イプシロン　2019. Vol.61，181 － 185

到着時間に制限のある待ち行列の稼働終了時刻について
＜修士論文要旨＞

愛知教育大学　教育学研究科
数学教育専攻
217M066　**高　橋　　正**

1　研究の背景と目的

本論文では待ち行列という「待ち」の現象を確率的に整理した数理モデルについて, 特に待ち行列のシステムが稼働し続ける時間について解析していく. これは 1 人の客からしたら全く気にする必要の無い時間であるが, サービスを行う側にとってはとても重要な時間である. 例えば, サービス側がサービスに機械を用いている場合, 機械が壊れる前にメンテナンスをしなければならないが, サービスが続けばそのタイミングがとれない. サービス側が人であっても労働時間の問題につながるであろう. 今回は待ち行列のシステムを 2 つ設定し, それぞれシステムが稼働し続ける時間の分布について解析していく.

2　待ち行列とは

銀行窓口や通信における「待ち」を, 客の到着とサービス時間をランダムにすることで数理モデル化したものであり, 確率的な現象として扱うことができる. 基本的な待ち行列の系は, 客をサービスする「窓口」, 窓口が埋まっている場合に客を一時的に待たせる「待ち列」から構成されている. 待ち行列の種類によっては窓口や待ち列が複数存在するものもある. また, 窓口が次の客を選ぶ方法を「規律」と呼ぶ. 例えば先着順サービス (FCFS) やサービスの短い客から処理する最短サービス (SST) などがある.

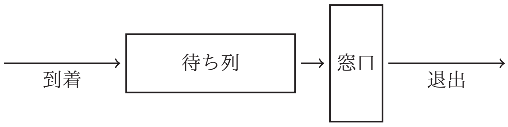

図 1　待ち行列の基本的な構成

待ち行列の構成要素を簡単に表現するために次のケンドール記号を導入する.

$$A/B/s/R$$

A : 到着時間の分布. 指数分布に従う場合は M, 一般の独立な分布場合は GI で表す.
B : サービス時間の分布. 指数分布に従う場合は M, 一般の分布の場合は G で表す.
s : 窓口の数
R : 規律の種類. 省略した場合は先着順サービスで客を案内する.

例えば, 到着とサービスが指数分布であり, 窓口の数が 3 個であり最短サービスである待ち行列は $M/M/3/\mathrm{SST}$ と表記する.

3　$M/M/s$ 待ち行列の全稼働期間

店に初めて客が到着してから店が継続して稼働する時間のことを「全稼働期間」という.$M/M/s$ 待ち行列の場合, その時間を確率変数 Z_s でおくことにする. ここではこの Z_s の分布のラプラス変換や期待値について考えていく.

全体を通して客の到着時間間隔はパラメータ λ の指数分布に,1 回分のサービス時間はパラメータ μ の指数分布に従い, 互いに独立であるものとする.

窓口数は s 個あるので使用窓口数に着目する.$M/M/s$ 待ち行列の「使用窓口数が継続して n 以上である時間」を $V_{s,n}$ とし,「使用窓口数が継続して n である時間」を U_n とする. ただし $V_{s,1}=Z_s$ である. これらは全稼働期間内に複数個存在するので, 必要に応じて右肩に添え字をつけることにする.

$1 \leq n \leq s-1$ のとき,$V_{s,n}$ は使用窓口数が $n-1$ になるまで U_n と $V_{s,n+1}$ を交互に足し合わせたものである.N_n を「初めて使用窓口数が n になってから $n-1$ になるまでの U_n と $V_{s,n+1}$ の個数の合計」とすると N_n は奇数であり,$V_{s,n}$ は次のように表現できる.

$$V_{s,n} = U_n^1 + V_{s,n+1}^2 + U_n^3 + \cdots\cdots + V_{s,n+1}^{N_n-1} + U_n^{N_n} \quad (1 \leq n \leq s-1)$$

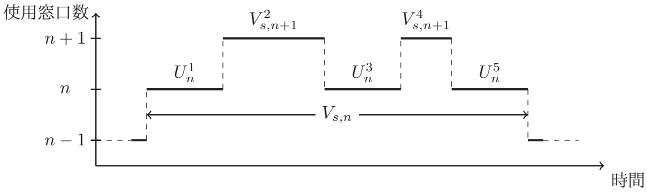

図 2　$N_n=5$ の場合

この章では $V_{s,n}$ の関係式を得ることで,$V_{s,1}$ すなわち Z_s の分布のラプラス変換を求めていく.

