

超音波距離センサを活用した「理数探究」向け教材の実践

ーボールが繰り返しバウンドする現象に潜む 2 次関数の探究ー

数学科 天羽 康

次期学習指導要領の改訂において、「理数探究」の新設が予定されており、ICT 機器の活用の充実も求められている。また、「理数探究」に取り組むにあたり、深い探究を伴う教材、ICT 機器を扱うような教材、理科の現象を数学で探究するような教材を蓄積していくことが今後の課題である。

一昨年度から新科目「理数探究」に向けた ICT 機器を活用した独自教材を開発し、実践している。本稿は昨年度に本校のシンポジウムで 1 年生を対象に実施した独自教材「ボールが繰り返しバウンドする現象に潜む 2 次関数」の追実践の記録と考察である。今年度は 2 年生理系生徒の中から希望者 4 名を対象に実践した。

<キーワード>理数探究 ICT 機器 超音波距離センサ

1. 研究の背景と目的

平成 29 年度から平成 30 年度において愛知教育大学大学院教育学研究科数学教育学専攻へ内地留学しており、飯島康之教授（愛知教育大学）の指導のもと、理論的な研究を中心に「理数探究」に向けた教材の開発を行った。

平成 29 年度に取り組んできた研究では、実験結果の処理が簡単にできる超音波距離センサに注目し、実験を通して重力と摩擦の関係を探る教材を開発し、高校 1 年生を対象として行った授業実践をもとに成果と課題を考察した。研究において、モーションセンサ(島津理化)という超音波距離センサを使用し、検出したデータを PASCOairlink(島津理化)を用いて iPad と Bluetooth 接続をし、iPad のアプリケーション「SPARKvue」で解析を行った。

さらに平成 30 年度には、「ボールが繰り返しバウンドする現象」に着目し、ICT 機器を活用して数学的な思考のサイクルが中心となるような教材を、扱う学年と目標によって複数の教材化を行った。その中の 1 つについて、附属高校第 1 学年を対象とした授業実践に向けて更なる授業設計をより詳しく行い、11 月に行われた本校実施の高等学校シンポジウムにおいて、公開授業を行い検証することができた。実験もかなり円滑に行え、数学的な思考のサイクルがまわっていたといえる。

令和元年度には、そこで得た示唆を基に、6 月～10 月に高校 2 年生を対象とした授業設計を行った。11 月～12 月に 2 年生理系生徒の中から希望者を募り、協働学習の形態で授業実践を行い、授業の結果を踏まえて教材の適切性について考察を行った。

2. 教材と授業構想

(1) 独自教材「ボールが繰り返しバウンドする現象に潜む 2 次関数」について

平成 29 年度の研究では、超音波距離センサとデータロガーを活用することで、正確にデータを収集することができること、すぐに可視化してくれるので実験のやり直しが短時間で繰り返すことができる

