

数学的モデル化におけるメタ認知の役割

愛知教育大学 高井 吾 朗

[要約]本稿では、数学的モデル化におけるメタ認知の役割に着目し、数学的モデル化を対象としたメタ認知研究を概観し、「推進力」として機能することを確認した。一方、数学的モデル化においてメタ認知が成長することに困難性があることを示し、数学的モデル化過程に「練り上げ」を取り入れることにより、他者に認知的活動の根拠を求めメタ認知的経験を蓄積することを提案し、実践事例から検討を行った。

[キーワード] 数学的モデル化, メタ認知, 練り上げ, 他者モニタリング

1. はじめに

数学教育におけるメタ認知は、問題解決を進める「推進力」として数学教育の目標の一つに挙げられており、算数・数学の一般的な問題解決、特に自力解決におけるメタ認知の指導方法やそれらの評価方法が研究されてきている。

一方、問題解決研究においては、狭義の問題解決から広義の問題解決へと拡張され、現在は、広義の問題解決というより、「数学的モデル化」という研究分野として多数の研究成果が挙げられている。具体的には、数学的モデル化過程の考案、数学的モデル化を通じた実践研究、数学的モデル化能力についてなどが挙げられるであろう。

つまり、問題解決をフィールドとして研究が行われてきた数学教育におけるメタ認知研究は、問題解決研究の拡張に合わせて、その研究対象を拡張すべきであると考えられる。そこで、本稿では数学的モデル化に対するメタ認知研究がどの程度行われているのかを概観し、数学的モデル化におけるメタ認知の役割を同定することを目的とする。

2. 数学的モデル化を対象としたメタ認知研究

岩崎(2007)は、問題解決過程を現実の問題→記述された問題→解答→解決→現実の問題というサイクルと捉えており、その過程におけるメタ認知の役割を次のように示している。

数学の問題は現実のままではありえない。それは問題として意識化された内容であり、その程度にしたがって言語化され、記号化される。そしてこのように記録されれば、記述された世界で解答が図られる。その解答過程は、言語・記号に基づく判断の連鎖と考えられるから、論理・数学の介入する余地が生ずる。しかし、解答が解決になるというのは、現実との対応の問題であって、それは論理・数学を超えた経験の領域である。したがって(略)矢線部はいずれもメタ認知的営為を示唆しており、数学が「思考の道具」である限り、数学とメタ認知はコインの裏表の関係にある。

(岩崎, 2007, p.101)(下線部は筆者挿入)

現実の問題を「記号化」することにより記述された問題にし、記述された問題は「解法」を用いることで解答を得る。そして、解答を「文脈化」することにより解決を得、解決によって現実の問題が「確認」とされており、矢線部に「記号化」、「解法」、文脈化、「確認」という役割を与えている。

数学的モデル化過程の矢線部にメタ認知が関係していると裕元(2018)も指摘しており、島田(1977)も現実の世界の問題を数学の理論が適応可能な形に変容させるために必要な要素として、次のように指摘している。

条件・仮説の設定や、抽象化、理想化、単純化ということには、現実の世界についての知識とともに、その活動の主体がその時点までに学んでいる数学の理論が関係してくる。過去の同種の問題解決の事例を思い起こし、場面と似かよった特徴をもつものをさがし、その適用可能性を考える

(島田, 1977, p.14)

島田(1977)は、現実世界から数学世界へと移行するために、現実世界の文脈的知識と数学的知識が必要であると指摘した上で、それらの中でどの知識を用いるべきなのかを考えることが重要であると述べ

ている。つまり、メタ認知的技能をはたらかせることにより、それらの過程を行うということになる。

このように、数学的モデル化過程においても、メタ認知は「推進力」として機能するものと捉えている研究者が多いことがわかる。

3. 数学的モデル化においてメタ認知は成長するか

さて、メタ認知の成長にはメタ認知的経験が重要であり、「メタ認知の注入」は意味が無いどころか、メタ認知の成長に悪影響を与えることが指摘されている。メタ認知はメタ認知的技能とメタ認知的知識の側面があり、両側面の相互作用によって、成長するという考え方が一般的である。

具体的には、メタ認知的技能をうまくはたらかせるためには、モニタリングからコントロールの間で行われる自己評価のために、メタ認知的知識が必要になる。そして、メタ認知的技能がはたらき成功もしくは失敗した経験の蓄積によって、メタ認知的知識が増えたり、変容したりするということである。

