

# 加法構造における部分－全体関係を表す プリフォーマルな表現の導入指導に関わる注意点

愛知教育大学 山田 篤史

福岡教育大学 清水 紀宏

## 1. はじめに

筆者は、本誌前巻（第60巻）において、加減の相互関係に関わる内容が未習の児童に、典型的な加減逆思考問題を提示し、その考え方を図で説明させた場合の児童の反応と、部分-全体関係を表現するテープ図に当該問題に含まれる3つの数量（答えも含む）を書き込ませた場合の児童の反応について報告し、加減の相互関係に関わる指導の方向性について議論した(山田,2018)。

調査結果の前者については、山田(2005)に準ずるものであった。また、後者については、9割弱の児童がテープ図の解釈に成功しており、少なくとも当該文章題が（数図ブロックの操作や○図による説明等によって）解決できるのであれば、抽象的に部分-全体関係を表現する図（例えば、図1の最下段の図のようなもので、筆者はこれをプリフォーマルな表現<sup>注1</sup>と捉える）それ自体の指導やその図を問題場面に沿って解釈するような指導には大きな困難は無いかもしれない、ということを示唆するものであった。

ただし、教科書の中には、図1のように加減の相互関係の指導に先立って、部分-全体関係を表現するテープ図（概念図）を数図ブロックの操作に関わる手続き図から抽象させる紙面をわざわざ用意するものもあり(清水他,2015)、ここでの丁寧な指導の必要性も感じられるところでもあった。この種の丁寧な紙面作りは、直後に来る加減の相互関係の指導におけるこの種の図の理解に対する困難性を示唆するようにも思われるのだ。

そこで、本稿では、図1の最上段のような図から最下段のようなプリフォーマルな表現を導入していくような授業に関わる注意点について、前稿(山田,2018)の調査対象のクラスで生じたある授業場面を分析・考察することで指摘してみたい。



54  
図1：加減の相互関係の指導に先立つ  
手続き図から概念図への抽象化の  
紙面<sup>注2</sup>（清水他,2015,p.54）

## 2. 分析対象となる授業の概要

ここでは、分析の対象として、国立大学法人附属の小学校2年生のあるクラスの授業場面（以下「本時」と略記する）を取り上げる。なお、本時の前に、当該クラスでは、2桁同士の繰り下がりのある引き算筆算（例えば、 $34-16$ ）を学習しており、ここでは筆算の仕方が一方的に導入されるというより、通常の横書きの計算式での計算の仕方を○図やサクランゴ計算を使って説明する活動に、十分な時間が使われていた点には注意をしておこう。

前時までの学習の流れを受けて、本時では、図1の教科書紙面に相当する授業、すなわち、数図ブロックや○図に基づく手続き図から関係を表現する概念図への抽象化を目指した授業が行われた。具体的には、授業冒頭で「赤いバラの花が34個、白いバラの花が25個咲いています。合わせて何個咲いていますか。友だちに分かりやすく説明しましょう。」という問題が提示され、「図を使って説明しよう」というめあてを設定した後、○図（□や△も含む）や絵を使えそうだという見通しを共有し、自力で説明を考えてみる時間に入っていった。以下は、クラス全体の（想定される）目標の変化を軸にした授業のスケッチである。

### (A) 最初の児童の考えの提示

教師は最初、 $34+25$ の図による説明として、多くの児童が描いていた○図による説明の図を黒板に取り上げ、児童に説明をさせる。その後、教師は、今日の問題の問題文中に「分かりやすく」があることを指摘し、クラス全体に「...『分かりやすく』つてのがあるよね？みんなにとって、これはどう？」と問いかける。すると、すかさず「分かりにくい」という多数の反応があり、「なんで？」とその理由を問うと、多くの児童は「数えていかないといけない」という回答をした。

