

統計分野における問題解決学習の実践

— 「これはアヤメかカキツバタか」 —

数学科 増田 朋美

本校数学科では、基礎的な知識・技能の習得とともに社会や生活の中でいける統計的思考力の育成を目標に、「データの分析」および「確率分布と統計的な推測」の独自教材を開発し、実施している。本稿では、「統計的な推測」の独自教材「これはアヤメかカキツバタか」の実践の記録と考察をまとめる。昨年度、数学Bの授業において、2年生 197名を対象に教科担当2名で本教材を実践した。

なお、次期学習指導要領の改訂においては、数学のみならず、すべての教科を通して問題解決力の育成が重視されている。また、問題解決学習の実施に当たっては、その評価の仕方・在り方も課題としてあげられ、検討されている。本研究では、生徒が行った課題解決を、ルーブリックを用いて評価した。数学B「統計的な推測」の問題解決学習の教材を提案するとともに、推定・検定の考え方を使得、生徒が日常的な事例にどのような意思決定を図ったか考察する。

<キーワード> 統計的な推測 Fisher iris データ 問題解決学習 これはアヤメかカキツバタか

1. はじめに

(1) 研究の背景

ビッグデータ時代といわれる今日、データに基づいた課題設定・意思決定の重要性は増している。学校教育でも、問題解決力が重視され、それに伴い、数学I「データの分析」における授業実践とその報告が活発に行われ始めた。一方、数学B「確率分布と統計的な推測」では、まだまだそのような実践例は少ない。

実際、数学Bの選択項目「数列」「ベクトル」「確率分布と統計的な推測」のうち、「確率分布と統計的な推測」を履修する学校は少ない。もちろん、センター試験では、「数学B」について、3項目の内容（確率分布と統計的な推測、数列、ベクトル）のうち、2項目以上を履修した者に対応した出題をすることになっており、「確率分布と統計的な推測」と「数列」、もしくは

「確率分布と統計的な推測」と「ベクトル」を選択することも可能だが、実際にはそのように選択する学生はほとんどいない。図1・2は河合塾の「Guideline 2015 7・8月号」に記載されていた2015年度センター試験の選択状況であるが、同じ選択単元の科目である数学Aと比較しても、選択のパターンは、明らかに限定的である。限定的である理由として、数学Bを出題する大学入試の個別試験において、項目を「数列」と「ベクトル」に指定している大学が多いことをあげる。その是や非について述べるのは

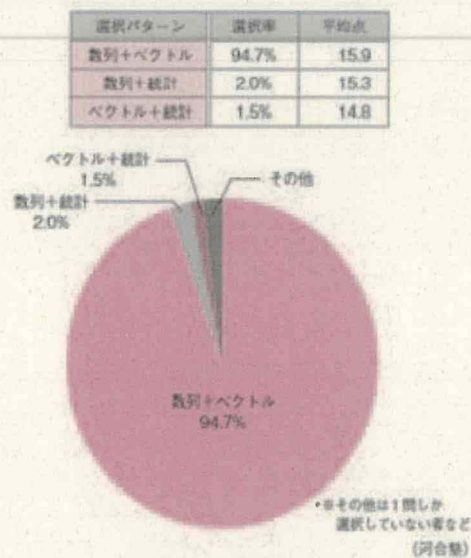


図1 数学Bの選択パターン

避けるにしても、「統計的なものの見方と統計分析の能力」は、課題発見と解決のための一つの重要なスキルであり、文系理系を問わず必要な力だといわれる現状がある。

統計は、ある程度以上の数のバラツキのあるデータの性質を調べる「記述統計」と、大きなデータ（母集団）から一部を抜き取って、その抜き取ったデータ（標本）の性質を調べることで、元の大きなデータの性質を推測したりするための「推測統計」がある。次節（図3）に示した通り、どのようなデータを集め、どのように分析したら、そこから導かれる統計的判断に誤りが少ないかを研究する学問と、「記述統計」と「推測統計」によって統計が成り立つ。必履修の「記述統計」だけでなく、数学Bの選択項目「推測統計」を両輪で学ぶことにより、統計を用いた社会における問題解決の手法や意思決定のための有用性は実感できるであろう。両方をバランスよく学び、統計学を概観することも高等学校の数学教育で必要なのではないかと筆者は考えている。

