

ICT を利用した数学的探究の教材化を進めていくための基礎的考察

—mathematica を使った数学的探究『 π は乱数』なのか?』を手がかりに—

数学科 飯島康之, 天羽 康

『 π は乱数』なのか?』という問いに関して、ラズベリィパイ上の mathematica を使って天羽・飯島が進めた数学的探究の様子を、取り組んだ問題の変化に即して記述し、それを元に ICT を利用した数学的探究の教材化を進めていくために重要と思われることを考察した。今後の「理数探究」に向けた教材開発・授業開発に生かしていきたい。

<キーワード>ICT 利用, 数学的探究, mathematica, π , 乱数

1. はじめに

本稿の筆者は、本校の校長・教諭であると同時に、愛知教育大学大学院教育学研究科の指導教員・院生でもある。今後の附属高校での新しい教育研究・実践を生み出せる核になるような研究を目指して、この 1 年間取り組んできた。一つの具体的なターゲットは、新しい学習指導要領の中での「理数探究」である。理数探究で実践可能な素材を生み出せるような研究を目指し、ICT を活用していくことに取り組んでいる。

理数探究での ICT 利用について取り組む中で、まず出会った課題は、「便利になる」だけでは教育的には意味がないということだ。「考えなくてもボタンさえ押せば答えが出る」ことは、定型業務の遂行にとってはプラスかもしれないが、教育的には「考えること」を奪うだけであり、「学びが陳腐化すること」を意味する。そのため、たとえば、より短時間で行えたとしたら、生み出された時間によって、さらに「それがあからこそ可能になる学び」を示すことが必要である。「やりたかったけれども、今までの環境ではできなかったこと」が明確であれば、それが可能になるかどうかの一つの目標になる。しかし、それが明確であるには、「今までの環境で、いろいろとチャレンジしてみても限界を実感している」ことが不可欠で、そのような「限界を意識化しているケース」は必ずしも多くない。

むしろ、「新しい環境の中で何ができるのか」そのものが、実は未体験領域であり、そこではどういう探究が可能なのかを開拓し、その教育的価値などを明確にし、高校生などにも再体験可能なものに焦点を当てて教材化や授業化を行うことが不可欠である。そういう意味で、「新しい経験にチャレンジするフィールド」をまずつくることにした。私たちが選択したのは、ラズベリィパイ・アルディーノ・各種センサなどである。本稿では、ラズベリィパイに組み込まれている数式処理ソフト mathematica を使った数学的探究(『 π は乱数』なのか?)という問いに関する一連の数学的探究)を一つ取り上げ、考えている問題の流れを中心に、探究の概要を記述する。そして、それを分析・考察し、今後の教材開発・授業実践への手がかりとしたい。

2. mathematica を使った数学的探究の例

(1) 背景

してくれるのは、本当はとても驚くべきことなのだが、なんとなく、「コンピュータだったらできて当たり前」と感じてしまう。しかも、サッと表示してくれると、「計算がすごい」と思うよりも、「どこかに記してあるものを、表示しているだけなんじゃないか?」と感じたりする(実際は違うのだが)。

ちなみに、この程度のことは、mathematica を直接使わなくても、図 2 のように、Wolfram Alpha にアクセスして入力すれば表示してくれるので、スマホで十分行えることでもある。

