イプシロン　2019. Vol.61，153 － 160

パターン一般化に焦点を当てた代数的思考を促す指導に関する研究

<修士論文要旨>

愛知教育大学大学院　教育学研究科
数学教育専攻　数学科教育学領域
217M062　**五　味　雅　貴**

論文構成

第１章　本研究の目的と方法

藤井 & Stephens（2002）は文字式の困難性の原因として「小学校算数と中学校数学との乖離をいわば暗黙に承認し，それぞれの指導が展開されてきた実態があると思われる」（p.163）と述べている。そうした中，算数学習段階から積極的に代数的推論を促進させようとする早期代数指導が注目されているが，その蓄積は未だ十分でない上に，代数的推論に関する統一した見解は未だ確立されていない。

そこで本研究は，算数学習における代数的思考を促す指導を追究することを目的とし，まず，代数的思考とはどういっ

た思考であるかを明らかにする。それから，代数的思考の一要素であるパターン一般化に注目し，その様相を捉えるためのモデルを構成する。そして，先行研究で指摘されているパターン一般化の困難性をより精緻に捉え直し，その困難性克服に資する指導行為を検討する。

第２章　代数的思考・推論に関する先行研究

2.1.　代数的思考・推論の捉え方

Blanton & Kaput（2005）が示す代数的推論の内包的定義から，代数的推論の本質は「一般化すること」と「一般化を表現すること」の２点であると解釈できる。また，Blanton & Kaput は，代数的推論とは，以下の３カテゴリがあるものだと外延的に定義している。

- (A – E) 一般化算術としての代数的推論
- (F – J) 関数的思考としての代数的推論
- (K – M) 一般化や正当化についてのさらなる代数的推論

2.2.　先行研究の整理及び本研究の焦点

本研究は，代数的思考の一要素であるパターン一般化に焦点化する。

第３章　パターン一般化に関する先行研究

3.1.　パターン一般化とは

本研究では，パターン一般化を「個々の特殊なパターンの観察から規則や数量関係を捉え，任意の項でも利用できるように一般化する思考・推論」と定義した。

3.2.　我が国におけるパターン一般化の指導

我が国におけるパターン一般化の指導は，古くから一貫して第４，５学年の「変わり方しらべ」で指導されていることが明らかとなった。

3.3.　パターン一般化プロセスに関する先行研究

本研究では，パターン一般化問題の解決過程をパターン一般化プロセスと表現する。先行研究で示されているパターン一般化プロセスは図３－１であった。

<table>
<tr><th>石田（2002）</th><th>Radford（2008）</th><th>Amit & Neria（2008）</th></tr>
<tr><td>段階１
連続的に並べられている図から，変化などの規則性に気づく。</td><td>段階１
いくつかの特殊から気づいた共通性を把握する。</td><td rowspan="2">段階１
再帰的－操作的－局所的
パターンの中から類似性を見つけ，引き続く項に適用する基本的な規則を定義する。</td></tr>
<tr><td>段階２
連続的に並べられた図の構造に気づき，数量関係を捉える。</td><td>段階２
すべての引き続く項に共通性を拡張したり，一般化する。</td></tr>
<tr><td>段階３
簡単な場合で捉えた構造を式表示する。</td><td rowspan="2">段階３
共通性を利用して，数列の任意の項の直接的な式を生成する。</td><td rowspan="2">段階２
関数的－概念的－大局的
パターンの基礎的構造と，変数，定数の関係を定義する。</td></tr>
<tr><td>段階４
簡単な場合の図の構造を表現した式を一般化し，大きな項の式を作る。</td></tr>
</table>

図３－１　先行研究パターン一般化プロセス

それぞれの段階がどういったことを指すのかを，以下のパターン図（図３－２）を例にして明確にする（図３－３）。

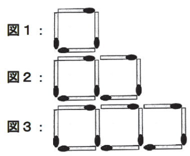

図３－２　「マッチ棒」問題で使われるパターン図（西山, 2015, p.67）

石田（2002）	Radford（2008）	Amit & Neria（2008）
段階１ 正方形が１増えるごとに３本ずつ増えるという変化のきまりに気づく	**段階１** 図１～図３の観察から「図番号が１増えるとマッチ棒の本数は３増える」等の共通点に気づく	**段階１** 図１～図３の観察から，前の図に３本加えると，次の図になることを理解する
段階２ 図１の口型の４本をもとに，コの字分ずつ付け加えられていくと構造を理解する	**段階２** 段階１で見付けた共通点が，引き続く項でも成り立つことを理解し，一般化する	
段階３ 図３の場合を，４＋３×２や，１＋３×３と式表示する	**段階３** 前段階までで捉えた共通性をもとに，図ｎを求めるための式である，４＋３×（ｎ－１）を生成する	**段階２** 定数・変数を理解し，任意の図の本数は，４＋３×（図番号－１）であるという関数関係を見出す
段階４ 図１００の場合を，４＋３×９９や，１＋３×１００と式表示する		