わかった。平成 30 年度は、可視化されたデータをデジタル的に利用し、実験回数を減らしつつ数学の世界での思考のサイクルが回るような教材の開発をした。

スタンド上部に超音波距離センサを固定し、ボールが繰り返しバウンドする現象を図 1 のような実験装置で計測すると、図 2 のようなデータが得られる。

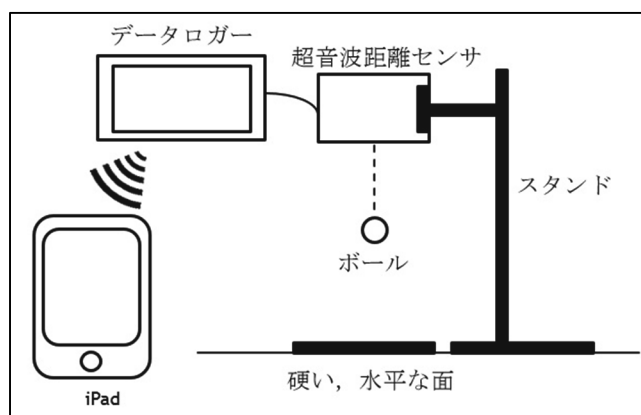


図 1 実験装置

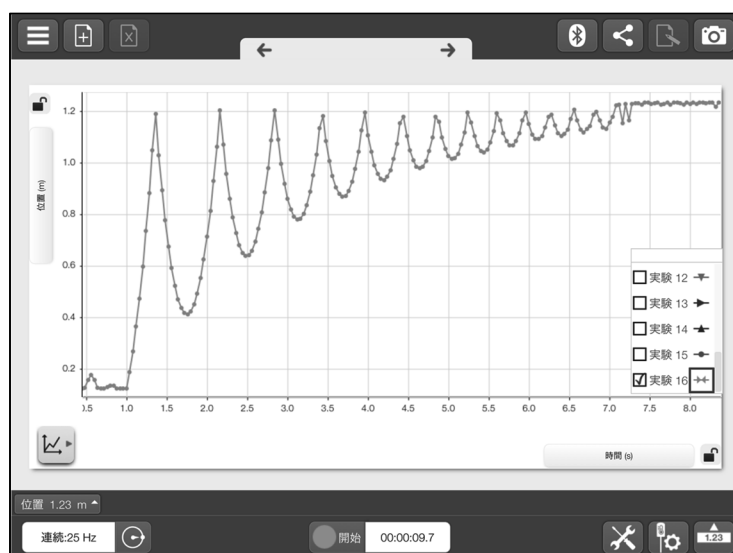


図 2 実験で得られたグラフ

この実験結果を観察することで「繰り返し現れる二次関数は相似か合同か」「頂点の軌跡を結ぶとどのような関数になるか」「そもそも地面に接していないように見えるのはなぜか」「頂点における高さの比や時間の比はどうなっているか」「バウンドは永遠に続くのだろうか」といった様々な問いが生まれ、既習内容に応じた方法で解決することができる。

平成 30 年度の実践は高校 1 年生の 1 学期の学びを振り返りつつ追及できるように、課題を「繰り返し現れる 2 次関数は相似か合同か」に設定した。

今年度の実践は数学Ⅱ「微分法と積分法」や数学 B「等比数列」、物理基礎「自由落下」「反発係数」といった高校 2 年生の学びを振り返りつつ追究できるように、課題を「繰り返し現れる 2 次関数の頂点の軌跡はどのような関数か」に設定した。

(2) 授業計画

令和元年 11 月～12 月、本校の第 2 学年理系生徒の中から希望者を募り、4 名を対象に 4 時間で実践した。なお、生徒は、1 年次のシンポジウムでの授業を受けた生徒が 3 名、受けていない生徒が 1 名い

ることから、超音波距離センサの扱い方の復習から始めた。今回の授業では昨年度と同様にモーションセンサ(島津理化)という超音波距離センサを使用し、検出したデータを PASCOairlink(島津理化)を用いて iPad と Bluetooth 接続をし、iPad のアプリケーション「SPARKvue」で解析を行った。(図 3)

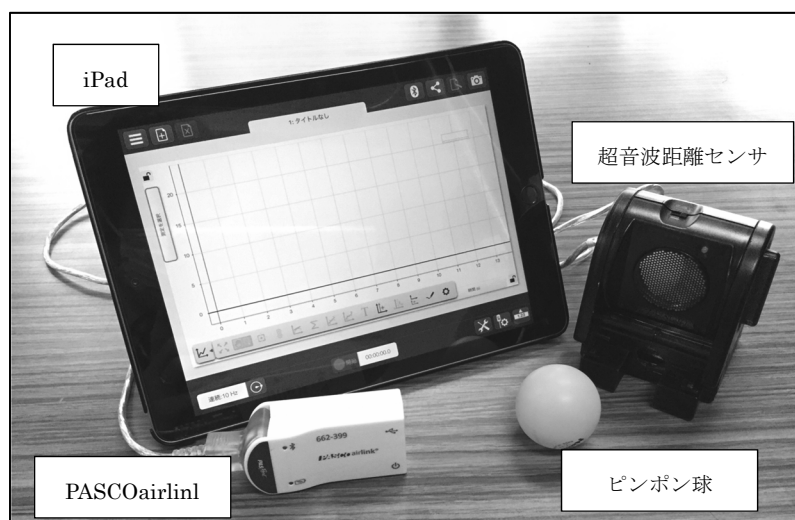
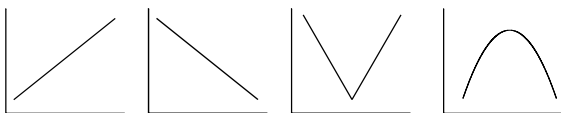


図 3 超音波距離センサと接続機器

表 1 授業計画

時	学習のテーマ	学習内容
1	グラフから運動を読み取る	次のグラフになるように動いてみよう。 
2	「超音波距離センサの扱いに慣れる」	超音波距離センサを活用し、ピンポン球を自由落下させデータを取得する。得られたデータから重力加速度と、ピンポン球の反発係数を求める。
3～4	「繰り返し現れる 2 次関数の頂点の軌跡はどのような関数か」	ピンポン球を自由落下させて得られたグラフの各頂点の座標を Excel にまとめ、重力加速度や反発係数の値を利用してモデル化を行う。理想化された状態での定式化を行う。