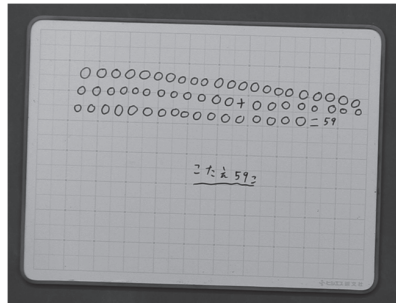


図2a

### (B) 最初の児童の図の修正

ここで教師は、次の児童の考えに移るのではなく、最初の児童の図を修正するという意志決定をして、「じゃあ、これに、これどうしたら、もっともつと分かりやすくなると思う？」という発問をした。

最初に指名された児童は34を数えやすくするために10毎に囲むようなジェスチャーをし、そこで発現が止まったため、2番目に指名された児童が具体的に○を10毎に囲むようにして図を修正した。教師は、囲まれた部分が10個のまとまりであることを確認し、各々の囲みの上に「10」を記した後、「これ、さ

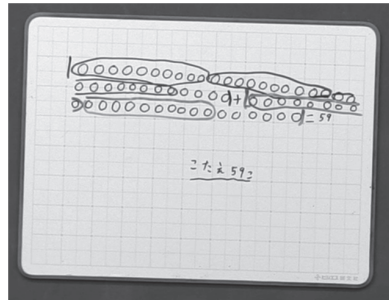


図2b-1：25の最初の10の数え間違いは、10のまとまりの確認の段階で直ぐに修正される

つきと比べてどう？」と発問し、児童は「数えやすくなった」「ちょっとだけ」などと反応した。「もっと分かりやすいのがある」という児童の発言を教師は捉えられなかったようで、教師は、児童の反応を見ながら「じゃあ、これでOKです、分かりやすい説明です、です?」「どう?これでいいか、付け足しをするか、どうする?それか、これを更によくするためにとか、そういう意見がある?」のような発問をした。

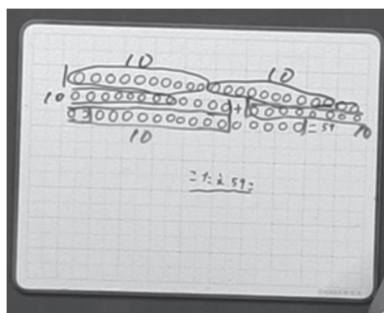


図 2b-2

(C) 最初の児童の図の改編 (2番目の児童の図)

次に指名された児童は、10で囲まれた部分を指差しながら「もう少し数を、十の位を大きくする」と発現したため、教師は「例えば?」と尋ね、児童は10のかたまりの幾つかを指しながら「1, 2, 3, 4, これ全部で50」と発言した。そこで、教師は、(児童の意図を図りかねたのか、あるいは抽象的な図への移行を期待してか) 新たにホワイトボードを取り出し、その児童の意図することを自身に描かせることにした。その児童は、最初の児童と同じような図を描こうとしたが、クラスから「同じだよ」という発言もあったためか、次のように図を書き直した。

教師は、2つの図を比べる中で「10のかたまり」という用語を導入しつつ、「これとこれ比べると、みんなどっち派?」をクラスに尋ねた。児童の反応は、2つ目の図の方が若干多かったようで、教師はその理由を問うと、ある指名された児童が「こっちだと、10を数えてから、答えが出るけど、[2番目の方は] もう10のかたまりがあるから、こっちの方が計算しやすい」という発言をした。

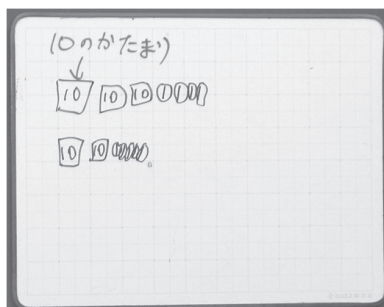


図 2c

(D) 2番目の図の児童の図の初期の修正

教師は、2番目の図の方が計算しやすいという発言の具体的な意味をクラスで共有するためか、「計算しやすいって、ホントに?... (中略) ...ちなみにさあ、これ [1番目の図]、さつきさあ、こっちの考えだと足し算記号あるじゃん。足し算、こっち [2番目の図] だと、どこにつける?」と発問して、最初に指名された児童が「+」の記号を図に付けてくわえる。また別の児童は、1番目と比較すると2番目には色が無くバラの区別がつかないことを気にして、教師が赤いばら全体と白いばら全体を囲むなどして、図は右のように修正された。