図３－３　各段階の具体例

第４章　パターン一般化を捉えるモデルの確立

4.1.　先行研究におけるパターン一般化プロセスの再考

本章では，パターン一般化プロセスを精緻に記述するための暫定的な枠組みを，先行研究を基に構成する。

まず，Radford の３段階における「思考対象」の移り変わりに注目する。段階１は，あらかじめ提示された図のような「視覚可能なパターン」，段階２は，段階１の図の範疇を超えた図である「視覚可能でない部分に拡張されたパターン」，段階３は，特定の図ではなく「大局的構造・一般的構造」が思考の対象となっている。

次に，石田の４段階を基に，「子どもの理解」の移り変わりに注目する。段階１では，変化のきまりの理解はできている「前構造的把握」の局面，段階２は，図の構造・仕組みを理解する「構造的把握」の局面，段階３は，局所的な部分に適用可能な式を生成する「局所的な式生成」の局面，段階４は，任意の項を求めるために適用可能な式を生成する「大局的な式生成」の局面にあるだろう。

この２つの捉え方を分析の２観点とし，パターン一般化を精緻に記述できる可能性を秘めた枠組みを構成した（図４－１）。

３つの思考対象		子どもの理解の４局面 （ｉ）前構造的把握	（ii）構造的把握	（iii）局所的な式	（iv）大局的な式
	(a) 視覚可能なパターン	図１～３の図から，次の図に進むと，マッチ棒は３本増えることに気付く。	図３は，図１の４本に”コ”の字２個分が追加されている。	図３の本数を求める際に，式４＋３×２を生成する。	
	(b) 視覚可能でない部分に拡張されたパターン	ある図の本数は，一つ前の図の本数に３加えればよい。	図６でも，図１の４本に”コ”の字５個分が追加されている。	図６の本数を求める際に，式４＋３×５を生成する。	
	(c) 大局的構造・一般的構造		ある図では，はじめの４本に，”図番号引く１”の”コ”の字が追加されている。		図６８や任意の図の本数を求める際に，式４＋３×６７や，４＋３×(1つ前の図番号)を生成する。

図４－１　パターン一般化を記述する枠組み

4.2.　記述的枠組みに基づく指導事例 4-2 の考察

記述的枠組みに基に，指導事例①（伊藤, 2000）を分析すると，図４－２のように一般化が進行していることが分かった。

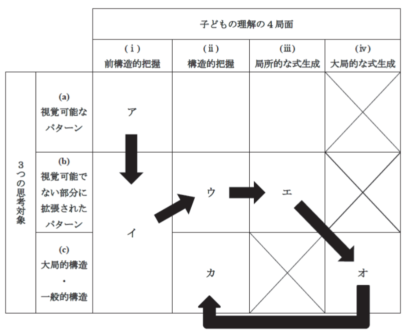

図４－２　指導事例①のパターン一般化プロセス

4.3.　記述的枠組みに基づく指導事例 4-3 の考察

記述的枠組みに基づき，指導事例②（平山, 2011）を分析すると，図４－３に示すようにパターン一般化が進行していることが明らかとなった。

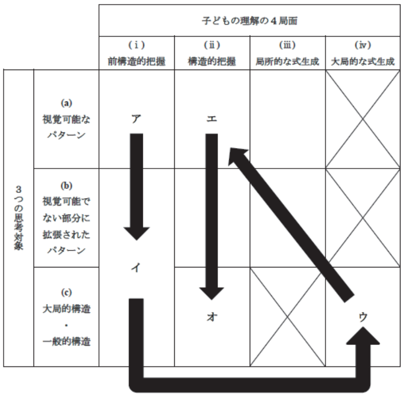

図４－３　指導事例②のパターン一般化プロセス

以上から分かるように，パターン一般化プロセスは，先行研究で想定されているような各段階が直線的に進行していくものではなく，指導が介在していることもあって，ⅱ→ⅲ→ⅳ→ⅱや(a)→(b)→(c)→(a)→(c)のように，各セルを行きつ戻りつしており，その様相は極めて力動的であることが明らかとなった。