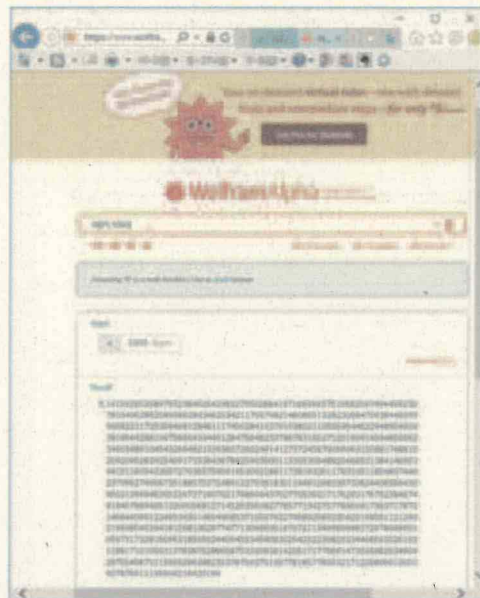


図 2 Wolfram Alpha での π の計算

Wolfram Alpha では 10000 桁は瞬時に表示してくれるが、100000 桁になると処理してくれず、Wolfram Cloud に行くと指示され、反応がとても遅くなる。一方、ラズベリィパイの mathematica で試してみると 10 万桁なら瞬時に表示、100 万桁なら 15 秒くらいの処理時間で表示。1000 万桁になると 154 秒かかった。 π を 100 万桁くらいまで計算させるのは、ラズベリィパイ上の mathematica で実験させるのにちょうどいい量ということが分かった。

でも、これだけでは数学的には何も深まらない。100 万桁の π の近似値があったら試してみたいことはないかと思案して、次のことを思い出した。

「 π は乱数」なのか?

以前に耳にしたこの問いについて考えるため、飯島・天羽が話し合い、まず次の問題に取り組むことにして、具体的なプログラムを考えることを天羽の宿題にした。

2) 問題 2: π を小数点以下 100 万桁まで計算し、そこで 0-9 までの数字が何回ずつ使われているかを調べ、ヒストグラムで表示せよ。

天羽は、100 桁までをヒストグラムに表示するプログラムをつくり、翌週のゼミで示した。このプログラムはたった 5 行だが、テクニックを駆使しているので簡単には解読できない。しかし、高校生でも「ここを変えたら発展させられる」点が明確になっている。

```
n = 100;  
Seq = Delete[Partition[RealDigits[Pi, 10, n][[1]], 1], 1];  
f[x_] := x[[1]]  
PSeq = Map[f, Seq]  
Histogram[PSeq, {1}]
```

まず、n の値を、100, 1000, 10000, 100000, 1000000 と増やしてみると、図 3 のように、同じ値に収束していく様子を実感することができた。

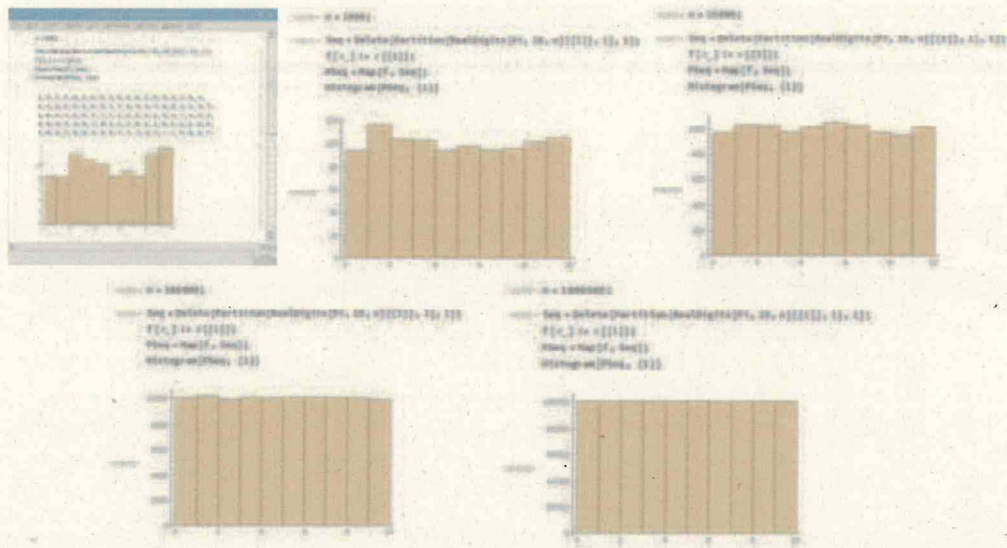


図 3 n を大きくしたときに分布が収束していく様子

桁数を大きくしていくと、0 から 9 までの数字は同じ割合で使われていることを実感することができた。しかし、次の疑問が湧く。

「乱数であるためには、0 から 9 までの出現割合が等しいだけでは適切ではない。0 から 9 までの数がこの順序で繰り返し表示する場合、割合は等しいけれども、0 の次は必ず 1 になっているので乱数とはいえない。」