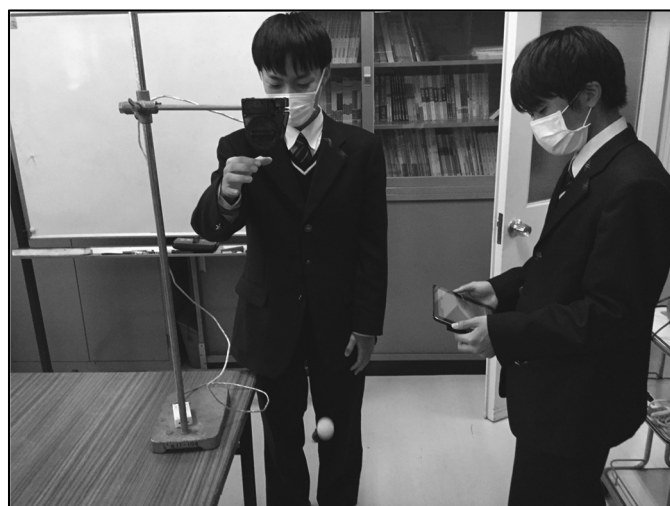


図 4 実験の様子

3. 分析と考察

本実践は、昨年度 1 年生を対象に実施した「繰り返し現れる二次関数は相似か合同か」（天羽、2019）の追実践であるが、先に述べたように 1 年次に学んだことの復習を兼ね、1 時間目には超音波距離センサの操作方法を確認した。以降の時間では、グループでの分析を主な活動として、必要に応じて数学的な支援を行った。以下、3 時間目、4 時間目の授業展開に沿って、生徒の学習活動の様子を取り上げ、考察した。

(1) 実データを基に Excel を用いた解決

実験結果のグラフ（図 2）を見ることで、頂点の軌跡について予想させたところ、①1 次関数②指数関数③2 次関数の 3 つに分かれた。

データロガーの回帰曲線の機能はデータ全部を基に近似曲線を表示するため、頂点だけを選んで近似曲線を表示することはできない。そこで、iPad 上の実データの表を表示し（図 5）、得られたデータの中から頂点の座標（らしき点）のデータのみを抜粋し、パソコンで Excel に入力し検証することとした（図 6）。

Run 1: 時間 (秒)	Run 1: 位置 (m)	Run 1: 速度 (m/s)	Run 1: 加速度 (m/s ²)
0.00	0.178	0.029	-0.262
0.05	0.179	0.019	-0.287
0.10	0.181	-0.005	-0.223
0.15	0.178	-0.012	-0.020
0.20	0.179	-0.002	0.080
0.25	0.178	0.002	0.055
0.30	0.179	0.007	0.004
0.35	0.180	-0.005	0.209
0.40	0.178	-0.002	1.273
0.45	0.179	0.059	3.808
0.50	0.179	0.276	8.142
0.55	0.185	0.905	11.686
0.60	0.265	1.634	11.594
0.65	0.362	2.133	9.560
0.70	0.479	2.591	6.131
0.75	0.620	2.934	-1.896
0.80	0.787	2.779	-16.486
0.85	0.965	1.297	-29.804
0.90	0.960	-0.959	-28.065
0.95	0.811	-2.157	-13.198
1.00	0.685	-2.145	0.587
1.05	0.587	-1.728	7.425
1.10	0.513	-1.222	9.585

図 5 実験で得られたデータ

	時刻(秒)	頂点の高さ	頂点の高さ(実)
			1.082
1	1.20	0.443	0.639
2	1.90	0.613	0.469
3	2.45	0.732	0.350
4	2.95	0.821	0.261
5	3.40	0.873	0.209
6	3.70	0.921	0.161
7	4.05	0.947	0.135
8	4.35	0.969	0.113
9	4.65	0.990	0.092
10	4.90	1.008	0.074

図6 頂点の座標（らしき点）のデータ

表とグラフを見比べると生徒たちは自然と意見を出し合い、隣接する2頂点の平均変化率を計算し始めた。複数の平均変化率の値がそれぞれ異なる値をとることから「頂点の軌跡が1次関数でない」と結論づけた。次に、反発係数を考慮すると高さは指数関数的に減少することから「頂点の軌跡は指数関数になるのではないか」と予想を立てたが行き詰まったため、Excelの近似曲線の表示機能を用いさせた。Excelの近似曲線の表示機能を用いると、かなり高い精度で2次関数にフィッティングすることがわかった。(図7)

