

# ドミノによる長方形盤の敷き詰め総数について

## <修士論文要旨>

愛知教育大学 教育学研究科  
数学教育専攻  
217M065 江口京弥

### 1 はじめに

本論文では次のような問を扱う。

問.  $m \times n$  盤をドミノで敷き詰めるときの敷き詰め総数, また,  $m \times m \times n$  直方体から  $m-2 \times m-2 \times n$  直方体を除いた立体を  $1 \times 1 \times 2$  ブロックで敷き詰めるときの敷き詰め総数を求めよ.

$m \times n$  盤をグラフで表し, グラフの完全マッチングの総数を求めることで敷き詰め総数を求める.

### 2 用語の定義

定義 2.5(隣接行列)  $G$  の隣接行列  $A$  とは,  $V$  の要素で添字づけられている行列で,  $x, y \in V$  に対して

$$A_{xy} = \begin{cases} 1 & \{x, y\} \in E \text{ のとき} \\ 0 & \{x, y\} \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる  $|V| \times |V|$  行列である.

定義 2.6(二部隣接行列) グラフ  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  の二部隣接行列  $B$  とは,  $V_1$  の要素と  $V_2$  の要素で添字づけられていて,  $x \in V_1, y \in V_2$  に対して,

$$B_{xy} = \begin{cases} 1 & \{x, y\} \in E \text{ のとき} \\ 0 & \{x, y\} \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる  $|V_1| \times |V_2|$  行列である.

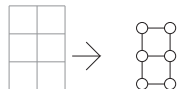
定義 2.7(完全マッチング) グラフの辺からなる集合で, どの頂点もちょうど 1 回だけ覆われているものを完全マッチングという.

### 3 敷き詰め総数とグラフの完全マッチング

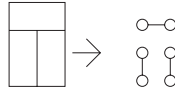
まずは敷き詰め総数とグラフの完全マッチングが対応していることを図で示す.

例 3.1 ( $3 \times 2$  盤の敷き詰めとグラフの完全マッチングの総数)

$3 \times 2$  盤をグラフで表すと次のようになる.



この盤をドミノで敷き詰めると次のように敷き詰めでき, これをグラフで表すと次のように辺が頂点を被覆することになる.



このとき、このグラフの辺集合  $\{(1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 1), (3, 1)\}, \{(2, 2), (3, 2)\}$  はグラフの完全マッチングの1つを表す。

上の例からグラフ  $G$  の任意の頂点を被覆する辺がただ1つ存在するとき、 $m \times n$  盤はドミノによって敷き詰めされていることになる。よって、グラフ  $G$  の完全マッチングの総数を求めることは  $m \times n$  盤の敷き詰め総数を求めることと同値である。よって、グラフ  $G$  の完全マッチングの総数を求める。ここで次の定理が成り立つ。

**定理 3.2**  $S_n$  を  $n$  次対称群とする。  $\sigma \in S_n$  に対して、  $\sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n B_{i\sigma(i)} = M(G)$  が成り立つ。

#### 4 カステレイン符号化と完全マッチングの総数

第3章で定義した行列  $B$  に対して符号化を行う。

**定義 4.1**(向きづけ) グラフ  $G = (V, E)$  の向きづけとは、 $E$  から  $V$  への2つの写像  $i: E \rightarrow V$  と  $t: E \rightarrow V$  のことであって、 $i(e) \neq t(e)$  を満たすものである。このとき  $i(e)$  を始点、 $t(e)$  を終点といい、その辺  $e$  は  $i(e)$  から  $t(e)$  へ向きづけられているという。

**定義 4.2**(符号化) 二部グラフ  $G = (V = V_1 \cup V_2, E)$  の二部隣接行列を  $B$  とし、グラフ  $G$  に向きづけが与えられているとする。  $u \in V_1, v \in V_2$  であるとき、

$$B'_{uv} = \begin{cases} 1 & u \text{ から } v \text{ へ向きづけられているとき} \\ -1 & v \text{ から } u \text{ へ向きづけられているとき} \\ 0 & \{u, v\} \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる行列  $B'$  を行列  $B$  の符号化という。

また、グラフ  $G = (V, E)$  の隣接行列を  $A$  とし、グラフ  $G$  に向きづけが与えられているとする。  $u, v \in V$  であるとき、

$$A'_{uv} = \begin{cases} 1 & u \text{ から } v \text{ へ向きづけられているとき} \\ -1 & v \text{ から } u \text{ へ向きづけられているとき} \\ 0 & \{u, v\} \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