そこで、次の問題が生まれた。

3) 問題 3: どんな数字が出ててもその次の桁の数は同じ確率で現れているかどうかを調べよ。

プログラムを大きく変えなければならぬかもしれないというのが第一印象だったが、この問いは意外に簡単に解決できた。10 進法で数字が並んでいると見るのではなく、100 進法で 2 桁ずつまとまっているものが並んでいるはずと解釈すれば、10 進法でなく、100 進法での数字の分布について調べてみれば、たとえば、0 の次の 10 種類の分布が、01 から 09 までのところに並ぶことになる。本当は半分だけを調べることになるので、1 桁ずらした場合についても合算すべきだが、とりあえず、だいたいのは分かる。その結果が図 4 である。

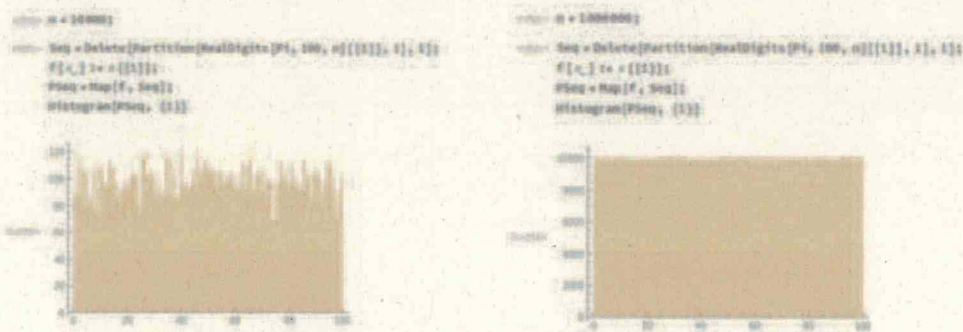


図 4 100 進法での分布の様子

これは 10 進法のとときの内訳を 10 等分したヒストグラムと考えることができる。データ量が 10000 のときにはかなりのばらつきを感じるが、100 万になるとほぼ同じとっていい状態になることを実感することができた。

今回のアイデアは、「乱数らしさ」を表現するのに、次のようなことができるのではないかというアイデアに発展した。まず、問題の形で示しておこう。

4) 問題 4: 「 π が乱数のようだ」ということを明確に定式化せよ。そして、確かめよ。

その答えの案は、次である。

「任意の p 進法 ($2 \leq p$) で小数展開した数列に関して、それぞれの桁で使われている数の分布が、一様分布になっている。」

上記の意味では、「 π は乱数ではない」というためには、分布が偏っている p を一つでも見つければいいことになる。図 5 に掲載したのは $p=2$ から 9 までの場合だが、それ以外についても今回調べた範囲においては、「 π は乱数」ということを否定するような結果は見つかっていない。

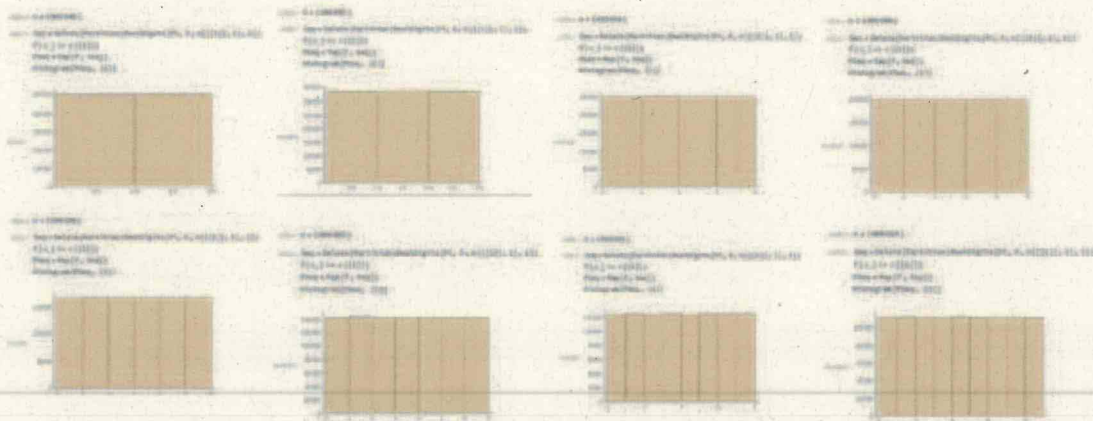


図 5 p 進法 ($2 \leq p \leq 9$) での $n=1000000$ での分布 (π)