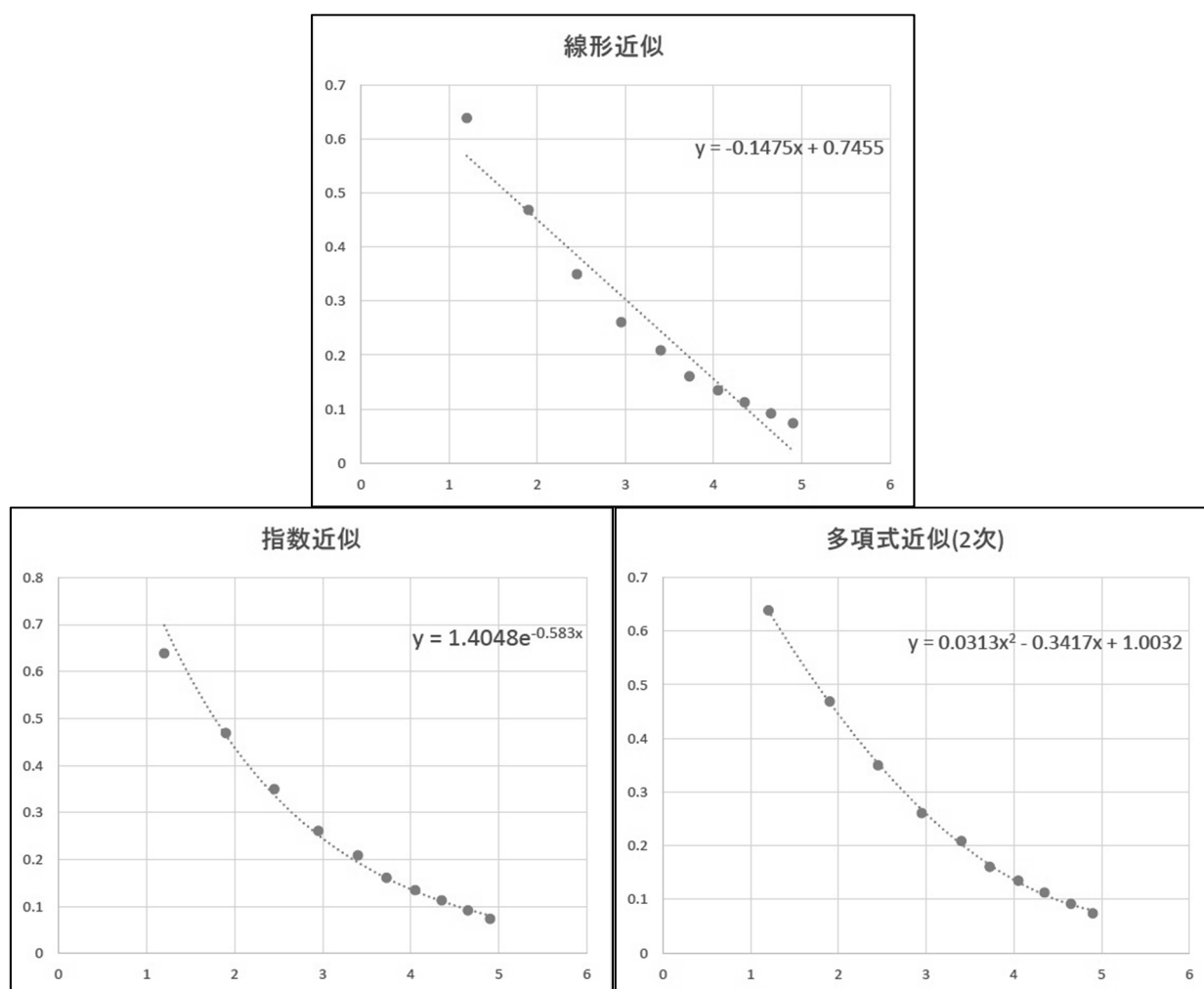


図7 実データを基にした近似曲線

(2) 数学的にモデル化した解法

実データで近似曲線を利用すると、頂点の軌跡は 2 次関数にかなり近い関数であることが分かった。果たしてそれは正しいのだろうか。理想的な状態であると仮定して頂点の座標を漸化式で表し、Excel でシミュレーションを試みさせた。

