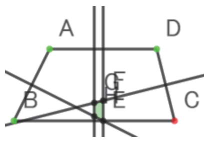
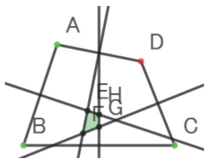
次の問題もやはり 30 年前から扱ってきた問題の一つだが，これまであまり深い探究はしなかった。今回，上記の二つの例との関係を意識しながら探究してみると，上記の二つの問題とはまったく違った側面を持つ問題であることが明らかになった。そこで必要になった証明などは本稿では割愛し，探究の概略を事実と問いとの関わりに焦点を当てて記述する。

問題 3　四角形 ABCD の 4 つの辺の垂直二等分線をひき，隣り合う二直線の交点を E,F,G,H とする。このとき，四角形 EFGH はどのような形になるか?

(1) 暫定的な枠組みによる対応表の作成

まず対応表をつくってみると，次のような対応表になる。

表 9 「4 つの辺の垂直二等分線の交点を結んでできる四角形」の対応表 1

ABCD	EFGH	スケッチ
正方形	一点	
長方形	一点	
ひし形	ひし形	
平行四辺形	平行四辺形	
たこ形	たこ形	
等脚台形	一点	
台形	台形	
一般の四角形	一般の四角形	

(2) EFGH が一点になるための ABCD の条件

角の二等分線の交点からできる四角形の場合と同様に「EFGH が一点になるのは， ABCD がどんな形の場合だろうか」が最初の問いになる。正方形，長方形，等脚台形を含む条件を探すことになるのだが，今回の場合，たとえば EFGH が一点のままでいるように A を動かしてみると，図 10 のようになることから，円に内接する四角形という条件を見いだす突破口がある。

そういう気づきに導きやすくする上では，「点 A だけを動かしてみよう」というような指示を明確にするのも一つの手かもしれない。

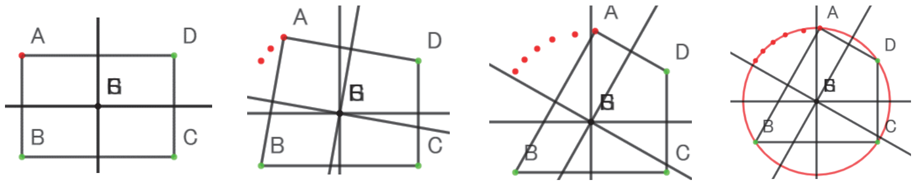


図 10

(3) 同じ形?

対応表を見てみると，一点になる場合以外は，ABCD と EFGH がいつも同じ形の名前になっている。しかし，相似ではない。そこに注目し，反例を見いだしたり角の対応の仕方を明確化する活動を引き出すには，次の問いも考えられる。

「ABCD と EFGH が同じ形ってどういうこと?」

「ABCD と EFGH は相似なのかな?」

実際には，$\angle E = 180^\circ - \angle A$ などの関係がそれぞれ対応している角の間にある。

(4) EFGH が等脚台形などになることは本当にないのか?

対応表における「一般の四角形」という観察結果は要注意である。4 辺の中点を結んだ四角形の場合には，「一般の四角形」の中に，正方形など特殊な場合が混在していた。今回の「一般の四角形」の中に，等脚台形，長方形，正方形が混在している可能性も否定できない。また，4 つの角の二等分線の交点を結んだ四角形の場合には，「一般の四角形」とは「最初特別な性質を見いだせなかった」という意味であって，実は「円に内接する四角形」という性質を満たす集合がその正体であった。今回の場合，実は隠れた性質を満たす四角形のみしか現れていないのだろうか。

(5) EFGH→ABCD という逆の対応を考察することによる意外な結果

今回の問題 1 ～ 3 はすべて，四角形 ABCD に対して四角形 EFGH を対応させている問題として考えることができる。平面内の点は自由度が 2 あるので 2 次元的存在である。四角形 ABCD の集合は 4 つの点の自由度から 8 次元と捉えると，四角形の集合(8 次元)から四角形の集合(8 次元)への集合の対応であり，EFGH に対して，結果が EFGH となるような四角形 ABCD を求めるという，逆の対応を考察すると，次のようなことが明らかになっていた。