すべての p についての分布を調べることはできないが、 π は乱数ではないことを否定するのは難しそうだという意味で、 π は乱数というのはかなり確からしいことを実感することができた。他にもそういう場合はあるのだろうか。

5) 問題 5: π のように乱数になりそうな候補を探せ。

まず、有理数について考えてみると、循環小数になっている。たとえば、

$$0.12345678901234567890\dots$$

のような場合は、10 進法で見ると 0 から 9 までの分布は一様だが、100 進法の場合には、偏っていることが明確だ。さらに抽象的に考えると、 $0 < \alpha < 1$ となる有理数 α を $\alpha = q/p$ という分数で表現した場合に、 p 進法で表せば、 $0, q$ と表されるので、 q が一つ、他の桁はすべてゼロとなってしまうので、明らかに「乱数でない」ことが分かる。

つまり、「乱数」であるためには、「無理数」であることが必要条件となる。

最も身近な無理数の候補としては、 $\sqrt{2}$ が考えられる。 $\sqrt{2}$ は π と違って超越数ではないから、乱数ではないかもしれない。

6) 問題 6: $\sqrt{2}$ は「乱数」か?

10進法について n を 100 から 1桁ずつ増やして 100万まで調べた結果が次である。



図 6 n を増やしたときの $\sqrt{2}$ の小数展開で使われる数の分布の変化

$n=1000$ のときの様子は π と比較するとかなりばらつきがある。しかし n が大きくなるにしたがって、平坦になり、 $n=100$ 万ではほぼ一様になった。また、 $n=100$ 万の場合、 p 進法 ($2 \leq p \leq 9$) での結果は次のようになり、すべてほぼ一様になった。

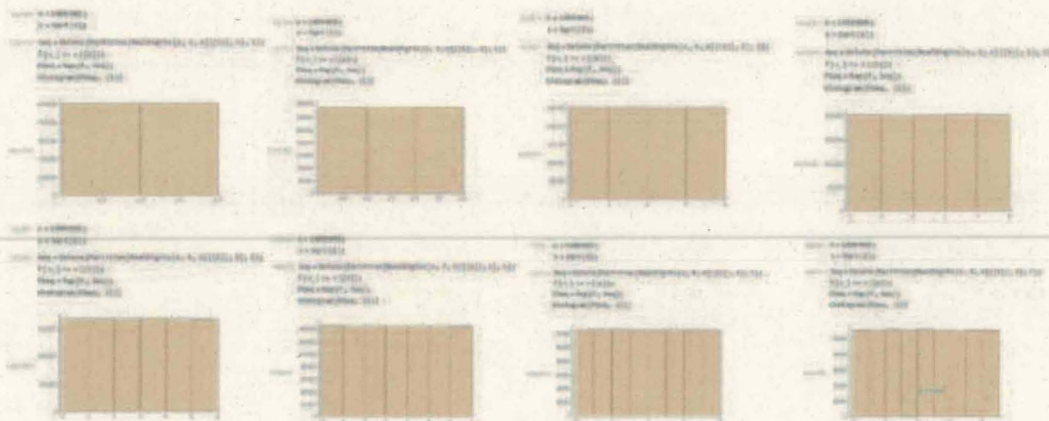


図 7 p 進法 ($2 \leq p \leq 9$) での $n=1000000$ での分布 ($\sqrt{2}$)

この結果を見る限り、 π と同様に、 $\sqrt{2}$ も「乱数」といってよさそうだが、果たしてそれは「びっくりすべき」ことなのだろうか。それとも「当たり前なこと」なのだろうか。

7) 問題 7: 無理数は「乱数」か?