選択パターン	選択率	平均点
確率+整数	60.9%	26.3
確率+図形	12.1%	27.8
整数+図形	24.1%	27.5

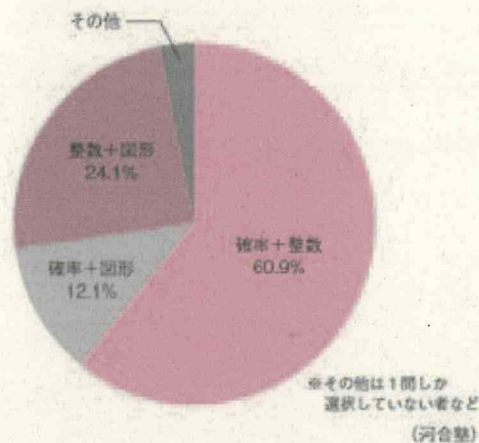


図2 数学Aの選択パターン

(2) 統計学の体系

以下は、統計学の体系を図式化したもの（田栗，2013）である。

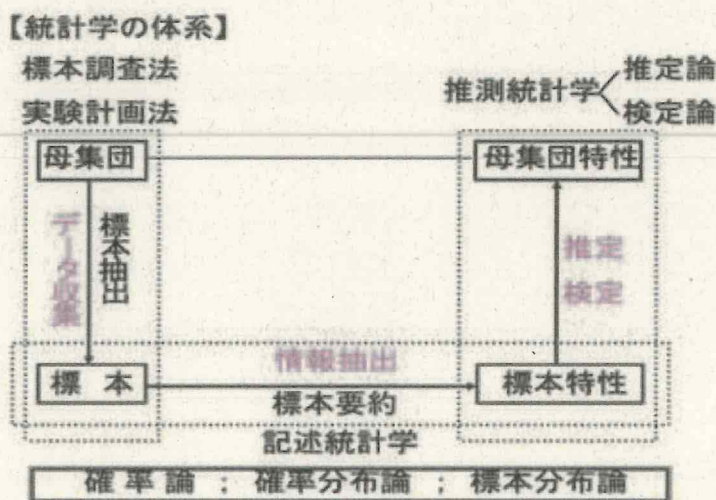


図3 統計学の体系

(3) 研究の意図と目的

これらの背景をふまえ、開発した「統計的な推測」の教材とともに生徒の学習の様相を分析し、一連の授業モデルとして提案する。次期学習指導要領の改訂においては、数学のみならず、すべての教科を通して問題解決力の育成が重視されている。また、問題解決学習の実施に当たっては、その評価の仕方・在り方も課題としてあげられ、検討されている。本研究では、生徒が行った課題解決を、ルーブリックを用いて評価した。数学B「統計的な推測」の問題解決学習の教材を提案するとともに、検定の考え方を使得、生徒が日常的な事例にどのように意思決定を図ったか考察する。

2. 教材と授業構想

(1) 教材「これはアヤメかカキツバタか」について

地域に自生地（国の天然記念物）があり、本校の校章のモチーフでもあるカキツバタは、生徒にとって身近な花である。本教材は、「これはアヤメかカキツバタか」をテーマに、2017年3月に本校2年5クラスで実施した。学校のロータリーに咲く青い花が、「本当にカキツバタか」を話題の発端として、Fisherのirisデータを分析した。推定・検定の考え方に基づいて、「アヤメかカキツバタか、どちらともいえないか」を主張するのが課題の趣旨である。世の中には、手元のデータから、全体像を推し量る事例がたくさんある。今回は、推定・検定に興味をもってもらうことを本教材の目的とした。

