

高校訪問授業の記録

15 ゲームを数学的に考える

愛知教育大学 小 谷 健 司

序

私は今年 9 月 20 日に 静岡県立静岡東高等学校 で模擬授業を行いました。この文書は、その授業の内容を記録するものです。

同校での模擬授業は、文学部、教育学部など各学部の代表が 60 分の授業を前後半 1 コマずつ行い、2 年生がその中からあらかじめ選んだ前後半 1 コマずつを受ける形式でした。私は教育学部の代表で、前半 36 名、後半 32 名の生徒さんに授業をすることができました。私は、はじめの 10 分程度で教員免許、教員採用試験、愛知教育大学のことなどを話し、残りの 50 分を「ゲームを数学的に考える」と題して話をしました。次節以降、この 50 分で話した内容を書きます。

15 ゲームとは

まず、「今日の授業の目的は、学校で学ぶ数学だけが数学じゃない。私たちの身のまわりには数学がいっぱいあることを理解することです」と話してから本題に入りました。

この授業では 15 ゲームを扱いました。このゲームは、右の写真のように正方形のケースに 15 枚の正方形のピースが入っていて、空白の部分にピースをスライドさせて動かせます。数字がでたらめに並んだ状態から始め、ピースを動かして 1~15 の数字を小さい順に並べ替えるゲームです。このゲームを知っているか生徒さんたちに尋ねたところ、少数派でしたが知っている人もいました。

写真の 15 ゲームはプラスチック製で、ネット通販で 200 円程度で販売されていました。これを生徒さんの人数分用意し、授業に挑みました。15 ゲームを楽しむには、スマホのアプリを使う方法もあります。スマホのアプリは、実物と同様に指で操作でき、実物のようにピースが外れてしまうことがないので、良いタイムを出すには最も良い方法です。



このゲームは 1874 年頃にアメリカで考案され、1889 年頃に日本に輸入されたそうです。日本で初めての世界的数学学者と呼ばれる 高木貞治 (1875–1960) も少年の頃、このゲームで遊んだそうです。（今年 3 月、高木の故郷である岐阜県本巣市にある 高木貞治記念室 を訪れた際、展示パネルにそのように書いてあるのを見つけました。）

まず、15 枚のピースをでたらめに並べます。この時の配置を初期配置と呼びます。15 ゲームでは、すべての初期配置が左下図のような順序通りの配置にできるわけではありません。初期配置の半数はそのようにできますが、残りの半数はそうではありません。（どうしてそうなるのかは、あとで考えます。）残り半数の初期配置は、右下図の配置にすることができます。この文書では、左下図を **14-15** の標準配置、右下図を **15-14** の標準配置と呼ぶことにします。このゲームの目標は、でたらめな初期配置から始めて、どちらかの標準配置にすることです。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

↔↔

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

ここまで説明した後で、生徒さんたちに 10 分間、15 ゲームに挑戦してもらいました。挑戦してもらう前に、「やり方は自由ですが、はじめに 1 行目、次に 2 行目、最後に 3, 4 行目を完成させるとよいと思います」と誘導しました。

1	2	3	4
*	*	*	*
*	*	*	*
*	*	*	*

⇒

1	2	3	4
5	6	7	8
*	*	*	*
*	*	*	*

⇒

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	*	*	

考察

生徒さんたちのできぐあいはさまざまでした。5 分程度で終わる人もいれば、10 分たってもできない人もいました。できなかった人の多くは、上 2 行は完成させたが、下 2 行は完成できなかったようでした。そこで、下 2 行を完成させる考察に入りました。

上 2 行が完成したとして、下 2 行を完成する手順を考えます。そのために、下 2 行の数字の並び順を数列で考えることにします。下 2 行に 9~15 の数字がでたらめに並んでいるとします。この数字の並びを、次ページの図のように 9 から始めて時計回りに読んでできる数列を考えます。ただ