狭義の問題解決において、問題を解決できたかどうかは判断が付きやすく、自身の認知的活動が適切であったかどうかを振り返ることが比較的容易に行えるため、こうした経験の蓄積は起こりやすい。また、算数、数学科のカリキュラムの特性上、前時に行った問題解決において用いた知識・技能、及びストラテジーを既習事項として参照することが多いため、メタ認知的知識として内面化しやすいということになる。

では、数学的モデル化過程においても、同じことが言えるであろうか。数学的モデル化過程を1周回することを想定すると、まず行わなければならないのは、現実の問題を数学の問題へと置き換える「記号化」であり、「最も中心的であり、しかも困難な」(三輪ら, 1983, p.253)活動である。

何が困難な点なのかというと、西村(2012)は、社会の事象を数学の対象に変えるために、「仮説を立てる」、「仮定をおく」、「変数を取り出す」、「変数を制御する」という力が必要であると述べており、一言で「記号化」と言っても、その中に様々な能力が求められるのである。他にも島田(1977)が述べているように、記号化するためには、現実的文脈についての知識、数学的知識が必要となるが、さらに重要なことは、作成した数学の問題が解決可能なものになっているかどうかを判断することである。しかし、記号化の時点で判断することは数学的モデル化の初学者では困難であり、「とりあえずやってみよう」、「無理そうなら、無理矢理数値を変更しよう」という無計画な活動を行うことになる。

正に、三輪ら(1983)が指摘しているように、記号化は「最も中心的であり、しかも困難な」(p.253)活動であり、メタ認知という観点から見ても、自身の認知的活動が適切であったかどうかの判断が非常に困難であり、考え方の何が正しかったのか、何が間違っていたのかということが判断できず、メタ認知的経験として蓄積しにくいと言える。

記号化におけるメタ認知の成長の困難点を指摘したが、このような困難点は「文脈化」、「確認」の過程においても、同様のことが言えるであろう。文脈化においては、得られた解答がどのような意味をもつかを判断し、その上で現実的な文脈についての知識と照合する必要がある。つまり、この時点でも、「本当に正しいのか」、「間違っているかどうかわからないから修正ができない」ということから、「とりあえずやってみよう」というモニタリングとコントロールを取る可能性が高い。

そして、「確認」こそが、これまでの記号化、文脈化が正しかったかどうかを判断する基準となるが、「確認」が不可能に近い現実的な問題も多く、逆に、「確認」が可能なものは、すでに明らかになっているものか、モデル化しなくても実際に試せばわかるものとなり、問題として提示しにくい。

以上のことから、数学的モデル化過程の各段階(解法を除く)において、メタ認知をはたらかせにくい状態が想定され、はたらかせることができたとしても、振り返りを含めたメタ認知的経験を得ることが困難であるといえよう。

勿論、最初からうまくいくわけではないため、何度も数学的モデル化過程を経ることが重要であるとも言えるが、毎回の課題に関連性が無ければ、既習事項として何を用いればいいのかといった判断ができず、最終的には「数学的モデル化の勉強は意味が無い」、「普通の数学の授業の方が良い」といった否定的なメタ認知的知識を定着させることに繋がりがかねない。また、カリキュラム上の問題から、どれだけの時間が取ることが可能なのかという根本的な課題も抱えている。

4. 数学的モデル化におけるメタ認知の指導方法

数学的モデル化におけるメタ認知の育成における困難点は、自身の認知的活動の正しさを示す根拠が無い、もしくは少ないということである。では、自身に根拠が無いとすれば、どこにその根拠を求めるかというと、他者である。

メタ認知の育成において、他者の重要性を述べている研究者は多い。例えば、学習者のメタ認知は教師との相互作用により内面化していくということから、メタ認知を「内なる教師」(重松, 1990)呼ぶこともある。またペアによる問題解決を行うことにより、解決中のメタ思考を表出させやすくするだけでなく、他者からの指摘や他者への説明のために、メタ認知をはたらきやすくさせるという指導も行われている(清水, 2007)。他にも、社会的相互作用主義の立場から、教師と学習者、学習者同士の相互作用において、メタ認知の成長に差異があることを指摘しているものもある(岩合, 1990)。

このことから、数学的モデル化の各過程において、他者との交流を図ることにより、メタ認知の成長を促す指導法が考えられるが、単に他者に報告するだけでは、自身の根拠とはならない。自身の考えを提示した上で、他者から納得や批判を受けることで、自身の考えに従って次に進めたり、考え方を修正したりする。逆に他者の考え方をすることで、考え方を取り入れたり、自身の考え方の意味を捉えたりすることもできる。つまり、問題解決型授業で見られる「練り上げ」を各段階に入れることにより、そのコミュニティにおける妥当性を持った解決方法として認識することができる。と考える。