$V_{s,n}$ の分布の密度関数を $f_{s,n}$ とし,$\theta \geq 0$ に対して $f_{s,n}$ ラプラス変換を $\varphi_{s,n}(\theta)$ とする. すなわち

$$\varphi_{s,n}(\theta) = \mathrm{E}\left[e^{-\theta V_{s,n}}\right] = \int_{x=0}^{\infty} e^{-\theta x} f_{s,n}(x)dx \tag{1}$$

である. また,$\mu_n = n\mu$ を用いて

$$p_n(\theta) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu_n+\theta}\ , \quad q_n(\theta) = \frac{\mu_n}{\lambda+\mu_n+\theta}$$

と定義する.

命題 1　$M/M/s$ 待ち行列において $V_{s,n}$ のラプラス変換 $\varphi_{s,n}(\theta)$ は $V_{s,n+1}$ のラプラス変換 $\varphi_{s,n+1}(\theta)$ を用いて, 次のように表現できる.

$$\varphi_{s,n}(\theta) = \frac{q_n(\theta)}{1-p_n(\theta)\varphi_{s,n+1}(\theta)} \qquad (1 \leq n \leq s-1) \tag{2}$$

$V_{s,s}$ は $V_{s,n}$ とは異なり, 系内の客数と使用窓口数が一致しているとは限らないので別に考える必要がある.$V_{s,s}$ を解析するために次の考え方が重要となる.

時刻 t_0 にて, 系内数が s 人いる状態でその中の 1 人が退出するまでの時間を τ_1 とする. 時刻 $t_0+\tau_1$ 直前の列待ち人数を Q_1 とし, その人数分が退出する時間を τ_2 とする. さらに時刻 $t_0+\tau_1+\tau_2$ 直前における列待ち人数を Q_2 とし, その人数分が退出する時間を τ_3 とする. 同様に $i \geq 1$ に対して, 時刻 $t_0+\tau_1+\cdots+\tau_i$ 直前の列待ち人数を Q_i とし,Q_i 人分が退出する時間を τ_{i+1} とする. 使用窓口数が s になってから Q_i が初めて 0 になるまでの時間が $V_{s,s}$ であり,τ_i の和で表現できる.

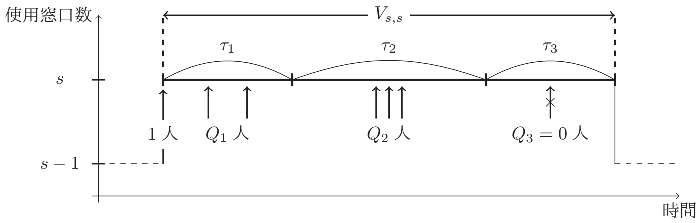

図 3　$I_0 = 3$ のとき

さらに,$i \geq 1$ に対して Q_i は τ_i 間の到着客数とも考えられる. ここで $\sum_{i=0}^{\infty} Q_i$ のラプラス変換を考えることで,$\lambda \leq \mu_s$ であれば確率 1 で $Q_i = 0$ となる i が存在することがわかる. よって $Q_i = 0$ のとき τ_{i+1} から先はすべて 0 なので

$$V_{s,s} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i \tag{3}$$

と表現できる.τ_i の有限和のラプラス変換の極限をとることで次の定理が得られる.