し、空白は飛ばします。

14	12	10	
13	9	15	11

$\Rightarrow 9, 13, 14, 12, 10, 11, 15$

このような数列の作り方に慣れてもらうため、次の問題を解いてもらいました。

例題 1. 次の配置からできる数列を答えてください。

(1)	13	12		10
	11	15	14	9

(2)	15	10	14	11
	13		9	12

(3)	14	9	15	12
	10	13		11

(4)	12		9	14
	11	10	15	13

解答. (1) 9, 14, 13, 15, 10, 11, 12 (2) 9, 14, 15, 11, 13, 12, 10

(3) 9, 13, 15, 10, 14, 11, 12 (4) 9, 15, 12, 11, 13, 10, 14

配置から数列を作る方法を理解してもらったあとで、次の問いかけをしました。

課題 1. ピースを 1 マス動かすと、数列にはどのような変化が起こりますか？ 下の例を参考に、規則を見つけてください。

(例 1)	12	15	11	14	9, 12, 15, <u>11</u> , 14, 13, 10
	9	10	↓	13	9, 12, 15, 14, 13, <u>11</u> , 10
(例 2)	9		14	12	9, 14, 12, 11, 15, <u>13</u> , 10
	10	↑	13	15	9, <u>13</u> , 14, 12, 11, 15, 10

上の課題で期待した答えは「ある数字が右または左に 2 つまたは 4 つ飛ぶ」でした。しかし、私はここでちょっと失敗しました。私が授業で与えた 2 つの例がともに「右に 2 つ飛ぶ」例だったので、生徒さんたちからは「右に 2 つ飛ぶ」以外の答えが出てきませんでした。（その反省を踏まえ、上の課題では 2 つめの例を「左に 4 つ飛ぶ」ものに変更しました。）

ピースを動かすことによって数列に起こる変化は「偶数個飛ばし」でした。逆に、どんな「偶数個飛ばし」もピースを動かすことで実現することができます。したがって、15 ゲームの下 2 行を並べ替える問題は、数列を「偶数個飛ばし」で変形して、正しい順序に並べる問題に変わりました。それを理解するために、次の例題をやりました。

例題. ピースを動かすことにより、数列内の数字を前または後ろに「偶数個飛ばし」で移動させることができます。この事実を使って、次の配置を標準配置に並べ替えてみましょう。

9, 14, 13, 15, 10, 11, 12	\Rightarrow	9, 10, 11, 12, *, *, 13
12 9 14		9 10 11 12
11 10 15 13		13 * *

解答例. 次のような変形によって解くことができます。

9, 14, 13, 15, 10, 11, 12	\Rightarrow	9, 14, 10, 13, 15, 11, 12
12 9 14		9 14 \uparrow 13
11 10 15 13		12 11 $\textcircled{10}$ 15
初期配置		
\Rightarrow	9, 10, 13, 15, 11, <u>14</u> , 12	\Rightarrow 9, 10, <u>11</u> , 13, 15, 14, 12
9 $\textcircled{14}$ 10 13		9 10 \uparrow 13
12 \downarrow 11 15		12 14 $\textcircled{11}$ 15
10 を 9 の後にする		
\Rightarrow	9, 10, 11, 13, <u>12</u> , 15, 14	\Rightarrow 9, 10, 11, 12, 15, <u>13</u> , 14
11 13 \uparrow 15		10 11 $\textcircled{13}$ 12
10 9 $\textcircled{12}$ 14		9 14 \downarrow 15
12 を 11 の後にする		
\Rightarrow	9, 10, 11, 12, <u>14</u> , 15, 13	\Rightarrow 9, 10, 11, 12, 15, <u>13</u> , 14
11 12 \uparrow 15		10 11 $\textcircled{13}$ 12
10 9 $\textcircled{14}$ 13		9 14 \downarrow 15
13 を最後にする		
		\Rightarrow 9 10 11 12
		13 15 14
時計回りに回して完成		

私はここでもちょっと失敗しました。上の解答例を書く際に、数列だけを書いて、それに対応するピースの配置を書かなかったのです。生徒さんからは、「偶数個飛ばしの原理はわかったが、それをゲームの中でどう実現するのかわからなかった」と言われました。(その反省を踏まえ、上の解答例では数列の下にそれを実現するピースの配置を書いてみました。)