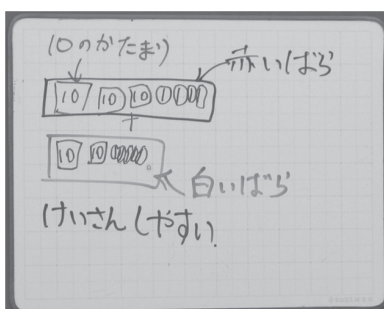


図 2d-1

ここでクラスからは、更なる付け足しを要求する挙手が複数出てくる。最初に指名された児童の考えは、「ちょっとこっち [白いバラ] 分かりにくいから、5のまとまりにする」という25の5を更にまとめるというものだった。この発言をきっかけに、クラスからは「上 [赤いバラの34] のまとめで4」という意見も出た。その児童は、「そしたらすごい分かりやすい...10が5個と4たす5で59」と発言し、クラスの多くも納得しているようだった。

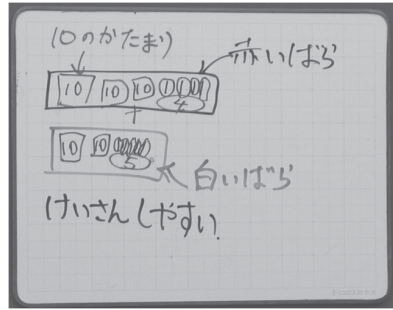


図 2 d-2

(E) 2 番目の図の児童の図の大幅な修正

クラスでの議論が収束しかけたとみて、教師は、図 1 の最下段のような図への修正に向けて、次のような一連のやり取りによる方向付けを与えた。

「1年生の時ってさあ、『合わせて』って見た時って、何か手でやってた？数図ブロックの時って、動き付けてやってた？ ... 『合わせる』ってどういう動きなの？ ... (中略) ... [ある児童の「ああ動かした、『ガッチャーン』って」という発言を受けて] ああ『ガッチャーン』ってやった。 ... 『合わせる』ってこの動きって [図 1 の最上段のように両手を体全面中央で合わせるような動き] やった？ ... さっき、こっちの考え [図 2 b-2] だと、長いから、どうしてもさあ、縦に長くなったじゃん。これ [図 2 d-2] だったらさあ、縦にせんでもよくない？横でガッチャーンできん？」

やや強引な方向付けではあったが、児童からは「できる。その緑 [図 2 d-2 の白いバラの四角囲み] を横にすると、横と横でガッチャーン」という発言を引き出すことができた。そこで、教師は、新たなホワイトボードを持ち出し、まずは図 2 e-1 を描き、その後、各部分が何を示すか、どういった操作 (何算) をするのか等を児童とのやり取りの中で明らかにしつつ、図 2 e-2 のように図を修正していった。

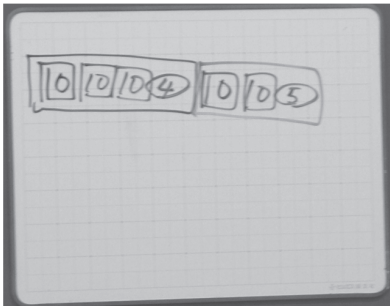


図 2 e-1

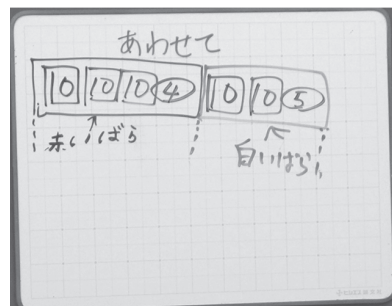


図 2 e-2

さらに、教師が、「ちなみに今、言葉で言ったんだけど、今、[図 2 d-2 と図 2 e-2 の赤いばらの 10 の各まとまりを対応付けながら] 10 と 10 と 10 でまとめたじゃん。で、何だっけ、[図 2