(2) パラメータについて

表1 Fisherのirisデータ（一部抜粋）

ID	Sepal.Length	Sepal.Width	Petal.Length	Petal.Width	Species
1	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
2	4.9	3	1.4	0.2	setosa
3	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
4	4.6	3.1	1.5	0.2	setosa
5	5	3.6	1.4	0.2	setosa
6	5.4	3.9	1.7	0.4	setosa

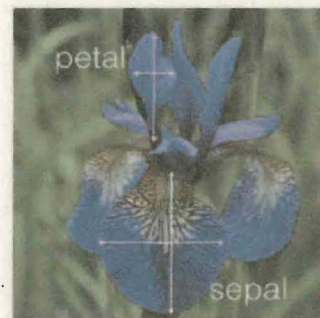


図4 アヤメの花びらとがく片

Fisherのirisデータには、3種のアヤメ：セトナ(Setosa), バーシクル(Versicolor), バージニカ(Virginica)の4個の計測値：がく片長(Sepal Length), がく片幅(Sepal Width), 花びら長(Petal Length), 花びら幅(Petal Width)が収録されている。3種のアヤメのデータが各50個体、合計150個体分のデータがある。

(3) 授業計画

2017年3月に本校2年5クラスで実施した。数学B「確率分布と統計的な推測」の「確率分布」は、学年末考査の範囲とし、テスト返却後の3時間で本教材を行った。なお、生徒は、1年次の数学I「データの分析」において、コンピュータゲームに格納されている選手データを分析し、ワールドカップ優勝チーム「スペイン」に勝つオリジナルチームを作る問題解決学習を行っている（増田，2016a, 2016b）。データを使った問題解決学習にはなじみがある。また教室はコンピュータ教室と普通教室を併用し、普通教室では、正規分布や信頼区間などの講義を行い（別添ワークシート参照）、コンピュータ教室では、シミュレーションの観察およびデータの分析と信頼区間の算出をグループで行った。なお、分析にはニュージーランドで活用されている統計ソフト「iNZight and VIT」を利用している。

表2 授業計画

時	学習のテーマ
1	「本教材の目的」 「正規分布とは」
2	「信頼区間とは」 「信頼区間を使ってできること」
3	「これはアヤメかカキツバタか」

(4) 統計ソフト「iNZight and VIT」について

「iNZight and VIT」とは、ニュージーランドの高校のために設計されたRベースの統計ソフトであり、データを分析するプログラム(iNZight)と視覚的推測ツール(VIT)を併せ持つソフトウェアである。プロジェクトリーダーはオークランド大学の統計学者であり、IASE



図5 「iNZight and VIT」

の元会長である Chris Wild 氏である。Wild 氏は統計的推論およびダイナミックグラフに関する考えの段階的発展について考察し、推論の考え方をニュージーランドの学生（14-17 歳）に理解させることを目指し、このプログラムを作成した。「iNZight and VIT」は、HP から誰でもダウンロードできるソフトウェアであり、web サイトに基本的な使い方の動画がある。またデータの出典やサポートはインターネットを介しており、デジタルコンテンツとしての側面もある（増田，2014）。

(5) ルーブリック評価基準

なお、以下の評価は、ニュージーランドの「St Cuthbert's College」を視察した際、用いていたルーブリック評価を参考にしている。St Cuthbert's College では、自校のダンスパーティーに纏わるデータを配布し、取り組む問題を各自で設定するのだが、これらのレポートは、ルーブリックによって評価され、返却される。生徒は、このような問題解決型のタスクの内部評価と国家が統一で実施する外部評価（NCEA）によって、大学進学資格を獲得するため、問題解決学習のルーブリック評価は、教員間で共有され、画一的な印象がある。ニュージーランドでは、NCEA での外部評価と内部評価によって、目標と指導が一体化した評価を実現している。プロジェクトベースの活動を授業で展開し、その一連の学習の成果をそのまま評価の俎上にあげることができている（青山 裕元，2016）。