で定まる行列  $A'$  を行列  $A$  の符号化という。

第3章で定義したグラフ  $G$  は二部グラフなので、グラフ  $G$  の隣接行列  $A$  と、 $G$  の任意の向きづけに対する符号化を行った行列  $A'$  は

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & B' \\ -{}^tB' & 0 \end{pmatrix}$$

とできる。このとき  $|\det A'| = |\det(B')|^2$  より、 $\sqrt{|\det A'|} = |\det(B')|$  である。

**定理 4.3** 行列  $B$  に任意の符号化を行った行列  $B'$  に対して  $|\det B'| \leq \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n B_{i\sigma(i)}$  が成り立つ。

定理 3.1, 定理 4.3 と  $\sqrt{|\det A'|} = |\det(B')|$  から  $\sqrt{|\det A'|} \leq M(L_{m,n})$  である。

#### 5 カステレイン符号化

4章で  $\sqrt{|\det A'|} \leq M(G)$  が示された。ここでは  $\sqrt{|\det A'|} = M(G)$  となる場合を考える。ここで次の定理が成り立つ。

**定理 5.1** 平面グラフ  $G$  の向きづけを、各面に対してその面を構成する辺を時計回りにたどったとき、進行方向と同じ向きの辺が奇数となるように行くと、 $\sqrt{|\det A'|} = M(G)$  が成り立つ。

$L_{m,n}$  の向きづけの行い方は以下の通りである。

1. グラフから辺を抜いて木にする.
2. 木に任意に向きづけを行う.
3. 最後に抜いた辺から順に戻し, 条件に合うように向きづけを行う.

この向きづけの方法は定理 5.1 を満たすように向きづけすることができるが, 行列式の計算が行いやすいかどうかは分からない. そこで, 行列式が計算しやすい向きづけを探した結果次のような向きづけが行列式の計算が行いやすかった. 以下にその向きづけを示す.

1. グラフの横の辺は上から  $\rightarrow, \leftarrow, \rightarrow$  と向きづけを繰り返す.
2. グラフの縦の辺は  $\downarrow$  と向きづけする.

## 6 長方形盤の敷き詰め総数

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B'_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$A' = \begin{pmatrix} B'_n & I & & & O \\ -I & -B'_n & \ddots & & \\ & \ddots & B'_n & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & I \\ O & & & -I & \pm B'_n \end{pmatrix} \quad (mn \times mn \text{ 行列})$$

となる. ただし  $I$  は  $n \times n$  単位行列である. このとき  $\sqrt{\det A'}$  を求める. 第二列ブロックを  $-1$  倍, 第三行ブロックを  $-1$  倍, 第三列ブロックを  $-1$  倍,  $\dots$ , 第  $n$  列ブロックを  $-1$  倍すると,  $n$  が偶数であることより

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} B'_n & -I & & & O \\ -I & B'_n & \ddots & & \\ & \ddots & B'_n & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -I \\ O & & & -I & B'_n \end{pmatrix}$$

とできる. この行列を  $A''$  とおく. ここで, 実数  $\lambda$  に対して  $B_m$  は実対称行列なので, ある直交行列  $P$  で対角化できる. 行列  $B_m$  を対角化させる直交行列を  $P$  とすると  $\lambda_i$  を行列  $B_m$  の固有値とすれば

$$P^{-1}(\lambda I - B_m)P = \begin{pmatrix} \lambda - \lambda_1 & & & \\ & \lambda - \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda - \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる。同じ操作を  $A''$  のブロックに適用すると、

$$\det A'' = \begin{vmatrix} B'_n - \lambda_1 I & & & O \\ & B'_n - \lambda_2 I & & \\ & & \ddots & \\ O & & & B'_n - \lambda_n I \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{k=1}^m \det(B'_n - \lambda_k I) = \prod_{k=1}^m (-1)^n \det(\lambda_k I - B'_n) = \prod_{k=1}^m \det(\lambda_k I - B'_n)$$

となる。ここで  $B'_n$  の特性多項式を  $q_n(\lambda)$ 、 $q_n(\lambda)$  の根を  $\mu_l$  とすると、 $q_n(\lambda) = \det(\lambda I - B'_n)$ 、 $\mu_l$  は  $B'_n$  の固有値なので

$$M(L_{m,n}) = \sqrt{\det A''} = \sqrt{\prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n (\lambda_k - \mu_l)}$$