d-2の赤いばらの①と図2e-2の④を対応付けながら] 1, 1, 1, 1を4でまとめたじゃん。

[図2d-2と図2e-2の白いばらの10の各まとまりを対応付けながら] 10と10をまとめたじゃん。  
 [図2d-2の赤いばらの①と図2e-2の⑤を対応付けながら] 1, 1, 1, 1, 1をまとめたじゃん。ここまでまとめたら、まだまとまらん?という問いかけをクラス全体にすると、多くの児童が手を挙げ始めた。そして、ある児童の「[赤いばらの2つの10のかたまりを指して] この20を、もうまとめちゃっていいんじゃないかと思う」という意見をきっかけに、教師が図を描き換え(図2e-3)、さらに「ここ[赤いばらの20のかたまり]も、ここ[赤いばらの残った10のかたまり]も、10だから、合わせて30にしちゃえばいい」という意見が続き(図2e-4)、図は図2e-5~7のような形に修正されていき、最後に図2e-8のように教師がまとめた。

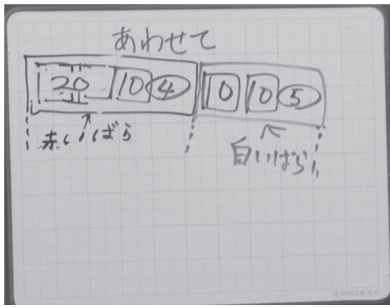


図2e-3

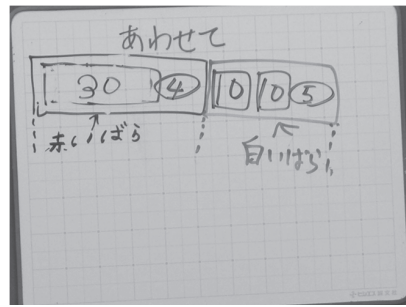


図2e-4

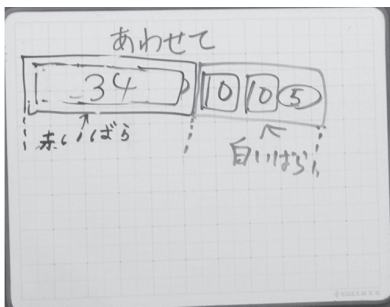


図2e-5

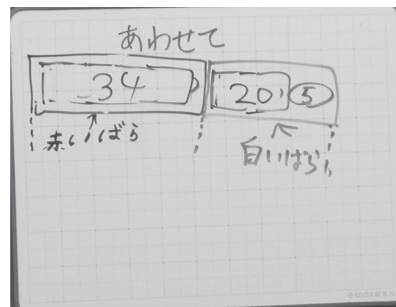


図2e-6

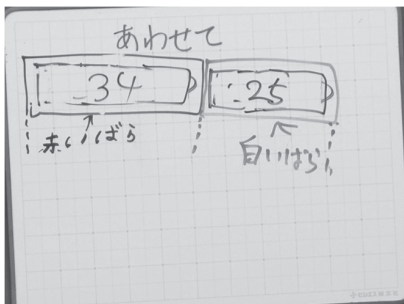


図2e-7

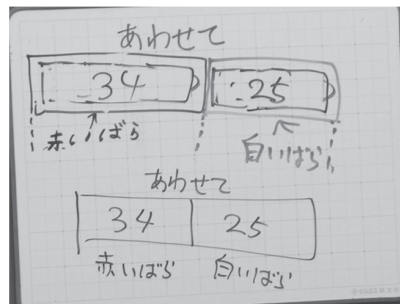


図2e-8

ただし、図2e-4から図2e-5に修正する意見が出た頃から、クラスの中には「反対」を表明する児童が出てきた。特に、図2e-7を描いた時には、クラスの中には、大声で「反対」と発言する児童が複数おり、図2e-8が導入されたときには、「全然分かりやすすくない」と発言する児童もいた。図2e-8を描いた後に指名された図に反対を表明したある児童の意見は、「34まで来ちゃったら、数がめっちゃ中途半端になるよ。こっち[白いばら]は、あまり中途半端じゃない気がする...キリがいいと思う、5、10、15、といくから、正しいところに、... 数えるのと同じような感じで...。」というものだった。この児童の発言の最初の部分で授業終了のチャイムが鳴ったため、教師は議論を打ち切り、図2e-8の下のような図を「テープ図」ということを告げ、授業は終了した。

### 3. 分析と考察

#### 3. 1. 図の抽象化は困難であったか？

授業では、最終的に、図1の上段の図(手続き図)から下段の図(加法構造の部分-全体関係を示す概念図)への抽象化まで辿り着くことができた(図2e-7,8)。授業スケッチ(C)から(D)の部分に滞りが見られるのは、冒頭の図2cで34と25が縦方向に配置されたからであって、確かに、これを横方向への配置に転換させることは困難であった(少なくとも、児童はその必然性を感じてはいなかった)。