4.4.　パターン一般化の力動的過程モデル

本節では，パターン一般化を捉えるモデルを構成するが，簡潔で明瞭なモデルを構成するために，記述的枠組みにおいて，本質的には同じセルは同一化し，図４－４に示すように５つの相に分割した。

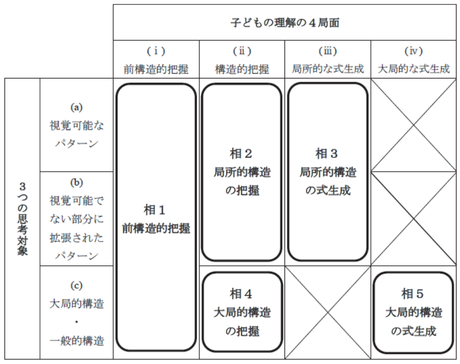

図４－４　パターン一般化を捉える５相

この５相を基に，パターン一般化を捉えるモデルの構成を試みるが，事例分析から示唆されるモデルを構成する上で考慮すべき要件として次が挙げられる：

1.　パターン一般化の第一歩は「前構造的把握」である。
2.　パターン一般化の実際は，緩やかな相の区別はあるが，力動的進行といえる。
3.　同一系統内における大局的部分から局所的部分への進行は想定しない。
4.　パターン一般化の完成は，「大局的構造の把握」「大局的構造の式生成」の両方を達成することである。

これらを基に，パターン一般化の力動的過程モデルを構成した（図４－５）。

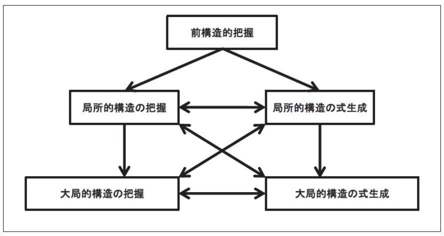

図４－５　パターン一般化の力動的過程モデル

このモデルに従えば，指導事例①②の

パターン一般化は，図４－６，４－７のように示される。

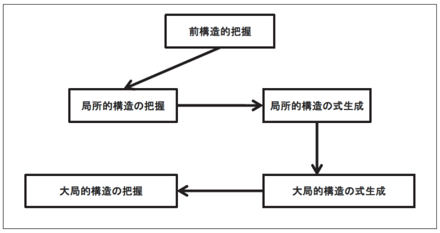

図４－６　指導事例①のパターン一般化

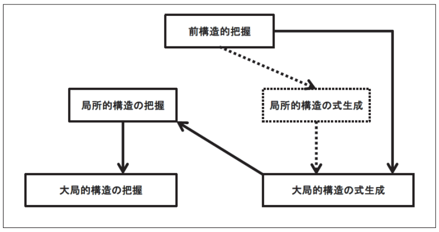

図４－７　指導事例②のパターン一般化

第５章　先行研究及び指導事例に視るパターン一般化の困難性と指導行為

5.1.　先行研究で示唆されている困難性及びパターン一般化を促す指導行為

先行研究において，パターン一般化の困難性として構造理解の欠如（原田・石田, 2002）が指摘されており，その克服に有効な指導行為として, 式を読むこと（石田, 2002），連続する複数の図を動的に見ることと連続図の変化を加法で表すこと（原田・石田, 2002）が同定されている。

一方，Warren & Cooper（2008）はパターン一般化をサポート及び阻害するプロセスを同定している（表５－１）。

表５－１　Warren & Cooper（2008）が同定したサポートプロセス及び障害プロセス

サポートプロセス（Support processes）	障害プロセス（Hindering processes）
SP①　パターンと位置の関係が明白なパターン問題の使用	HP①　逆思考に関わる問題を扱うこと
SP②　小さな位置番号から，大きな位置番号のパターンへの一般化を考える	HP②　一般化を口頭で言わせることに比べて書かせること
SP③　パターン内の成長構成要素（growing components）を表現するための色の使用	HP③　一般化を記述するために使用される言語の不足
SP④　欠けているパターン（missing pattern）の使用	HP④　単一変化思考（加算ストラテジー）
SP⑤　具体的資材の利用	HP⑤　２つの数の言語上の混乱
SP⑥　位置番号とパターンのリンクを促す明示的な質問	