例題で解法を示した後、生徒さんたちに次の問題を解いてもらいました。

問題 2. 次の配置を「偶数個飛ばし」操作を使って、標準配置に並べ替えてみましょう。

(1)	9, 14, 15, 11, 13, 12, 10 13 12 10 11 15 14 9
-----	--

(2)	9, 13, 15, 10, 14, 11, 12 15 10 14 11 13 9 12
-----	--

解答例。数列のみを示します。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 9, 14, 15, 11, 13, 12, 10 \Rightarrow 9, 14, \underline{10}, 15, 11, 13, 12 \\
 & \Rightarrow 9, 10, 15, \underline{14}, 11, 13, 12 \Rightarrow 9, 10, \underline{11}, 15, 14, 13, 12 \\
 & \Rightarrow 9, 10, 11, 15, \underline{12}, 14, 13 \Rightarrow 9, 10, 11, 12, 14, \underline{15}, 13 \\
 (2) \quad & 9, 13, 15, 10, 14, 11, 12 \Rightarrow 9, \underline{10}, 13, 15, 14, 11, 12 \\
 & \Rightarrow 9, 10, 13, \underline{11}, 15, 14, 12 \Rightarrow 9, 10, 11, 15, \underline{13}, 14, 12 \\
 & \Rightarrow 9, 10, 11, 15, \underline{12}, 13, 14 \Rightarrow 9, 10, 11, 12, 13, \underline{15}, 14 \\
 & \Rightarrow 9, 10, 11, 12, 15, 14, 13
 \end{aligned}$$

生徒さんたちの多くが上の問題を解けたように見えました。しかし、私の意図どおり計画的に解くのではなく、行き当たりばったりで解いているように見えました。私の説明が足りなかったと反省しました。

例題 2 で見たように、15 ゲームは「偶数個飛ばし」で数字を並べ替えるゲームと考えることができます。このことを頭に入れて 15 ゲームに挑戦すると、早く解くことができます。「だからボクは 1 分以内でできるよ」と自慢しておきました。最後に、次の課題を生徒さんたちに与えました。

課題 2. なぜ 15-14 の標準配置は 14-15 の標準配置に並べ替えることができないのでしょうか？ 説明してください。

上の課題を隣の人と話し合ってもらいましたが、「偶数個だから 1 つは無理」という声が方々から聞こえてきました。その通りです。より詳しく書くと下のようになります。

解答例. 15-14 を 14-15 にするには、14 が 15 を飛び越える必要があります。つまり、「1 個飛ばし」です。しかし、ピースを動かすことによって起こる数列の変化は「偶数個飛ばし」だけです。偶数を何回足しても奇数にならないように、「偶数個飛ばし」を何回繰り返しても「奇数個飛ばし」にはなりません。これが 15-14 を 14-15 にできない理由です。

課題 2 を終えたところでちょうど時間となりました。最後に、「数学は教科書の中だけにあるものではありません。私たちの身のまわりに数学はいっぱいあります。みなさんも数学を楽しんでください」と締めくくりました。数日後、高校から生徒さんたちの感想が送られてきました。私の授業はおおむね好評だったようです。

補足

課題 2 の解答例を読んで疑問を持った人がいると思います。上の解答例は、上 2 行を動かさない条件で、15-14 を 14-15 にすることができないことを説明しているにすぎません。では、上 2 行も動かせば、15-14 を 14-15 にすることができるでしょうか？もちろん、できません。それを簡単に説明します。ゲーム盤上に並んだ 15 個の数字を下図のように読んで数列を作ります。

5	11	8	2
13	4	12	7
1	6	14	9
15	3	10	

⇒ 5, 11, 8, 2, 7, 12, 4, 13,
1, 6, 14, 9, 10, 3, 15

すると、ピースを動かしたときにできる数列の変化はすべて「偶数個飛ばし」です。したがって、ピースを何度も動かしても「1 個飛ばし」を実現することができません。

私の授業では「偶数個飛ばし」「奇数個飛ばし」ということばを使いましたが、これらを数学の専門用語で表現すると「偶置換」「奇置換」です。この概念は、大学 1 年生の必修科目として設定されることが多い「線形代数学」で行列式を定義するときに用いられるので、聞きおぼえのある人が多いと思います。15 ゲームは、置換の偶奇を学ぶ良い教材でもあります。置換の偶奇による証明は、15 ゲームが登場して数年後には学術雑誌に掲載されています ([1])。

参考文献

- [1] W. Johnson and W. Story, Notes on the 15 Puzzle, Amer. J. Math. 2 (1879), 397–404.
- [2] S. Muralidharan, The Fifteen Puzzle – A new approach, Math. Magazine 90 (2017), 48–57.
- [3] Wikipedia, 15 Puzzle, <https://en.wikipedia.com>, 2019 年 11 月 8 日閲覧.