しかし、1年生での学習場面を想起させ、図2e-1のように教師が図を描き直してからは、図2e-8に至るまで、教室での議論は非常にスムーズに進んだ。その意味では、図1の最下段のようなプリフォーマルな図を、教師が導入して授業を進めること自体は(そして、山田(2018)の結果が示すように、児童なりにそれを解釈・使用することも)、それほど困難なことではないのだろう。ただし、前章の授業のスケッチ(E)冒頭部のような教師からの強力な方向付けが示すように(また、次節で議論するように)、こうした図の抽象化を、問題解決的な授業で自発的に生起させることは難しい所であろう。

#### 3. 2. なぜ部分-全体関係を示す概念図は承認されなかったのか？

一方、授業スケッチ(E)の最終段落にあるように、最終的な図である図2e-8の2つの図が、クラスに全面的に受け入れられた訳ではない点には注目すべきであろう。特に、図2e-7以降は、図の修正に明確に「反対」を表明する児童が複数おり、クラスに全面的に承認された図は、おそらく(図2cから)図2e-4までであった。

この原因は、授業スケッチ(D)の最終場面での図2d-2に対する児童のコメント(下線部①②)と授業スケッチ(E)の最終場面での図e-7に対する反対理由(下線部②)との比較から判断できる。つまり、この授業場面で、児童にとっての図は、「計算の仕方や計算結果を説明する図」であり、その良し悪しは、「計算の仕方や結果が、見やすい・分かりやすいか否か<sup>註3</sup>」によって判断されていたからである(これは、図2cから始まるそれ以降の一連の図が、それまでの個数を全て○で描く図から10毎に○をまとめる形で修正されてきたという授業の文脈にも依存してい

る)。ところが、教師は、図2e-8の下段の図を「(どのような加減文章題の演算決定にも役立つような)問題場面の数量関係を説明する図」として授業を進めてきた。証明にも妥当化(納得)・説明・体系化・発見・コミュニケーションという5つの役割・機能があるが(deVilliers, 1990), 図にもその使用文脈に応じて機能的差異が生じるものである。そして、ここでの図は、大きくは「説明」のためのものとしては機能していたのかもしれないが(そしてそれが辛うじて授業に一貫した文脈を保たせていたのかもしれないが), 教師にとっては「問題場面の一般的な数量関係を表現するための図」として、児童にとっては「計算の仕方や結果を分かりやすく説明するための図」として、それぞれが異なる目的・機能が意識されて使われていたのである(表1参照)。結局、この説明対象の差異に起因する図の機能的(目的的)差異に対する気づきは全く表明されず、最終的な図はクラス全体からの承認も得られなかったのであろう。