命題 2　$M/M/s$ 待ち行列において $V_{s,s}$ のラプラス変換 $\varphi_{s,s}(\theta)$ は次のように表現できる.

$$\varphi_{s,s}(\theta) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4p_s(\theta)q_s(\theta)}}{2p_s(\theta)} \tag{4}$$

2 つの命題から

定理 1　$M/M/s$ 待ち行列の全稼働期間 Z_s のラプラス変換 $\varphi_{s,1}(\theta)$ は次の連分数展開をもつ.

$$\varphi_{s,1}(\theta) = \cfrac{q_1}{1 - p_1 \cfrac{q_2}{1 - p_2 \cfrac{q_3}{1 - \ddots \; p_{s-2} \cfrac{q_{s-1}}{1 - p_{s-1} \cfrac{1 - \sqrt{1 - 4p_s(\theta)q_s(\theta)}}{2p_s(\theta)}}}}} \tag{5}$$

また, これらのラプラス変換から Z_s の期待値が計算できる.

定理 2　$M/M/s$ 待ち行列における全稼働期間 Z_s の期待値は

$$\mathrm{E}\left[Z_s\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda} \displaystyle\sum_{n=1}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{(s-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s-1} \frac{1}{s\mu - \lambda} & (\lambda < \mu_s) \\ \infty & (\lambda \geq \mu_s) \end{cases} \tag{6}$$

ただし,

$$\mathrm{E}\left[Z_1\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu - \lambda} & (\lambda < \mu) \\ \infty & (\lambda \geq \mu) \end{cases} \tag{7}$$

である.

4　$M/G/1/0-m$ 系待ち行列の稼働終了時刻

$M/M/s$ 待ち行列は, 到着した客を必ず処理するような待ち行列であった. そのため, 到着率 λ がサービス率 μ_s よりも大きければ, 全稼働期間が無限に続く確率が正となった. そこで, 到着率の方がサービス率よりも大きくなる場合でも有限時間で系を終了させるような待ち行列の規律を考えた. それが今回考える 0-m 系待ち行列である. ここではこの待ち行列が稼働してから稼働が終了するまでの時刻「稼働終了時刻 V」について解析していく. 解析の手法には $M/M/s$ 待ち行列の $V_{s,s}$ と同様の方法を用いる. この手法ならばサービスは一般の分布でも計算が複雑にならない.

時刻 t_0 直前において, 系内に Q_0 人の客がいるとする. ただし, 時刻 t_0 より前に窓口は使用されておらず, この Q_0 人は全員列待ち客であるとする. 時刻 t_0 になると窓口で客が処理され始める.Q_0 人を処理する時間を τ_1, 時刻 $t_0+\tau_1$ 直前における列待ち人数を Q_1 とする. 以降 $i \geq 1$ に対して時刻 $t_0+\tau_1+\cdots+\tau_i$ 直前の列待ち人数を Q_i とする.$V_{s,s}$ と異なるのは,$Q_i=0$ または $Q_i \geq m$ となったとき, 次の τ_{i+1} 間の客の到着を許さないという点である. よって次のように表現できる.

$$V=\sum_{i=1}^{\infty}\tau_i \tag{8}$$

$V_{s,s}$ と同様に τ_i の有限和のラプラス変換の極限をとり V のラプラス変換を求める. ただし, サービスの平均時間は $1/\mu$ とする.

$$\begin{aligned}
&P_l(x)=\frac{(\lambda x)^l}{l!}e^{-\lambda x}\\
&\omega_k^n(\theta)=\mathrm{E}\left[e^{-\theta(\tau_1+\cdots+\tau_n)}\middle|\,Q_0=k\right],\quad \omega_k(\theta)=\mathrm{E}\left[e^{-\theta V}\middle|\,Q_0=k\right]\\
&\alpha_{k,l}(\theta)=\int_{x=0}^{\infty}e^{-\theta x}P_l(x)f_k^1(x)dx,\quad \alpha_{k,l}=\alpha_{k,l}(0)=\int_{x=0}^{\infty}P_l(x)f_k^1(x)dx
\end{aligned}$$

と記号を設定しておき,$\alpha_{k,l}(\theta),\alpha_{k,l}$ を k 行 l 列成分にもつ $m-1$ 次正方行列をそれぞれ $A_{m-1}(\theta),A_{m-1}$ とすると $I_{m-1}-A_{m-1}(\theta)$ と $I_{m-1}-A_{m-1}$ はそれぞれ正則である. これは $\alpha_{k,l}(\theta),\alpha_{k,l}$ がそれぞれ吸収状態のあるマルコフ連鎖の推移確率であることからわかる.