いろいろな数について調べてみた。 \sqrt{n} ($n=2,3,5,\dots,28$), e , $\pi+e$, $\sin 1$, $\cos 1$ など。調べた結果、どれも「乱数」である。では、すべての無理数は「乱数」なのだろうか。

まず、次のことを思いつき、上記は否定された。

$$\pi = 3.141592653589793238462643383279502884197\dots$$

という小数展開に関して、一つおきに 1 を挿入した、次の数 α を考える。

$$\alpha = 3.111411151912161513151819171913121318141\dots$$

π での小数展開での分布がそれぞれ $1/10$ ずつなら、 α での分布は 1 が $1/2+1/20=11/20$ で、他の数の分布が $1/20$ になって、一様ではない。一方、 α に循環節があるなら、明らかにそれは偶数であり、存在し

たら π に循環節があることになるので、 α に循環節はありえず、無理数になる。つまり、「乱数ではない無理数」をつくることができた。

さらに、この方法は、 π だけに使える方法ではなく、任意の「乱数」の無理数に使える方法である。つまり、任意の「乱数」の無理数に対して「乱数でない無理数」を一意的に対応させることができるため、「乱数でない無理数」の個数(濃度)は、「乱数である無理数」の個数(濃度)以上であることが分かる。

にもかかわらず、「普通に接する無理数」の中に、明確に「乱数ではない無理数」は見つからない。非常に不思議なことである。胸は高揚した。

しかし、こういう π や $\sqrt{2}$ という身近な数に関する現象なのだから、きっと誰かが研究しているはずに違いない。Web で調べてみた。

8) 問題 8: 同じようなことを研究している人や研究成果を探せ。

すると、「乱数, ルート 2」というキーワードで検索しただけで、縫田光司(2010)のパワーポイントが見つかった²⁾。拝見すると驚くことに、次の記述がある。

「予想: ルート 2 の二進小数展開における「0」の出現率は $1/2$ (i.e., ルート 2 は“simply normal”)」

つまり、上記で考えていたような意味での「乱数」という概念は、数学的には「simply normal」という概念によってすでにきちんと規定されているらしいということと、 $\sqrt{2}$ が simply normal ということは 2010 年時点でも「予想」であって、証明されていないということ。さらに驚いたのは、その下に次の記述があることだ。

「[Borel1909] 殆ど全て (Lebesgue 測度の意味で) の実数は simply normal」

すでに 1909 年に、Borel がこの概念をつくっていて、しかもほとんどすべての実数が simply normal だということを示している点である。「ほとんどすべて」ということの定式化として、Lebesgue 測度の意味でという点がまた興味深い。「simply normal」というキーワードが分かったのでそれで検索してみると、たとえば、Worfram MathWorld の Normal Number という項目に詳しい記述があるのが見つかった³⁾。そこには、「ある数が Normal かどうかを判定する方法は未解決である」、「 π は 3000 万桁まで非常に一様に分布していることは調べられているけれども、 π , $\ln 2$, $\zeta(3)$, $\sqrt{2}$, e などの基本的な数学的定数が normal かどうかも分かっていない」というような記述がある。数学に関して、まだまだ未解決の問題が、これくらい身近なところにあることを高校生でも実感できる素材の一つが、ここにあることを実感した。同時に実感したのは、私たちはコンピュータを使って 100 万桁まで調べることを数十秒で行えるので、いろいろな場合を調べる中で、上記の考察をすることができたわけだが、Borel は 100 年以上前に、一体どうやって予想を立て、そして証明することができたのかということに関する敬意の念である。あるいは、Borel のような特別な人だけにとっては可能であったことを、コンピュータを使うことで、我々でも追体験することができるようになるのかもしれないという点である。

(4) 一応の終結と次の問題への展開

上記のように、いろいろな数学的探究が進められてきた話題であることが明らかになり、納得が深まり、「ほとんどの無理数が normal であるが、それはほぼ証明不可能なことである」ことが分かることにより、ここから先はかなり難題(ほぼ不可能)であることを実感した。しかし、一方で、別の疑問が浮かぶようになった。