表 3 ルーブリック評価

		概要	Achieved	Merit	Excellent
問題解決プロセス	問題把握	取り組むべき問題をきちんと把握し、取り組んでいる。	問題を理解し取り組んでいる。		
	データ収集計画	問題に対して収集すべきデータを想定し、妥当な収集計画を立てる			
	データの整理・確認	実際にデータを適切に収集し、表などに整理する。欠損値や誤り等について確認する。			
	分析	データに対して適切に処理をする（表・グラフ・信頼区間の計算）。	平均値、標準偏差、信頼区間を計算して求めることができる。	複数の項目の統計量や信頼区間を用いて分析することができる。	標本にばらつきがあることや、信頼区間は確率的誤差を伴うことを分析の視点としている。
P P D A C	判断・結論	データから見出された特徴や傾向に基づき妥当な判断を下す。結論をまとめる。	分析結果を用いて整合性のある結論が出されているが、根拠が不十分である。	妥当な根拠を用いて「どちらともいえない」を選択している。	Meritに加えて解決のためのよりよい調査を提案している。
信頼区間	知識・技能	「信頼区間」の意味を理解することができる。 信頼区間を計算して求めることができる。	信頼区間を計算して求めることができる。		
	思考力 判断力 表現力	「信頼区間」は標本に由来し、確率的誤差を伴うことを理解している。「信頼区間」を用いて判断する際に、データの分布の様子やばらつきを想定して判断している。	「信頼区間」を用いて説明することができる。	「信頼区間」は確率的誤差を伴うことを理解している。	標本の数やばらつきから信頼区間の信頼性について批判的に言及している。

3. 実践とその分析

(1)課題と活動の概要

生徒に示した課題は次の通りである。

「これはアヤメか？カキツバタか？？」

これはアヤメ？カキツバタ？

本校のロータリーに春になると咲く青い花。「カキツバタ」と言われています。

ある教員Mは「本当は、あれはアヤメではないか」と考えています。

そこで、品種の確定しているアヤメ畑 3 種 50 本ずつの花の測定をしました。

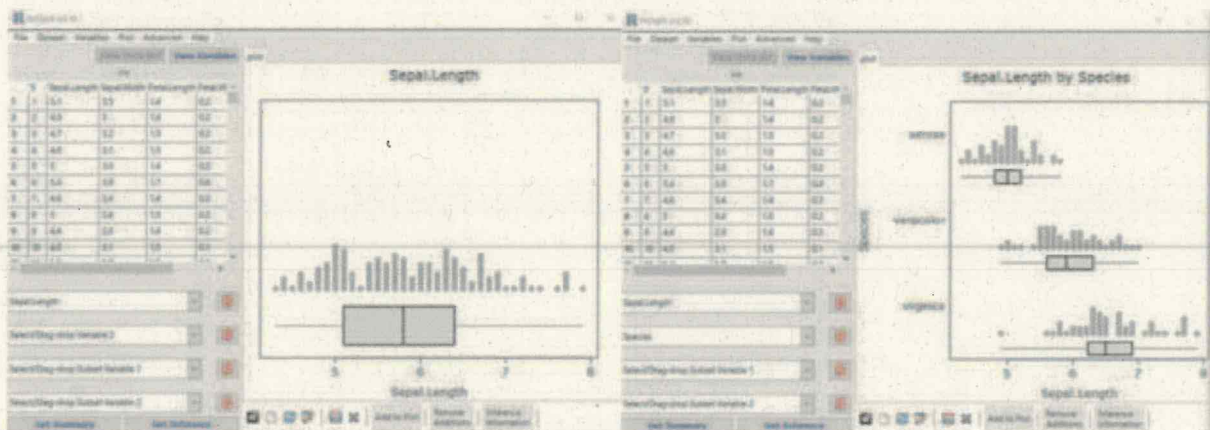
データは別ファイル(iris)にあります。

同じように、本校の「カキツバタ」と言われている花の測定もしました。

がく片長(Sepal Length) 6.5 がく片幅(Sepal Width) 3.0

花びら長(Petal Length) 3.5 花びら幅(Petal Width) 2.0

これらのデータを使って、本校の「青紫の花」がアヤメかカキツバタか論じてください。



R Inference Information

iNZight Inference using Normal Theory

Primary variable of interest: Sepal.Length (numeric)
Secondary variable: Species (factor)