定理 3　$M/G/1/0-m$ 系待ち行列が k 人からスタートしたときの稼働終了時刻 V のラプラス変換 $\omega_k(\theta)$ は τ_1 のラプラス変換 $\omega_k^1(\theta)$ をもちいて次のように表現できる.

$$\begin{pmatrix}\omega_1(\theta)\\ \vdots\\ \omega_{m-1}(\theta)\end{pmatrix}=(I_{m-1}-A_{m-1}(\theta))^{-1}\begin{pmatrix}\sum_{l=m}^{\infty}\omega_l^1(\theta)\alpha_{1,l}(\theta)+\alpha_{1,0}(\theta)\\ \vdots\\ \sum_{l=m}^{\infty}\omega_l^1(\theta)\alpha_{m-1,l}(\theta)+\alpha_{m-1,0}(\theta)\end{pmatrix} \tag{9}$$

また V の期待値はラプラス変換を θ で微分し $\theta\to 0$ とすれば得られるので

定理 4　$M/G/1/0-m$ 系待ち行列の稼働終了時刻 V の期待値は次のように表現できる.

$$\begin{pmatrix}\mathrm{E}\left[V|\,Q_0=1\right]\\ \vdots\\ \mathrm{E}\left[V|\,Q_0=m-1\right]\end{pmatrix}=\frac{1}{\mu}\left(I_{m-1}-A_{m-1}\right)^{-1}\left((\rho+1)\,I_{m-1}-A_{m-1}\right)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ m-1\end{pmatrix} \tag{10}$$

さらに稼働終了時刻 V までに退出した客数を Q としたとき $1 \leq k \leq m-1$ に対して次の関係式が得られた.

$$\mathrm{E}\left[V|\,Q_0 = k\right] = \frac{1}{\mu}\mathrm{E}\left[Q|\,Q_0 = k\right] \tag{11}$$

これは,V が Q 人分のサービス時間である, という関係が期待値でも成り立っているということであり, 直観的にも理解できる.

さらに分布関数の方から同様の計算を行うことで確率密度関数を求めることができる.f_k^1 を k 人からスタートしたときの τ_1 の確率密度関数とし,g_k を次のように定義する.

$$g_k(t) := \sum_{l=m}^{\infty} \int_{x=0}^{t} f_l^1(t-x) P_l(x) f_k^1(x) dx + P_0(t) f_k^1(t) \tag{12}$$

また

$$\boldsymbol{f}^1 = \begin{pmatrix} f_1^1 \\ \vdots \\ f_{m-1}^1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_{m-1} \end{pmatrix}$$

とおくと次の定理が得られる.

定理 5 k 人からスタートした V の確率密度関数 G_k は畳み込み積分を用いて次のように表現できる.

$$G_k(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m-1} \int_{x=0}^{t} g_l(t-x) \left\{ \left(\boldsymbol{f}^{1t} \boldsymbol{P} \right)^{*n-1} (x) \right\}_{k,l} dx + g_k(t) \tag{13}$$

ただし, 行列 A に対してその k 行 l 列成分を $\{A\}_{k,l}$ と書くものとする.
また，記号 $*$ は畳み込みを表し，行列 A, B に対して

$$(A * B)_{k,l} = \sum_{j} A_{k,j} * B_{j,l} \tag{14}$$

とする. 特に A を繰り返し n 回畳み込みしたものを A^{*n} と記す.

参考文献

[1] R.B.Schinazi 著, 今野紀雄, 林俊一 訳, “マルコフ連鎖から講師確率モデルへ”, 丸善出版, 2012.

[2] 鈴木武次 著, “待ち行列”, 裳華房, 1972.

[3] J. R. Artalejo and M. J. Lopez-Herrero 著,“Analysis of the Busy Period for the $M/M/c$ Queue: An Algorithmic Approach”, Journal of Applied Probability Vol.38, No.1 (Mar, 2001), pp.209-222, 2001