西村(2012)は、数学的モデル化を遂行する力の概念規定を、Wild & Pfannkuch (1999)の枠組みを用いて行っている。その中で、数学的モデル化過程の各矢線部において「次元3 批判的サイクル」(p.96)が機能することを述べており、本稿の提案は、この批判的サイクルを、練り上げを通して協同的に行うことを示している。

さて、ここまででは数学的モデル化におけるメタ認知の育成について、他者との協同解決を提案してきたが、自身以外のものを他者とするならば、周りの環境もまた他者であり、そこにはパソコンなども含まれると考える。例えば、自身の仮説を立て、変数を取り出したが、その変数をどのように扱えばいいかわからず、パソコンを用いて、適当にグラフの作成を行ったとする。数学的知識の獲得という目的で行われた授業であれば、意味のある行為とは言えないが、数学的モデル化能力の育成という目的であれば、自身の仮説の正しさを確かめる行為として、自身の根拠を得る活動と言える。つまり、ICTやプログラミングというものを、思考の補助として捉えることにより、認知的活動をを進める根拠をそこに求め、サイクルを回すということである。

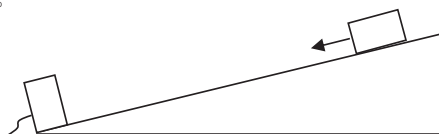
結局のところ、数学的モデル化過程を経るためには、他者(環境)が必要となり、自身だけでなく、他者を含めたコミュニティ内における根拠を自身のメタ認知的経験として蓄積していくことが、メタ認知の育成において重要である。と考える。

5. 環境を含めた数学的モデル化の実践事例

次に、数学的モデル化の実践を見ながら、そこで起こっているメタ認知のはたらきを考察していきたい。なお、実践の概要は以下のとおりである。

対象:国立大学附属高等学校1年 数学□ 実施時期:2017年12月7日8日11日12日

課題:物体が斜面を滑り落ちるとき、一次関数(等速直線運動)になるときはあるのだろうか。あるとすれば、どのような条件だろうか。



授業計画:4時間構成

- 1時:超音波距離センサの扱い方を学び、グラフから運動を読み取り体で表現する。
- 2時:物体が斜面を滑らせる運動がどのようなグラフになるか予想し、実験から二次関数とみなし、定式化をする。
- 3時:条件を変えたときの動きを予想し、実験を行い、予想の検証を行う。
- 4時:摩擦がある状態で、等速直線運動になるときとその条件を考察する。

今回の実践における特徴は、超音波センサを用いて物体の距離がiPad上にグラフとして示されるということの思考の補助として扱っている点と、グループ学習による活動を中心に授業を進めたということである。

ある。1 時では機材の扱い方を習得し、2 時では斜めにした板の上からティッシュ箱を滑らせ、距離センサを用いて、様々なグラフを読み、そこから関数を求める活動を行っている。3 時は、加速のグラフが図 1 のようになっていることから、図 2 のグラフになるにはどのような動きをすればよいかが課題となった。

実際に速度センサを用いたグラフは、動かす前と後も距離を読み取るため、課題プリントには、図 3 のグラフが提示されている。

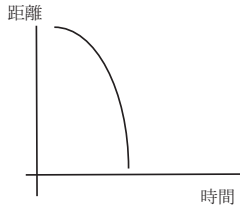


図 1 加速

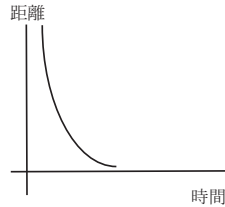


図 2 課題

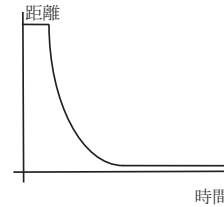


図 3 課題プリントに提示されたグラフ

また、2 時に用いた実験装置は自由に使ってよいという指示が出され、仮説を立てた後、もしくは試行錯誤のために実験を行う流れになっている。本節では、3 時のグループによる実験段階におけるグループ活動から、メタ認知を特定していく。

グループは、男4女1の5名グループであり、女子生徒(A)が中心となって、解決に向けて取り組んでいた。まずそのグループで出た考えとして、図 3 をそのままの速さと見立て、加速していると予想していた。しかし、速度センサを斜面の下に置き、上からティッシュ箱を滑らすと図 1 になるため、どのような動きになるかは推測できていなかった。