1) 問題 9: 「ある数が『乱数』のようだ」ということの定式化として、normal という概念は妥当なのだ

ろうか。

無限に続く小数展開での数字の出方が均一であるかどうか注目する概念なので、有限桁数での分布がどうなっているかまわらない。もし π が normal であるとすれば、100 桁までを 1 に変えた数に関しても、その後の桁での分布は同じなので、やはり normal なはずである。1 万桁であっても、100 万桁であっても、操作しているのが有限桁であれば、やはり normal である。

しかし、初項をランダムに選択するとしても、そういう数列を「乱数列の代わり」として使うのは妥当なのだろうか。私たちが「現実に使う」のは有限の範囲の数を使って、有限個のサンプルを選択し、実験等を行うだけだからである。特にコンピュータ上で実験をする場合、現実には「ここまで用意しておけば十分であろう」という程度までの有限の世界の中でしか計算していない。「有限の範囲での一様性」を示す尺度のようなものの方が、「乱数列としての適切性」を表現しうるのではないだろうか。そのような研究はすでに数学の中で解決済なのかもしれないが、様々な問題への取り組みの中で探究が別の観点からの探究へと、大きく転換していくきっかけが得られ連続していくことが注目すべきことと考えている。

3. 考察

(1) 「未解決の数学問題」に触れた

今回の数学的探究の素朴なインパクトは、「私たちも『未解決の数学』を実感できた」ということだ。しかも、「高校生でも再体験できそうな事例」である。数学といえば、出来上がっているものというイメージが強い。昨年末に「ABC 予想」のニュースがあったが、その予想自体を理解することさえ難しい。「未解決の数学なんて、自分たちには関係ないこと」というのが、私たちの共通認識ではないだろうか。実験数学で取り組めるのは、数学の中でも特殊な分野なのかもしれないが、「未解決なことはまだまだたくさんある」ことを実感できた。同じようなことを高校生が実感できるような素材を見いだせるのではないだろうか。

(2) 「問題→実験→観察・吟味→(次に考えるべき)問題」のサイクルによる深まり

天羽が、試行錯誤をした結果 mathematica のプログラムをつくったときには、 π が 1000 桁表示されたときには「すごい」という感動があった。しかし、飯島がそれを受けて実行したときに、たとえ 100 万桁を観察しても、「mathematica はすごいね」と思っても、一方で、「それくらいできて当たり前でしょ」と感じていた。以前、 $\sqrt{2}$ を 1000 桁くらい表示するプログラムをつくったときにも、それを見せた学生からの反応「だから何なの？」というのは、「次に自分がすべきことは何ですか」「それがなければあまり面白く感じられない」という反応でもある。今回の場合、それが「問題→実験→観察・吟味→(次に考えるべき)問題」として何回もサイクルとして深まっていった。そしてその度ごとに、この問題への関わりが深まり、自分自身の問題としての取り組みが深まっていった。「 π を 100 万桁計算する」というような、私たちができないことを mathematica がやってくれるという傍観者的な立ち位置ではなく、このサイクルを回す主体は私たち二人だということが重要なのだ。

(3) 「変化させた点は 2 種類だけだけど豊富なことを実感させてくれた」数行のプログラム

今回の数学的探究の大きな特徴は、プログラムを使っているけれども、その使い方は極めて単純で、天羽がつくったプログラムの中の 2 つの変数を変化させるだけのことである。おそらく、今回のように、短いプログラムなのだけど、その一部を変えるだけで数学的に深い結果に到達できるようなものが、高校生向けといえるのではないだろうか。

(4) ときどき現れる数学的推論

今回の数学的探究では、単に `mathematica` での実験を行っただけではない。「有理数は乱数的(正確には `normal`)ではない」ことや、「`normal` でない無理数が存在する」こと、さらに「`normal` な無理数に対して `normal` でない無理数を一意対応させることができるので、`normal` でない無理数も同じ以上の濃度(個数)を持つこと」などを数学的推論で導いている。また、「乱数的とはどう表現したらいいか」などの場面において、数学的な定式化を行っている。「ある数が現れたときに次に現れる数もランダム」であることを観察するのに、100 進法に注目すればよいというアイデアを見出したのも数学的推論が活躍したと言えるだろう。実験数学の中で、通常行うような数学的推論等がどう現れるのかを実感する一例になるのではないだろうか。逆にいえば、高校生なりの数学的推論が発揮できるようなチャンスを見つけていくことが、数学の中で ICT を使いこなしていく上で大切だと実感した。