ピンポン玉がバウンドするときの反発係数に注目させ、連続した 2 回のバウンドの跳ね返る高さの比 ($h_{n+1} \div h_n$) を計算させるとほぼ一定になることがわかった。(図 8)

	時刻(秒)	頂点の高さ	頂点の高さ(実)	反発係数eの2乗
			1.082	
1	1.20	0.443	0.639	0.7340
2	1.90	0.613	0.469	0.7463
3	2.45	0.732	0.350	0.7457
4	2.95	0.821	0.261	0.8008
5	3.40	0.873	0.209	0.7703
6	3.70	0.921	0.161	0.8385
7	4.05	0.947	0.135	0.8370
8	4.35	0.969	0.113	0.8142
9	4.65	0.990	0.092	0.8043
10	4.90	1.008	0.074	
				0.7879

図 8 連続した 2 回のバウンドの跳ね返る高さの比

どの高さにおいても同じ反発係数で跳ね返ると仮定すると、反発係数 e を表の平均値から

$$e = \sqrt{0.7879} \approx 0.8876$$

とする。仮に 1m の高さからピンポン玉を落下させた計算を Excel で行わせた。

ここで、最初の高さを $y_0 = 1$ とおく。 n 回バウンドしたときの頂点の高さ y_n と $(n + 1)$ 回バウンドしたときの頂点の高さ y_{n+1} の関係は、反発係数 e を用いて

$$y_{n+1} = e^2 y_n$$

と表すことができる。また、 $(n + 1)$ 回バウンドしたときの頂点の時刻 x_{n+1} は n 回バウンドしたときの頂点の時刻 x_n に、高さ y_n から落ちる時間と高さ y_{n+1} まで跳ね上がる時間を加えたものなので、表にまとめると以下ようになった。

	x	y
1	0	1
2	1.183447	0.786769
3	2.233165	0.619005
4	3.164265	0.487014
5	3.990151	0.383168
6	4.722711	0.301465
7	5.372492	0.237183
8	5.948848	0.186608
9	6.460076	0.146818
10	6.913535	0.115511

図 9 モデル化した表

近似曲線の表示を用いると、2 次関数に一致することがわかった。(図 10)

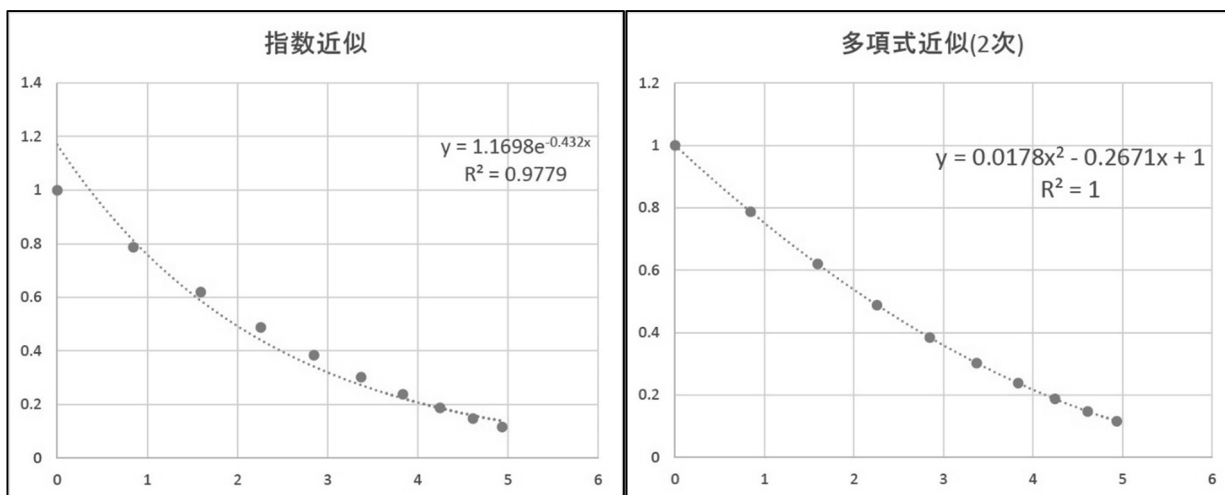


図 10 シミュレーションによる近似曲線

(3) モデル化し、数学を用いた解決（数列）

次に、現象をモデル化し、頂点の軌跡が 2 次関数となることを数学的に証明することを試みさせた。自由落下の公式 $y = 5t^2$ と、反発係数 e ($0 \leq e < 1$) を用いると、高さ $h_0 = 5$ からピンポン玉を落下させたとき、 n 番目の頂点の座標 (x_n, y_n) は、