表1：児童と教師が図に対して意図していた機能・目的の差異

	児童が承認した図	教師が意図した図
	図2c/2d-2/2e-4	図2e-8 下段
表現	手続き図的	概念図的
目的・機能	説明・理解	説明・記述
対象	計算の仕方・結果	問題場面の数量関係
評価基準	計算しやすい・分かりやすい・見やすい	単純性・簡潔性・一般性

### 3. 3. 部分-全体関係を示す概念図のかき方の指導の困難と方向性

2年生の加減の相互関係の指導、即ち、逆思考の加減文章題が登場する場面の指導では、図1の最下段のような加法構造における部分-全体関係を表すテーパー図の類を使って文章題の問題場面を記述し、そこから演算決定を図らせるような指導が一般的であろう。ところが、実際には、そうした問題解決場面で目的に適った図を描くことが難しいという指摘からか(例えば、文章題の始めに未知数が来る場合、その未知数に該当する部分をどのように描かせるかを考えてみれば、指導の困難性は容易に想像がつくだろう)、その指導に先立って、1年生でも解決可能な加減文章題の問題場面をテーパー図の類で表してみるという指導を提案しているのが、図1の教科書紙面であろう。そうした丁寧な指導の提案の意図は理解できるし、賛同も出来るが、上記の事例で見たように、実際の指導では幾つか注意が必要になる。

前節の分析の直接的帰結として先ず考えられることは、図を描く目的の共有と図の機能への着目が重要だ、という点である。本稿の授業では、授業スケッチに入る前の部分で説明したように、(教師による導入であったものの)「図を使って説明しよう」というめあてがクラスで設定された。ところが、何を説明するのか、何のために図を描くのかについては暗黙的なままで、授業の最終局面になっても、その齟齬は埋まらなかった(少なくとも、児童には教師の意図は伝わっていないかった)。これは、本時の「めあてを黒板で共有する」という段階が教師主導になったこ

とによる弊害であり、従来から指摘されている「授業を型に当てはめることの問題点」(正木, 1997,p.154)の1つでもあったのだろう。しかし、本時の目標として「加減文章題の問題場面の一般的な数量関係を表現するための汎用的な図を考えよう」といった類の授業目標に辿り着くためには、授業デザインにかなりの工夫がいると思われる。例えば、上記のような目標は逆思考問題の解決に苦勞するからこそ出てくる目標だと安易に考えて、最初から逆思考の問題に児童を直面させる考え方などは、そもそもそうした問題解決場面で解決に貢献する表現の構成が難しいからこそ図1のような紙面が登場してきたと想定されるのであるから、議論は一周回って元に戻るようなものである(単純に児童を困難に直面させればよいのだという指導方針には、堂々巡りの問題点がある)。

一方、本稿の授業のように、最終的に図が教師から導入され、図に対する賛否の議論が起こったのは、ある意味では、更なる議論のきっかけになり得るものであり、かえって良かったのではないか、という議論もあろう。加減の相互関係に関わる教科書紙面が未習の児童でも、(多分に、答えが暗算に頼れる程度であれば)相当数の児童が、加法構造の部分-全体関係を表現するテープ図の解釈に成功すると考えられるのであるから(山田, 2018), 図2 d-2 と図2 e-8 下段の図とを対置させ、計算の仕方を説明したり計算結果を考えたりする場合には前者が、そして、文章題の数量関係を説明する場合(例えば、「何が分かっている、何が分からないかを説明する場合」)などのような言い方になろう)には後者が有望だ、といった授業展開が次時にあれば、悪くはないとも思われる。『小学校学習指導要領解説：算数編』(文部科学省, 2018)の「加法と減法との相互関係」に関する解説部分には(p.111), 「数量の関係表現」と「計算」のように、2種類の表現の役割が明記されており、後者は専ら「(答えを出すための)式」として明示的に教師から導入され指導されるものだが、前者にあたる表現の指導は、それがテープ図に類する図の指導だとしても、式の指導ほど体系的なものではないし、そもそも「場面を表す図・式」や「数量関係を記述する図・式」等の機能を明示化する呼び名さえ一定していないのが現状である(例えば「図」も「式」も表現様式で、機能を明示するものではないし、「式」が専ら「答えを出すためのもの」として機能させられているのであれば、それも問題である)。その意味では、例えば、本稿の授業場面などでは、機会があれば、「答えを出すための式・図」「場面を説明するための式・図」「式を立てるための図」に類する名称など、低学年にも理解可能な機能を明示した表現の名称を積極的に開発・提案・採用していくことも、授業デザインを考える上では必要なことだと考えられるだろう。