(5) コンピュータによる実験で実感する「過去の数学者の偉大さ」

`Simply normal` の概念に関して、1909 年の Borel が登場したのには、本当に驚いた。一体どれだけの計算をして、どれだけの観察をしたのだろうか。いや逆に、計算でなく、どういう推論や洞察をしたのだろうか。100 万桁まで 15 秒で計算してくれるような道具をもった私たちが実感するようなことを、Borel はほぼ素手で発見・考察し、論文を書いていたのだ。あるいは、Borel がそのような問題や概念を形成していったのは、こういう実験数学的なアプローチではないとしたら、純粋数学のどういう問題意識からだったのだろうか。高校生においても、そういう理解や感動の仕方もありうるのではないだろうか。

(6) 「一定の結果を得てから調べる」ことの利点

最初から「こういうものだ」ということが分かっていたら何も面白くない。今回の数学的探究の中で実感したワクワク感は、生徒にも再体験させてあげたい。自分の力で次の問いを見つけられる限りは、独力で探究を進めさせてあげたい。一方、今回も一定の結果を得たところで、自分たちなりのキーワードとしての「乱数」とか「 π 」あるいは「 $\sqrt{2}$ 」を検索していく中で、先人たちは「`simply normal`」という概念を使って探究していたことや、その周辺でどういう研究が蓄積されているのかを知ることができた。自分たちの興味・関心に関して他の人々はどういう取り組みをしてきたのかを知り、自分たちがしてきたことを位置づけ、次にすべきことを探していくということは、web が当たり前の今の時代なら、不可欠なことであろう。その調べる活動が早過ぎると、「すべてのことはし尽くされている」と思うだろう。どのタイミングが適切なのか。今後検討すべき点の一つとして実感した。

4. おわりに - 一つの課題としての「数学的探究で『記録に値すること』の明確化」

今回の私たちの数学的探究を通じて、実は客観的な意味で数学的に新しいことはなにも見つかっていない。新しい方法が見つかったというわけでもない。Worfram MathWorld に掲載されているように、調べてみたらどこかの誰かがすでに詳しく調べて論文等に行っていることばかりのはずである。では、今回の取り組みは全く意味がなかったことになるのだろうか。学問としての数学研究としては、そうかもしれない。しかし、教育研究として考えるなら、私たちはこういうプロセスの中に、文字通り「主体的・対話的で深い学び」を実感している。そのような学びを記述し、評価するための枠組みを、私たちは持っているだろうか。

また、そこで主役になるのは、主観的には数学の世界が大きく変化していく様相であり、それを導いていくのは、探究のサイクルを進めていく論理的思考であり、そこで生まれていくさまざまな感情や信念である。それらをきちんと記述し、「主体的・対話的で深い学び」そのものを実感・共有・深化させていくような「言語表現」とくに、「レポートの記述様式」を私たちは持っているだろうか。

実践可能なさまざまな教材を開発していくことと並行して、それらの方法論も確立していくことの必要性を実感している。今後の課題としたい。

注

1) 飯島(2017), ICT を利用した算数・数学での探究のサイクルについて・完全数などについての探究事例を手がかりに-, イブシロン, vol.59, pp.7-18

2) 縫田光司(産総研情報セキュリティ研究センター), 擬似乱数の安全性評価とルート 2 の二進数展開, 京都大学 GCOE セミナー, 2010 年 11 月 13 日, https://staff.aist.go.jp/k.nuida/talk_20101112_2.pdf

3) <http://mathworld.wolfram.com/NormalNumber.html>

備考

本稿は、科学研究費補助金 基盤 C(17K00967) 「テクノロジーを利用した数理的現象の探究の教材開発と授業実践」(研究代表者 飯島康之)の支援を受けている。