$$\begin{aligned}
 x_n &= 1 + 2e + 2e^2 + \cdots + 2e^{n-1} + e^n \\
 &= (1 + e + e^2 + \cdots + e^{n-1}) + (e + e^2 + \cdots + e^{n-1} + e^n) \\
 &= \frac{1 - e^n}{1 - e} + \frac{e(1 - e^n)}{1 - e} \\
 &= \frac{(1 + e)(1 - e^n)}{1 - e} \\
 y_n &= 5(e^2)^n = 5e^{2n}
 \end{aligned}$$

であるため、

$$x_n = \frac{(1 + e)(1 - e^n)}{1 - e} \Leftrightarrow e^n = 1 - \frac{1 - e}{1 + e} x_n$$

より、

$$y_n = 5 \left(1 - \frac{1 - e}{1 + e} x_n \right)^2$$

となる。したがって、頂点の軌跡は 2 次関数になることが示された。

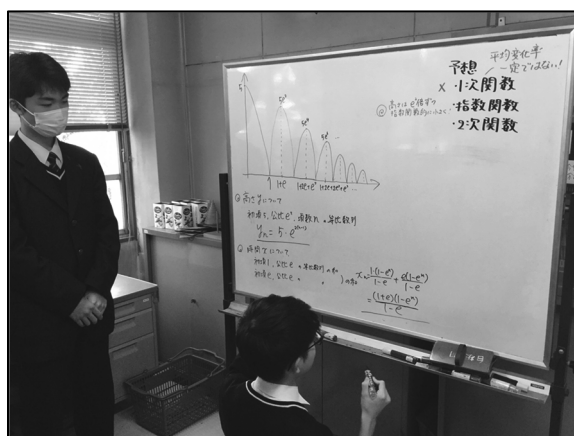


図 11 検証の様子

4. まとめ

本実践では、ICT 機器の活用を前提とした問題解決型の教材を開発し、生徒の学習の様相をまとめた。生徒にとってはハードルの高い、自由度の高い課題であったものの、生徒の学習は活発で、概ね自分たちなりにデータと向き合う生徒が多かった。実験ではセンサから常に真下に落下させるのは難しく、実験で得られたデータには誤差や外れ値が発生したものの、実験に対して意欲的に取り組む姿が印象的であった。Excel を活用したことで、手計算では時間がかかるような計算や小数が多く出てしまうような計算を即座に検証でき、理想状態のシミュレーションを生徒が主体的となつてすることができた。加えて、得られたデータから推論することで数学的な思考のサイクルがまわっていたといえる。また、数学ⅡBや物理を学んでいる高校2年生にとっては、実験で得られたグラフを基に「頂点の軌跡がどのような関数になるか」と感じることは自然なことであり、また予想が多様になることから課題の適切性を実感することができた。

5. 今後の課題

現在、「理数探究」や「総合的な探究の時間」などに代表される様に、探究的な学びや ICT 機器の活用の充実化も求められている。今後、深い探究を伴う教材、ICT 機器を扱うような教材、理科の現象を数学で探究するような教材を蓄積していくことと、個々の学習の成果をどう評価するかが今後の課題である。

謝辞

本研究の一部は、令和元年度科学教育研究費奨励研究（19H00116）の助成を受けている。

参考引用文献

天羽康（2018）：「数学科での ICT 機器を活用した新科目『理数探究』に関わる授業実践―超音波距離センサを用いた活動を中心に―」．日本科学教育学会研究会研究報告. Vol.32 No.2. 17-22

天羽康（2018）：「ピンポン玉が繰り返しバウンドする現象の数理的探究について」．日本科学教育学会研究会研究報告. Vol.32 No.10. 65-70

天羽康（2019）：「数理的探究における思考のサイクルを回す教材開発と授業提案―ボールが繰り返しバウンドする現象を題材に―」．研究紀要第 46 号. 37-56

文部科学省（2016）：「高等学校の数学・理科にわたる探究的科目の在り方に関する特別チームにおける審議の取りまとめについて（報告）」．

http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/070/sonota/1376995.htm

文部科学省（2016）：「次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめ（第2部）」．

http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/_icsFiles/afieldfile/2016/09/09/1377021_1_4.pdf

文部科学省（2018）：「高等学校学習指導要領解説」．

http://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/1407074.htm