5.2.　指導事例から示唆されるパターン一般化を促す指導行為

本節は，実際の授業を概観してパターン一般化を促す指導行為を検討する。坪田（2006）と細水・佐藤（2008）による授業から，以下の８つのパターン一般化をサポートする指導行為が見出された。:

・パターン図の予想と注目する部分の焦点化
・位置とパターンのリンクを促す明示的質問
・パターン図を描画する際の色使用
・数え方の描画的表現
・他のパターン図の予想
・表現形式（表）の使用
・単一変化思考・加算ストラテジー
・表と図の対応付け

第６章　パターン一般化における困難性とその克服に向けた指導行為の考察

6.1.　実際の指導事例に視る構造的把握

先行研究で指摘されていたパターン一般化の困難性は，力動的過程モデルで考えれば，図６－１の点線囲いの相である。

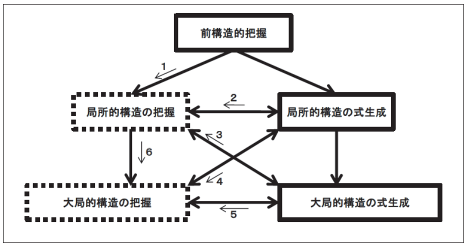

図６－１　力動的過程モデルに視る構造把握段階

しかし，図６－１に示したように，局所的・大局的構造の把握の相に困難性が存在すると言っても，そこに至る経路は６つあり，どの経路でその相を経験するかによって構造把握を行う目的は異なる。

6.2.　構造的把握の３つのタイプと困難性の精緻化

本節では，パターン一般化の力動的過程モデルを基に，いくつかの構造的把握のタイプを同定し，先行研究で指摘されているパターン一般化の困難性をより精緻なものとして捉え直す。

第一の構造的把握として「(Ⅰ) 初期段階における構造的把握」がある。これは，変化のきまりを捉えた後すぐに，図の変数・定数を捉え，カタマリとして図を理解するプロセスを指す（図６－２）。

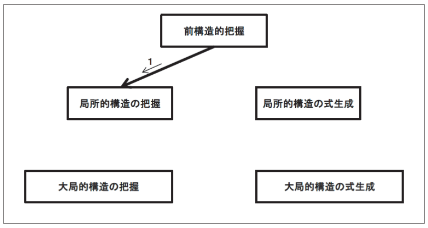

図６－２　初期段階における構造把握

第二の構造把握として，「(Ⅱ) 捉えた数量関係および式の妥当性をチェックするための構造的把握」がある。これは，簡単な場合で得られた数から，数量関係を捉える式の生成に成功し，その後，その式がなぜ成立するのかを構造を把握することによって理解しようとするものである（図６－３）。

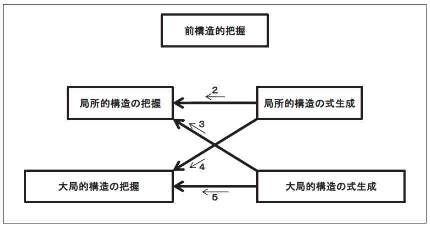

図６－３　捉えた数量関係および式の妥当性のチェックとしての構造的把握

第三の構造把握として，「(Ⅲ) 構造的把握の一般化」がある。これは，局所的な図の構造を捉えることに成功した後，それが任意の項でも成立することを理解するプロセスのことを指す（図６－４）。

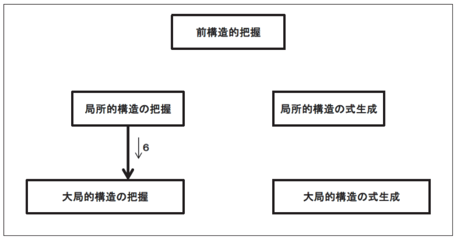

図６－４　構造的把握の一般化

6.3.　困難性の克服に資する指導行為の同定及びその整理

本節では，パターン一般化の困難性を克服する手立てを検討するために，前節で見出した３つのタイプの構造把握が困

難となる要因は何であるかを特定した。

（Ⅰ）と（Ⅱ）の構造的把握の困難性要因としてカタマリで捉えられないことが挙げられる。この克服に有効であると目される指導行為として，第５章で議論したパターン一般化をサポートする指導行為から以下の３つを抽出した。