中点をむすぶ四角形の図では，平行四辺形(6 次元)の場合にのみ ABCD の集合が存在し，その

集合は２次元の広がりを持っている。角の二等分線を結ぶ四角形の図では，円に内接する四角形(7 次元)の場合にのみ ABCD の集合が存在し，その集合は１次元の広がりを持っている。今回，ABCD が円に内接する四角形のときには EFGH が一点になっている。このことから「角の二等分線を結ぶ四角形」の場合からの類推でいえば，ある性質を満たす集合の場合にのみ ABCD の集合が存在し，その集合が何次元かの広がりを持っていると想定された。

そこで，EFGH に対応する ABCD の集合を求めてみた。実験結果から次が推定された。

・EFGH が円に内接する四角形の場合は，対応する ABCD は存在しない。

・EFGH が円に内接する四角形ではない場合は，対応する ABCD はただ一つ存在する。

さらにその理由を数学的に証明できた（このプロセスについては別の機会に紹介する予定)。

これらを解明する上では，上記のような実験を GC 内で行えるような知識・スキルあるいは，数学的証明をするための知識(変換に関する知識)が必要なので，現時点では，中学生に適切な探究を方向づけるような問いは見つかっていない。

3. 考察

3.1 同じような構造の問題でも，結果も探究の様子もかなり違う。

今回扱った問題１～３は，四角形 ABCD をもとに，辺の中点，角の二等分線の交点，垂直二等分線の交点によってできる四角形 EFGH について考えるもので，問題の条件変えによって生成できる問題群の例である。問題の構造も対応表で調べる様子も似ているのだが，数学的結果はかなり違っている。四角形の集合(8 次元)から四角形の集合(8 次元)への対応において，辺の中点に関しては退化次元が 2，角の二等分線の交点に関しては 1，そして垂直二等分線の交点の場合は 0(ただし，円に内接する四角形の場合のみが特異なケースになっている)。

3.2 「暫定的な探究の出発点」としての対応表

しかし，構造が同じこれらの問題において，出発点として「いろいろな場合を調べてみて，特徴を明らかにし，さらに深く探究を深めていくための手がかりを得て，次に考えるべき問題を生み出す」上で重要な役割を果たしていることを実感することができる。別の言い方をすれば，対応表は終着点ではなく，次の探究を進めていくための暫定的な存在である。今回のケーススタディを踏まえると，対応表の結果について分析・検討するための観点として次のものを見いだせる。

3.3 対応表の結果を分析・検討するための観点

(1) ABCD の形の中に含まれるいろいろな場合に対して EFGH はどのようなバリエーションがあるのか。

たとえば，「ABCD は台形」に対してスケッチしているのは，一つの台形のみである。しかし，調べたいことは集合全体である。一人が観察しスケッチしたものがワークシートにはかかれているが，他の場合がありうるのかどうかなどが，分析・検討の観点の一つになる。

(2) ABCD の分類の整合性を検討する

対応表をつくる上で最初は「思いつく四角形の形」から始めるが，結果を観察する中で見いだ

した特徴的な場合を対応表の中に追加したり，その上で対応表の整合性を考えることなどが分析・検討の観点の一つになる。また，そのときに，「形の名前による分類」が妥当なのか，その背景にある「性質による分類」が妥当なのかを考えることも分析・検討の観点の一つになる。

(3) EFGH の形の側から逆に対応する ABCD の集合を検討する

「EFGH が一点になるのは，ABCD がどういう条件を満たす場合だろう」という問いが典型的だ。ABCD→EFGH の逆対応 EFGH→ABCD を考えることが，分析・検討の観点の一つになる。(「EFGH が正方形になるのは，ABCD がどんな場合だろう」というようなものも含まれる。)

(4) 観察・解釈の妥当性を検討する

状況の全体像が見えていない最初の観察において，選んでいる図，その図をどういう形とみなすか，どういう性質を見いだし，EFGH の特徴として記述するかなどの解釈は探究者自身が行っているので，いつも正しいとは限らない。対応表全体を見渡したとき，特定の場合についてさらに探究を深めていくことも分析・検討の観点の一つになる。

(5) 証明すべき問題を定式化するとともに，その証明で明らかになったことを対応表の理解に生かす

証明は単に「観察結果から推定した命題が正しいことを示す」だけでなく，その問題の本質を把握することも意味する。辺の中点の場合であれば，中点連結定理を適応する上で重要な「対角線」を意識化することによって，対応表の結果を理解・整理していく上で，2 つの対角線の関係が鍵になっていく。他の 2 つの例の場合は角に関する関係やそれに関わる図形の特徴が鍵になっていく。表面的な理解をより深い理解に進めていく上で重要になる「証明すべき問題」を見いだすことが数学的探究としては重要ともいえる。