Total number of observations: 150

Inference of Sepal.Length by Species:

Group Means with 95% Confidence Intervals

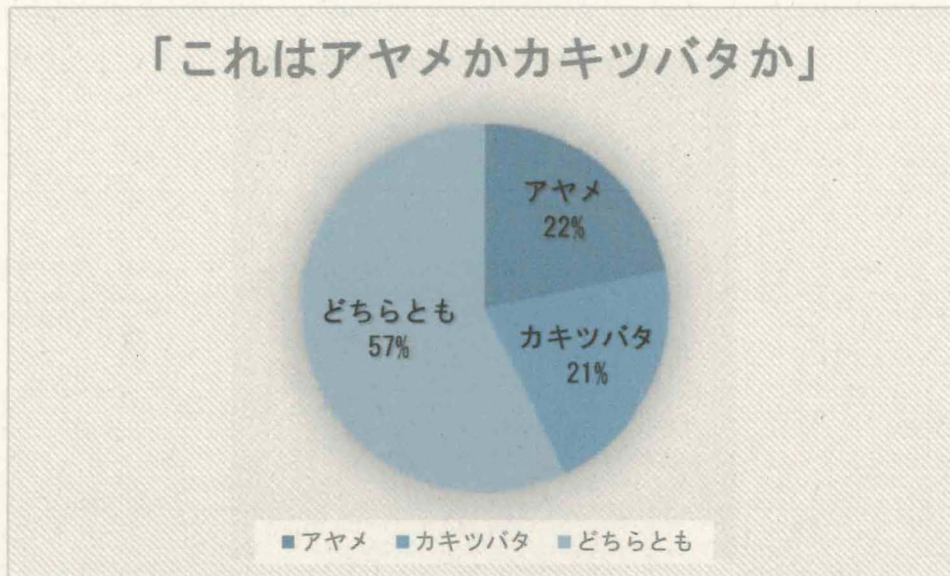
	Lower	Mean	Upper
setosa	4.906	5.006	5.106
versicolor	5.789	5.936	6.083
virginica	6.407	6.588	6.769

図 6 「iNZight and VIT」で、がく片のデータを分析

「iNZight and VIT」では、図6のようなドットプロットのグラフや統計量を得られる。ドットプロットのグラフは、簡単に層別化することができ、95%信頼区間などのサマリーの算出も簡単である。英語で表記されるので、少し使いづらそうな生徒もいたが、グループで分担して、必要な情報をワークシートに記入し、分析した。

(2)生徒の課題解決

レポートは、「アヤメ・カキツバタ・どちらともいえない」の3つから1つを選び、理由や考え方をまとめさせた。理由は、数学的な指標を用い、他者を納得させる表現を工夫して、理由をあげるように指示した。生徒の選択は、以下のグラフの通りである。



(3)生徒Aのレポートと評価

「カキツバタ」と呼ばれる花が、3種のアヤメ、それぞれの信頼区間に当てはまるかどうかを表に表すと

	かきつばた	かきつばた	アヤメ	アヤメ
Serena	X	O	X	X
Versicolor	X	X	X	X
Virginica	O	O	X	O

この花が Serena である確率 0.04724
 $\cdot C_0 \left(\frac{95}{100}\right) \left(\frac{5}{100}\right) = 0.000475$
 Versicolor である確率 0.0004266
 $\cdot C_0 \left(\frac{95}{100}\right) \left(\frac{5}{100}\right) = 0.0004266$
 Virginica である確率 0.191475
 $\cdot C_0 \left(\frac{95}{100}\right) \left(\frac{5}{100}\right) = 0.191475$

この2種である確率と2を掛け
 $\rightarrow 10$ 本に1~2本くらい
 Virginica である

これは、カキツバタである確率が高いか
 19%の確率で Virginica であるため、
 この花がアヤメである可能性も高くない。
 したがって、この花はどっちともいえない。