$B_m$  の固有値  $\lambda_k$  と  $B'_n$  の固有値  $\mu_l$  を求める。

$$B_m(x) := \det(xI - B_m) = xB_{m-1}(x) - B_{m-2}(x) (m \geq 2)$$

となる。 $B_0(x) = 1, B_1(x) = \det(xI_1 - B_1) = x$  と、 $B_m(x)$  の漸化式より

$$B_m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}} \left\{ \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{m+1} - \left( \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2} \right)^{m+1} \right\}$$

となる。 $B_m(x) = 0$  を解くと  $x = 2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) であるから、 $B_m$  の固有値は  $2 \cos \frac{k\pi}{m+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) である。

次に、行列  $B'_n$  の固有値を求める。

$$B'_n(x) := \det(xI - B'_n) = xB'_{n-1}(x) + B'_{n-2}(x)$$

となる。 $B'_0(x) = 1, B'_1(x) = \det(xI_1 - B'_1) = x$  と、 $B'_n(x)$  の漸化式より

$$B'_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} \left( \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

となる。 $B'_n(x) = 0$  を解くと  $x = 2i \cos \frac{\pi k}{n+1}$  となるから、行列  $B'_n$  の固有値は  $2i \cos \frac{\pi k}{n+1}$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ) である。

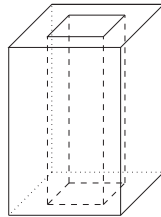
以上より  $M(L_{m,n}) = \sqrt{\prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left( 2 \cos \frac{k\pi}{m+1} - 2i \cos \frac{\pi l}{n+1} \right)}$  である

## 7 $1 \times 1 \times 2$ ブロックによる「 $m \times m \times n$ 直方体から $(m-2) \times (m-2) \times n$ 直方体を取り除いた立体」の敷き詰め総数

ここでは、 $m \times m \times n$  直方体から  $(m-2) \times (m-2) \times n$  直方体を取り除いた立体」の敷き詰め総数を考える。ただし、取り除く直方体は以下の図のように直方体の辺を作るブロックは残すように取り除くものとする。敷き詰めを行う立体を  $L_{m,m,n}$  と表す。体積が偶数の立体を用いて敷き詰めを行うので  $n$  は偶数とする。求める敷き詰め総数を  $M(L_{m,m,n})$  とする。

(例 7.1)  $(L_{4,4,6})$

$4 \times 4 \times 6$  直方体から  $2 \times 2 \times 6$  直方体を取り除いた立体  $L_{4,4,6}$  は下図のようになる。



立体を平面に描き、それをグラフにし、符号化を次のように行う。

1. 直方体の縦の辺は  $\rightarrow, \leftarrow$  を交互に.
2. 直方体の横の辺は  $\uparrow, \downarrow$  を交互に
3. 直方体の高さの辺は  $\downarrow$  を (平面図だと外向きに)

$m' = 4(m-1)$ ,  $L_{m,m,n}$  の隣接行列  $A$  に上記の向きづけに対して符号化を行った行列を  $A'$  とすると  $A'$  の形は適切に行と列を入れ換えると

$$C_{m'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & & O \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & \ddots & \ddots & & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C'_{m'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & & O \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & \ddots & \ddots & & 1 \\ -1 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて

$$A' = \begin{pmatrix} C'_{m'} & I & & & O \\ -I & -C'_{m'} & I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & & -I & \pm C'_{m'} \end{pmatrix}$$

となる。長方形盤のときと同じように第二列ブロックを  $-1$  倍, 第三行ブロックを  $-1$  倍, 第三列ブロックを  $-1$  倍, ..., 第  $m'$  列ブロックを  $-1$  倍すると

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} C'_{m'} & -I & & & O \\ -I & C'_{m'} & -I & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & & -I & C'_{m'} \end{pmatrix}$$

となる。長方形盤の敷き詰め総数の計算と同様の計算を行うと,  $\lambda_i$  を第 6 章で定義した行列  $B_n$  の固有値とすれば

$$\det A' = \det \begin{pmatrix} C'_{m'} - \lambda_1 I & & & & O \\ & C'_{m'} - \lambda_2 I & & & \\ & & \ddots & & \\ O & & & & C'_{m'} - \lambda_n I \end{pmatrix} = \prod_{k=1}^m \det(C'_{m'} - \lambda_k I) = \prod_{k=1}^m \det(\lambda_k I - C'_{m'})$$