3.4 授業における言語活動を検討するために

「いろいろな場合を調べて対応表をつくろう」という最初の問題提示に対して，「対応表が一通り埋まったので，おしまい」というのが生徒の感覚だとする。そこから何らかの突破口を見いだし，探究を進めていくことの妥当性と方向性を実感させることが，授業者の重要な役割だ。学級に 40 人がいるなら，40 通りの図の選択，観察，解釈がある。「こんな場合もあるんだね」とあるワークシートを書画カメラで提示することは，単に事実を提示するだけでなく，「そういう場合を選択した生徒の行動」に注目することを意味するし，「この図から何を思いついたの？」はその生徒の行動を言語化することを意味するし，「この対応表をみてどう思う?」というような発問は，「次に行うべきこと」を想起し，共有し，そしてどれをすべきかを判断するの場を提供する。

GC を使った授業では，豊富な事実を扱うことが可能になるが，「この事実を見つけた生徒」「この図の特徴をこう考えた生徒」「この対応表から次にこういうことをしたいと思った生徒」など，それぞれの事実という客体に対応して「生徒」という主体を浮き上がらせることで，様々な生徒の存在や探究の多様性を扱うことが可能になる。

そのような意味でも，授業の中で生まれるさまざまな事実とそれに関わるさまざまな個人の様子に注目し，それを取り上げたり，次の流れをコントロールするものとして，授業者の言語活動

を考えていくことが重要である。

4. おわりに

ある問題に関する数学的探究の可能性を見極めることは決して簡単なことではない。本稿をまとめる上での私の率直な感想である。今回の問題は 30 年前から扱ってきた。自分自身も様々な探究をしてきた。中高生，大学生，中高の先生方などいろいろな方を対象に授業などで扱ってきた。それぞれで探究の様子は違う。限られた時間の中での決着を想定してどういう投げ掛けをするといいのか，誰のどういう気づきをどう生かすべきか。いろいろ検討しながら，かなりの経験を積み重ねてきた。なのに，まだまだ違う可能性が見えてくる。

GC をはじめとした動的幾何ソフト, あるいは一般に数学ソフトは, 観察を豊富にしてくれる。しかし，それが「ボタンを押せば誰でも簡単に同じような結果を得られる」ことを意味するだけとしか解釈しないなら，ICT 利用は数学教育を画一的なもの，機械的なものに変容させるだけになる。

「主体的・対話的で深い学び」というものが何を指し示すのだろうか。少なくとも GC を開発し長年使ってきた立場からすると，そこには探究のサイクルがある。今回示したように，最初は「いろいろな場合を調べる」ことから出発し，「暫定的に対応表をつくってみる」。しかしそれでおしまいではない。そこにある「事実」をいかしていくことで「問い」が生まれる。その問いについて考える次の探究から新たな「事実」が見えてくる。その「事実」は次の問いを生む。「これでほぼ解決した」というスッキリした状態に到達するまで，このサイクルは繰り返していく。

たとえば，図を作図し，観察(計算)することに多大な時間がかかれば，授業という限られた時間の中で探究のサイクルを回すことは現実的ではない。その時間と労力を ICT が軽減してくれることにより，そのサイクルを体験し，学習の対象とすることができ，それらを踏まえて「さまざまなツールを使いこなすことができる」ようになることがこれからの時代では求められているのではないか。私はそのように考えている。

本稿では大学生を対象とした数学的探究をもとに事例の記述を行った。たとえば，中学生・高校生などの授業設計をする上では，少し違ったものが必要になるだろうが，GC を使った「主体的・対話的で深い学び」を目指した教材研究・授業設計をする上での基礎作業では，それぞれの素材に則して同じような作業が求められる。そのような教材研究・授業設計のための資料となれば幸いである。

参考文献

Dewey, J.(1910) How We Think, D. C. Heath & Co.

飯島康之(2014) 図形の次元，写像としての作図における退化次数からみたマルチタッチ作図ツールの特徴　－ 二つの作図に関する分析を中心に －　，日本科学教育学会研究会研究報告, 28, 9, 93-98, https://doi.org/10.14935/jsser.29.9_93

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：17K00967）の助成を受けたものである。