実験は、生徒 A 以外の生徒から出た案を用い、上から滑らせるのではなく、下から上に滑らせる方法で行った。その結果失敗し、生徒 A は「段々遅くなり早くなる」と指摘している。そこで生徒 A は速度センサを下に置くのではなく、上に置くことを提案している。図 2 が図 1 をひっくり返しているというところから、「今回も加速のグラフであり、前回と同様の現象が起きているが、測定位置が違うのではないか」と前時の知識を自己評価に用いて、「センサを上には置けばよい」とコントロールしたと考えられる。

そして、センサを上置き実験した結果、iPad で測定していた男子学生(B)から「え、なんか逆になった」と言われ、そのグラフを生徒 A が確認した(図 4)。しかし、生徒 A はその結果を受けても、再度同じ実験を行い(斜度を下げる)、そこで、「全然違う」と自分の仮説が間違っていたことを確認している。

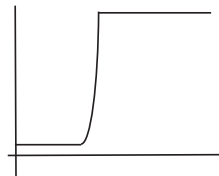


図 4 1 回目の実験結果のグラフ

この時点での生徒 A の仮説は、下から上への投げ上げの結果から、「早くなれば、提示された課題のグラフが出来上がる」というものになっており、それを検証するための実験モデルとして、センサを斜めにした台の上に置き、センサの至近距離から下に向かって滑らせるというものを提案している。この実験モデルを生徒 A がどのように発想したのかは不明だが、実験するまでもなく、2つの矛盾を指摘することができる。一つは、「早くなる」という仮説に対して、単にティッシュ箱を板の上を滑らせれば減速するという点である。もう一つは、課題プリントに提示されたグラフは、時間と共に距離がセンサに近づいていることから、センサから離れるような操作をすることは真逆の行為になる点である。

しかし、生徒 A は自身の実験モデルが自身の仮説と矛盾していることに、iPad 上のグラフを見るまで気づいていない。さらに、「全然違う」と生徒 A はつぶやいているが、生徒 A は、何が違うのかすら、判断できていない。このことから、生徒 A は、自身の認知的活動に対して、メタ認知をはたらかすことができず、思いついた方法を自分で思考実験することなく、実際に行ってしまったと考えられる。

この状況に対して、生徒 A はすぐにグループ内での協議を行っている。つまり、生徒 A は自身の仮説

に対する妥当性を他者に求めたということである。その時の協議の内容は以下のとおりである。

1. A: どういう形になればいいんだ？わかる？
2. B: どんどん遅くなればいいのか。
3. A: どんどん遅くなればいいのか？
4. : (周りがうなづく)
5. A: 遅くする方法は？
6. C: 摩擦...
7. A: 摩擦？
8. B: 摩擦は無理じゃないの？
9. A: いやいやわかんないよ
10. B: だってもう摩擦じゃん、これ(板を撫でる)
11. D: いや、これ、平行にする(板を斜面ではなく、机の上に置き、水平にする)

上記の会話1～5の間に、生徒 A は自身の仮説を「速くなる」ことから「遅くなる」ことに変化させている。このことから、会話の中で生徒 A は、自身の持つ「速くなる」という仮説に対してモニタリングを行い、他者との会話の中から得た情報を元に自己評価を行い、「遅くなるということ考えよう」とコントロールをはたらかせていることがわかる。つまり、自身では判断できなかった認知的葛藤を、他者の意見を元に解消しているということである。

生徒Aは、他者から「加速ではなく減速(遅く)」、「摩擦が関係している」という仮説を得ることで、認知的活動を再開し、グループで実験を再開している(この時点での実験モデルは、センサを板の下部にセットし、上から滑らせるというものである)。しかし水平にした板の上を滑らせても図3にはならず、グループ全体で動きが停滞する。そして、生徒Aは「これさ、できるかできないかの問題ならできないんじゃない？」と結論付けている。

生徒 A は、他者との協議を通して新たな仮説を得ることができており、実験による検証に自信を持っていたと考えられる。しかし、実験結果が芳しくなく、「速くしてもダメ、遅くしてもダメ」という結果を享受している(実際には、速くするための実験は行っていない)。つまり、「自分たちの仮説は間違っているのか」というモニタリングに対して、iPad のグラフを自己評価に用いて、「これ以上の実験は無意味だ」というコントロールを行ったと考えられる。その結果として、「そもそも出来ない課題を提示された」という結論を得たと考えられる。

しかし、他のグループ員(生徒 B)が実験を行っているのを見て、再度生徒 A は実験に参加している。そして、生徒 A は生徒 B と実験を繰り返し、iPad に表示されるグラフから、「やっぱり遅くなればいいのかじゃない？」と再度仮説を立てている。一度は諦めた実験を再度試みるという認知活動の変化は、生徒 B の説明や実験を通して、図 5 の iPad 上のグラフを見たからだと考えられる。