となる。 $C'_{m'}$  の特性多項式を  $q_{m'}(\lambda)$ ,  $q_{m'}(\lambda)$  の根を  $\mu_l$  とすると,  $q_{m'}(\lambda) = \det(\lambda I - C'_{m'})$ ,  $\mu_l$  は  $C'_{m'}$  の固有値より

$$M(L_{m,m,n}) = \sqrt{\det A'} = \sqrt{\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m'} (\lambda_k - \mu_l)}$$

である。

次に  $B_n$  の固有値  $\lambda_k$  と  $C'_{m'}$  の固有値  $\mu_l$  を求める。 $m \times n$  盤の敷き詰め総数の計算で求めたように  $\lambda_k = 2 \cos \frac{\pi k}{n+1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) であるので,  $\mu_l$  を求める。

ここで,  $m' \times m'$  行列

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & O & \ddots & 1 \\ -1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

に対して, 行列  $C_{m'}$  は  $C_{m'} = D - {}^t D$  と表される. さらに行列  $D$  は

$$D^i = \begin{pmatrix} O & I_{m'-i} \\ -I_i & O \end{pmatrix}$$

を満たすので

$$D^{m'-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & 1 \\ -1 & \ddots & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ O & & -1 & 0 \end{pmatrix} = -{}^t D$$

である.

よって  $C'_{m'} = D + D^{m'-1}$  であるので, 行列  $D$  の固有値を求める. 行列  $D$  の固有値を  $\mu$ ,  $\mu$  に対する固有ベクトルを  $x = {}^t(x_1, x_2, \dots, x_{m'})$  とすると  $Dx = \mu x$  であり, これを解くと  $x_{i+1} = \mu x_i (1 \leq i \leq m' - 1)$ ,  $-x_1 = \mu x_{m'}$  となる.  $x_1 = t$  とおくと,  $x_2 = \mu t$  より  $x_3 = \mu^2 t, \dots, x'_m = \mu^{m'-1} t$  である.  $-t = \mu \times \mu^{m'-1} t$ ,  $t \neq 0$  とすると,  $-1 = \mu^{m'}$  となる. 両辺を二乗して  $\mu^{2m'} = 1$  となる. よって  $\mu$  は 1 の  $2m'$  乗根であって  $\mu^{m'} = -1$  を満たすものである. 従って  $\mu_l = \cos \frac{2l-1}{m'}\pi + i \sin \frac{2l-1}{m'}\pi$  ( $l = 1, 2, \dots, m'$ ) である.

求める固有値  $\mu_l$  は  $B'_m = D + D^{n-1}$  より

$$\begin{aligned} \mu_l + \mu_l^{m'-1} &= \mu_l + \mu_l^{m'} + \mu_l^{-1} = \mu_l - \mu_l^{-1} = \left( \cos \frac{2l-1}{m'}\pi + i \sin \frac{2l-1}{m'}\pi \right) - \left( \cos \frac{2l-1}{m'}\pi - i \sin \frac{2l-1}{m'}\pi \right) \\ &= 2i \sin \frac{2l-1}{m'}\pi \quad (l = i, 2, \dots, m') \end{aligned}$$

である. 以上により求める敷き詰め総数は  $M(L_{m,m,n}) = \sqrt{\prod_{k=1}^n \prod_{l=1}^{m'} \left( 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} - 2i \sin \frac{2l-1}{m'}\pi \right)}$  である.

## 8 今後の課題

本論文では  $m \times n$  盤の敷き詰め総数, また  $m \times m \times n$  直方体から  $m-2 \times m-2 \times n$  直方体を除いた立体の  $1 \times 1 \times 2$  ブロックによる敷き詰め総数を求めた. しかし, 立体について  $m \times m \times n$  直方体の敷き詰め総数については考えることができなかった. また, 平面についてもドミノでなくトロミノなどの図形で敷き詰める際の敷き詰め総数にも興味がある. 従って, 今後はトロミノにおける  $m \times n$  盤の敷き詰め総数,  $m \times m \times n$  盤の  $1 \times 1 \times 2$  ブロックによる敷き詰め総数を考えていきたい.

## 参考文献

- [1] グラフ理論, R. ディーステル 著, 根上生也/太田克弘 訳, 丸善出版
- [2] 線型代数学, 佐武一郎 著, 裳華房
- [3] P.W.Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice*, *Physica* 27 (1961), 1209 – 1225
- [4] 33の素敵な数学小景 イジイマトウシエク 著, 徳重典英 訳, 日本評論社