## 5. おわりに

本稿では、加減の相互関係の指導に先立って行われる加法構造の部分-全体関係を示すプリフォーマルな図的表現(図1の最下段のテープ図)の導入の授業を分析し、そうした授業における注意点について考察した。

本稿の授業においては、図1の上段の手続き図に類する図から下段の概念図に類するテープ図



への抽象化は、教師の強力な方向づけもあって比較的スムーズに進行したものの（児童は児童なりの視点で図を修正して行くことができたが）、最終的なテープ図のクラス全体での承認は得られなかった。その原因は、図によって何を説明しようとしており（説明対象）、その目的は何なのか（図の機能・目的）に対する児童と教師の認識の齟齬に起因するようであった。授業では、時間的制約からその認識の齟齬の解消には至らなかったが、そもそも図1の最下段のような図の導入が「加減文章題の問題場面の一般的な数量関係を表現するための汎用的な図を考えよう」といった目標を志向するとすれば、授業デザインにおいては、加減の相互関係の指導の前にそうした目標を共有することの困難性に立ち向かわねばならないという問題点が指摘される。その意味で、本稿の授業のように、教師の強力な方向付けの下、図1の最下段の図を最上段の図から修正しながら導入し、最終的にはそれらの図の説明対象の差異に起因する図の機能的（目的）的差異について比較・検討するような授業も、授業デザイン上重要な選択肢になり得ると考えられた。ただし、現状の算数指導では、「問題場面を表す図・式」や「数量関係を記述する図・式」等の機能を明示化するような呼び名は一定しておらず、低学年の児童にも理解可能な機能を明示した表現の名称を実践研究において開発・提案していくことが、今後の研究として望まれる所である。

#### 注

[注1] 「プリフォーマルな表現」については、Webb, Boswinkel, & Dekker(2008), 清水・山田(2015), 山田(2016)を参照のこと。

[注2] 「手続き図」「概念図」の用語は、中原(1995)を参考にした。

[注3] 授業スケッチ(C)では、「実際に計算がしやすいか」という点が評価基準になっていたが、ここでは既に計算結果がクラスで共有されており、「計算結果が分かりやすい」という類の発言の中には、「計算がしやすい」という意味も含んでいるものと解釈した。

#### 引用文献

清水静海・船越俊介・根上生也・寺垣内政一他 55名(2015). 『わくわく算数2上』. 大阪市:新興出版社啓林館.

清水紀宏・山田篤史(2015). 「算数・数学の授業におけるインフォーマルな表現を捉える枠組み」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第20巻, 第2号, 89-102.

中原忠男(1995). 『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 東京:聖文社.

正木孝昌(1997). 「初等数学の授業構成とその改革」. 日本数学教育学会(編), 『日本の算数・数学教育 1997: 学校数学の授業構成を問い直す』(pp.153-162). 東京:産業図書.

文部科学省(2018). 『小学校学習指導要領(平成29年告示)解説:算数編』. 東京:文部科学省.

山田篤史(2005). 「式の役割と逆思考問題の指導の選択肢:加減逆思考問題の第2及び第3学年における正誤パターンの解釈」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第47巻, 39-44.

山田篤史(2016). 「数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 58 巻, 21-34.

山田篤史(2018). 「加減逆思考問題における児童の解答とプリフォーマルな表現によるその指導の方向性」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, 第 60 巻, 17-24.

deVilliers,M.(1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, **24**, 17-24.

Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School*, **14** (2), 110-113.

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：17K00968）の助成を受けたものである。