評価項目	評価	コメント	評価	コメント
問題理解	自分で解くべき問題と見做すことができ、取り組んでいる。	問題理解が深い。		
データ分析	問題に対して結果をデータで表し、具体的な結果を定めている。			
結論	データに基づいて結論を出している。理由も明確である。			
表現	データに基づいて結論を出している。理由も明確である。			
評価	「仮説検定」の概念を理解している。信頼区間を計算している。			
総評	「仮説検定」の概念を理解している。信頼区間を計算している。			

図7 生徒Aのレポートと評価

生徒Aは、「青紫色の花」のデータは、3種のアヤメの信頼区間にすべて当てはまるものではないが、確率を計算すると10本に1~2本くらいの確率で「バージニカ種」かもしれない。」とまとめた。標本

にばらつきがあることや、信頼区間は確率的誤差を伴うことを分析の視点としていることから、「分析」の項目は「Excellent」とした。

(4)生徒Bのレポートと評価

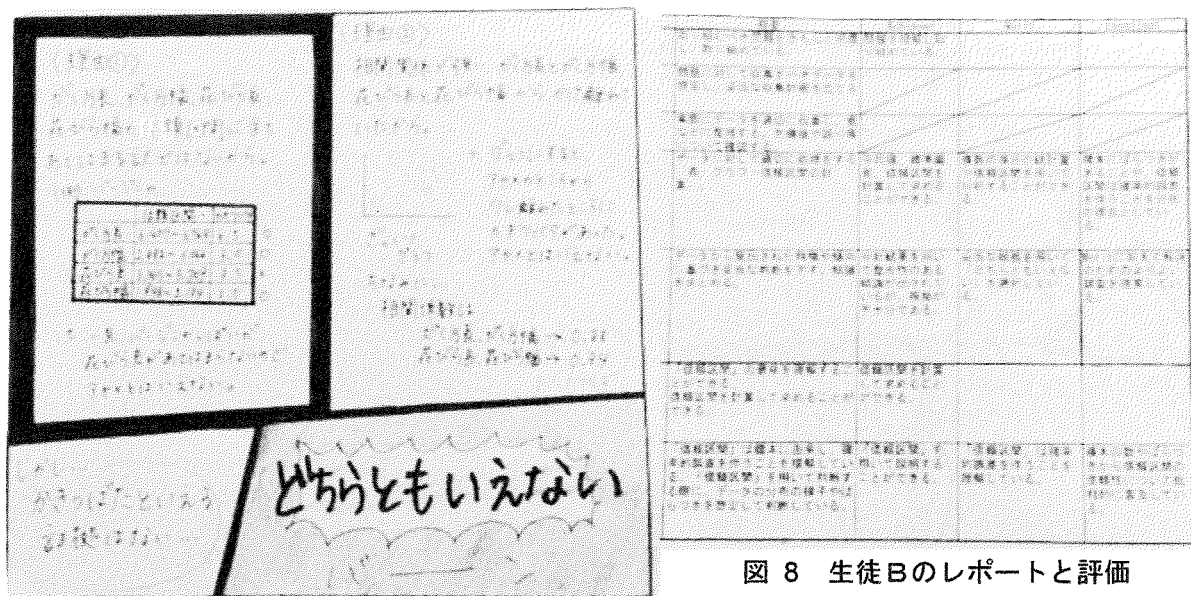


図 8 生徒Bのレポートと評価

生徒Bは、「アヤメのがく片長と幅、花びら長と幅の散布図に『青紫色の花』のデータを加えると外れ値となる」ことを、信頼区間を使った考察以外に述べていることから、「判断・結論」が Merit に加えて解決のためのよりよい調査を提案しているとし、「Excellent」とした。

(5)考察

「どちらともいえない」と判断した生徒は6割弱であった。生徒は、信頼区間を使って判断をし、表現しようとしたが、何のデータを比べているのかあいまいになってしまう生徒や、どう表現すればいいのかわからなくなってしまう生徒も多かった。