・パターン図への彩色

・具体的資材の活用

・連続図の変化を加法で表すこと

（Ⅲ）の構造的把握の困難性要因として増分の理解の欠如があると考えられる。この克服に有効と目される指導行為として，第５章のパターン一般化をサポートする指導行為から以下の２つを抽出した。

・簡単な場合における複数の図を考察すること

・位置番号とパターンのリンクを促す明示的質問

6.4.　代数的思考を促すパターン一般化に関する指導事例の提案

前節までの，パターン一般化の困難性の克服に資する指導行為の議論を踏まえて，指導事例①の改良及び補完を行った。

第７章　本研究のまとめ，及び今後の課題

7.1.　本研究のまとめ

代数的思考の一要素であるパターン一般化を促す指導を検討するという目的のもと研究を進め，次の成果を挙げた。

- **先行研究における代数的思考・推論の捉えの明確化**

本研究における代数的思考・推論の捉え方を設定するために，Blanton & Kaput (2005) の見解に注目した。そして，代数的推論の３カテゴリを明らかにし，それらの推論を要する問題群を同定した。

- **パターン一般化を捉えるためのモデルの構成**

本研究では，パターン一般化の記述的枠組みを基に授業分析したところ，パターン一般化は力動的に進行していくことが明らかとなった。そして，パターン一般化を精緻に捉えるパターン一般化の力動的過程モデルを構成した。

- **パターン一般化の困難性の精緻化**

パターン一般化の困難性である構造把握の欠如について，力動的過程モデルによる考察の結果，その困難性をより精緻に捉え直すことを成し遂げた。

- **パターン一般化の困難性を克服するために良い指導行為**

構造的把握の困難性要因を検討するとともに、それを克服するために有効と目される指導行為を同定した（図６－５）。

石田らが指摘するパターン一般化の困難性	構造理解の欠如		
精緻化されたパターン一般化の困難性	（Ⅰ） 初期段階における構造的把握	（Ⅱ） 捉えた数量関係および式の妥当性をチェックするための構造的把握	（Ⅲ） 構造的把握の一般化
困難性要因	カタマリで捉えられないこと		増分の理解の欠如
困難性克服に向けた指導行為	● パターン図への彩色 ● 具体的資材の活用 ● 連続図の変化を加法で表すこと		● 簡単な場合における複数の図を考察すること ● 位置番号とパターンのリンクを促す明示的質問

図６－５　パターン一般化の困難性とその克服に資する指導行為

7.2.　本研究に残された課題

残された課題として，３点挙げられる。

第一に，本研究は，代数的思考・推論の一要素であるパターン一般化に焦点化

しており，他の代数的思考・推論について検討できていない点である。

第二に，パターン一般化の指導において，子どもたちが困難に直面した際に，他の経路を選択するという力動的進行であるという特徴を生かした方法について検討できていない点である。

第三に，本研究の成果を基に，授業を構成し，実際の教室で指導を行い，多くのデータを集めることが今後の課題として挙げられる。

主要参考文献

Amit, M., & Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40,* 111-129.

Blanton, M., & Kaput,J. (2005). Characterizing a Classroom Practice That Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Educatio, 36, No5 (Nov., 2005).* 412-446.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM - The international Journal on Mathematics Education, 40(1),* 83-96.

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds’ thinking. *Educational Studies in Mathematics,* 67, 171–185.

石田淳一 (2002). 「小学校の「一般化」問題の解決における困難性」. 『日本数学教育学会誌』, 84(6) , 23-31.

伊藤利弘 (2000).『新・算数授業講座④　第 4 学年 / 授業の展開』.東洋館出版社.

坪田耕三 (2006). 『映像で見る算数授業　5 年「式で表す・式をよむ」　授業者　筑波大学附属小学校　副校長　坪田耕三』. 内田洋行.

西山悠子 (2015).「［今月の指導 6 年］文字と式」.『新しい算数研究』, No.532, 66-69.

原田昌彦・石田淳一 (2002).「5 年生の「一般化」問題解決における困難性克服に関する教授実験」.『日本数学教育学会誌』, 84(10), 2-11.

平山誠 (2011, 11).「［今月の指導 4 年］伴って変わる 2 つの数量」.『新しい算数研究』, No.490, 54-57.

藤井斉亮・Stephens, M. (2002). 「数と計算の学習指導における擬変数の役割に関する研究『第 35 回数学教育論文発表会論文集』, 163-168 . 鳥取大学.

細水保宏・佐藤裕二 (2008). 『研究授業で使いたい！算数教材２０』.東洋館