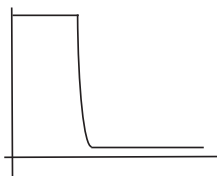


図 5 再実験時の結果のグラフ

つまり、生徒 A は実験を通して「仮説は間違っている」という認識に対してモニタリングを行い、実験結果と生徒 B の説明を元に自己評価を行い、「やっぱり減速であってるから、実験を続けよう」というコントロールをはたかせたと考えられる。

そして実験を続け、最終的には、生徒 B が iPad のグラフの縮尺を変更できることに気づき、グラフを拡大した状態で、実験を行った結果、図 3 のグラフが表出している。生徒 B は 1 回目の実験のときから、「遅くなる」ことが正しいと考え、実験を続けている。生徒 A がセンサを上にも置くこともあったが、その後すぐに実験モデルを修正し、正しい実験モデルを作り上げ、実験をやめることなく最後まで続けている。つまり、生徒 B は自分の考えに対して確信を持っており、生徒 A のように自身の仮説をモニタリングするのではな

く、表示されているグラフをモニタリングしたと考えられる。そのモニタリングの結果、「グラフ表記に問題がある」とコントロールし、実験することから iPad の操作へと認知的活動を变化させたと考えられる。

実践事例に対する考察

今回の実践事例から見た、メタ認知に関係する要素は以下のとおりである。

- ・生徒 A の 1 回目の実験結果の行動から、未知の問題に対して、自身の認知的活動に対するメタ認知的技能がはたらきにくいこと。
- ・自身の考えを補うために、他者の意見を自己評価において参照すること。
- ・自己評価において参照されるものは、メタ認知的知識だけでなく、他者の意見や環境（今回の場合は iPad のグラフ）も含まれること。

このことから、数学的モデル化活動を進めるためには、他者との協働解決や環境の整備が重要であるということ、そして、自分一人では解決できない場合でも、他者との相互作用を通して進めることが可能であることが示唆された。

しかし、今回は生徒 A の活動を中心に実践を見てきたが、生徒 B がどのタイミングで自分の仮説が妥当であると判断したのかは判断できず、同じ課題に対して、生徒 A と生徒 B の活動や思考の変容に何故差が生まれたのかも、判断できない。また、数学的モデル化においてはたまたまかと思えた、「自分の考えの妥当性の検討」を、生徒 B が、どのように行ったのかは今回の実践では判断できない。

6. おわりに

本稿では、数学的モデル化における役割として、「推進力」が挙げられ、その学習過程において、練り上げを取り入れることにより、自身の認知的活動に対する根拠を他者に求めることを提案した。そして、実践の分析から、その可能性が高いことが示唆された。

しかし、実践結果から、一人でも自分の仮説に対して確証を持ち、認知的活動を行うことが可能な生徒がいることが明らかとなり、その生徒が何故一人で解決へと導くことができたのかは明らかになっていないため、今後の課題としたい。

[文献]

- 岩合一男: 数学教育におけるメタ認知にかかわる認識過程の総合的研究, 平成元年度科学研究費補助金(一般研究 C) 研究成果報告書, 1990.
- 岩崎秀樹: 数学教育学の成立と展望, ミネルヴァ書房, 2007.
- 重松敬一: メタ認知と算数・数学教育: 『内なる教師』の役割, 平林一榮先生頌寿記念出版会編『数学教育学のパースペクティブ』, 聖文社, 76-107, 1990.
- 清水美憲: 算数・数学教育における思考指導の方法, 東洋館出版社, 2007.
- 島田茂: 算数・数学科のオープンエンドアプローチ: 授業改善への新しい提案, みずうみ書房, 1977.
- 西村圭一: 数学的モデル化を遂行する力を育成する教材開発とその実践に関する研究, 東洋館出版社, 2012.
- 裕元新一郎: 統計教育の研究の立場からみた数学的モデリングサイクルのあり方, 日本数学教育学会第 6 回春季研究大会論文集, 167-172, 2018.
- 三輪辰郎, 長野東, 島田和昭, 磯田正美: 数学教育における数学的モデル化過程, 日本科学教育学会第 7 回年会論文集, 253-254.

[付記]

本稿は、日本科学教育学会第 42 回年会(信州)において発表した内容に加筆修正を加えたものである。

[謝辞]

本研究の一部は科研若手研究(B) 17K14037 の助成を受けて行った。また、実践データを提供していただいた愛知教育大学附属高等学校の天羽康先生に深く感謝いたします。