評価については、Achieved を1点、Merit を2点、Excellent を3点とし、合計11点満点で採点したところ、平均は5.5点、最高点は9点であった。なお、レポートの評価は、愛知教育大学大学院 内田啓太さんに手伝っていただいた。ルーブリック評価で、指導の観点を明確化し、生徒の学習を客観的にみることは、生徒のみならず、授業者にとっても効果的だと感じた。

4. まとめと今後の課題

本研究では、生徒が行った課題解決を、ルーブリックを用いて評価した。数学B「統計的な推測」の問題解決学習の教材を提案するとともに、推定・検定の考え方をを使って、生徒が日常的な事例にどのように意思決定を図ったか考察した。本来「アヤメかカキツバタか」は、生物学的な見方からすれば、もっと適切な注目の仕方があるだろう。授業者も生徒もそれを承知の上で、今回の実践をした。比較した「本校の青紫色の花のデータ」も、教材のために「作った」データであり、実際に計測したものではない。生徒が信頼区間を使って、どのような判断をし、表現するか、どちらともいえるように「青紫色の花」のデータを用意した。

結論やその手法は厳密ではないが、多くの生徒が、「正規分布（に近似している）母集団について、観測されたデータ m が次の不等式

$$\bar{X} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \leq m \leq \bar{X} + 1.96\sigma/\sqrt{n}$$

を成立させるならば、仮説は棄却されない。成立しないなら、仮説は棄却される。」という発想の有用性は理解できた。一方、「標本」と「母集団」の別や分析したことを使ってどう具体的な結論を出すかは難しかったようだ。

現在、「アクティブラーニング」などの言葉に代表されるように、学び方や授業法の改革が求められている。今後、学年に応じた問題解決型の学習はますます活発になっていくと考えられるが、個々の学習の成果をどう評価し、どう終着をするか、課題は多い。今回の教材では、ルーブリックを実践後に作成し、レポートを評価したが、本来であれば、生徒には、事前に評価の観点を示すべきである。生徒に事前に示したうえで、本教材を実施したならば、どのように学習活動に差異があるか検証したい。

また、生徒の中には、「カキツバタのデータを取って、アヤメとカキツバタの差異について調べたい」と、この実践をきっかけに次の問題解決へ挑戦するものもあった。生徒がデータを分析することによって得られる知見や統計的な推測に興味をもってくれる教材を今後も開発することが今後の課題である。

5. 謝辞

本実践を行うにあたり、ルーブリック評価の作成やレポートの評価をお手伝いしてくれた愛知教育大学大学院生の内田啓太さんにお礼を申し上げます。

なお、本研究の一部は、平成 29 年度科学教育研究費奨励研究(17H00162)の助成を受けています。

参考・引用文献

青山和裕 枡元新一郎.(2016). ニュージーランドの教科「数学と統計」についてⅢ－教育目標及び内容に合致した評価の在り方－. イプシロン 58号, 35-44.

河合塾.(2015). ガイドライン 2015 7・8月号.

小島寛之.(2006). 完全独習 統計学入門.ダイヤモンド社

田栗正章.(2013). 大学入試から見た統計教育の課題 ～次期学習指導要領に向けての一提案～. 統計教育 WS.

増田朋美.(2014). 多変数に向き合う統計の指導について－ニュージーランドの統計ソフト『iNZight and VIT』を使って－. 第 47 回秋季大会発表収録日本数学教育学会, 303 - 306.

増田朋美.(2016a). 多変数の教材『ウイニングイレブン』を使ったデータの分析－学ぶ統計から使う統計のための教材開発－. 研究紀要第 43 号, 53 - 68.

増田朋美.(2016b). サッカーゲーム『ウイニングイレブン』を使った『データの分析』の実践と考察－ゲームシミュレーションによる検証に焦点を当てて－. 日本科学教育学会第 40 回年会論文集, 319 - 320.

Fisher's Iris Datafile <http://lib.stat.cmu.edu/DASL/Datafiles/Fisher'sIris.html>