

数理コンテスト「A-lympiad」を利用した問題解決の実践

—学力の三要素のバランスの良い育成を目指して—

数学科 増田朋美

現在、日本の高校教育では、学力の3要素「知識・技能」「思考力、判断力、表現力」「主体性を持って多様な人々と協働して学ぶ態度」のバランスの良い育成、英語運用能力の充実が強く求められており、大学入試改革の動向や告示された新学習指導要領からもそれらの強烈的なメッセージを受け取ることができる。本研究では、これらの求められる新しい学力を育成するための一助として数理コンテストを利用した。

本稿では、昨年度2年生の有志4名が参加した数理コンテスト「第1回日本数学 A-lympiad」での実践の記録と考察をまとめる。なお、この数理コンテストは、オランダのフロイデンタール研究所が主催する「Math A-lympiad 世界大会」の国内予選を兼ねており、国際大会に出場するチームを選抜する目的も持つ。このため稿の中ではコンテストが由来するオランダの数学教育についても触れる。

<キーワード> A-lympiad 問題解決学習 オランダの数学教育 新しい学力

1. はじめに

現在、日本の高校教育では、学力の3要素「知識・技能」「思考力、判断力、表現力」「主体性を持って多様な人々と協働して学ぶ態度」のバランスの良い育成、英語運用能力の充実が強く求められており、大学入試改革の動向や告示された新学習指導要領からもそれらの強烈的なメッセージを受け取ることができる。もちろん、これらは高等学校で3年間の総合的な教育活動の中で育成されるべき学力・資質であるものの、具体的にどのように各教科や教科横断的な学習活動の中で育むべきか、また、現在求められている「新しい学力」の獲得に向けた教材やその実践例の情報はまだまだ不足している。

一方、ニュージーランドの高等学校視察や国際会議での各国の指導者・研究者との情報交換を通じて、海外ではプロジェクトベースの問題解決学習が充実し、その評価が大学入試にまで活用される現状を知った。確かに、これまで、より良い解決を競うプロジェクトベースの問題解決をする数々のコンテストに生徒と参加し(増田他, 2018)、その際に生徒が見せた生き生きと活動する様相から、その意義を目の当たりにした。本稿では、これら求められる新しい学力を育成するための一助として参加した数理コンテスト「第1回日本数学 A-lympiad」での実践の記録と考察をまとめ、報告する。

2. 国際数理コンテスト「Math A-lympiad」とは

オランダのユトレヒト大学フロイデンタール研究所が主催する「Math A-lympiad」は、後期中等教育の大学準備教育における「数学A」履修者の第11-12学年の生徒(高校2年生から3年生)を対象としたコンテストである。オランダの「数学A」の中心内容は、離散数学、確率・統計、若干の微積分で、数学の応用、モデル化、高次の思考、問題解決のプロセスが重要視されており、人文・社会・

経済系の大学に進学する生徒に必要な数学の単位である。なお、オランダの教育制度については次章にまとめるが、大学で工学、自然科学系を学ぶいわゆる理系の生徒は「数学 B」を履修する。「数学 A」は純粋・抽象数学よりも実社会の数学の応用や問題解決プロセスを理想としているが、現実には教科書では適切な課題が不足しており、オープンエンドな問題解決の指導と評価を組織だつて行うことを目的として、1989年「Math A-lympiad」は始まった。要するに、「Math A-lympiad」は「数学 A」の教科とセットになっている点が重要である（大谷他、2005）。

コンテストは予選と決勝からなり、予選は毎年11月に行われ、オランダ・ドイツ・ベルギー・デンマーク等の高等学校1千校以上が参加する。各学校で優秀チームを推薦し、審査を通過したチームが3月に行われる決勝で新たに与えられた問題に取り組むことになる。この決勝（国際大会）では、各国から推薦されたチームが2日間かけて課題に取り組み、2日目の午後に英語で問題解決の解答をプレゼンテーションするのだが、Math A-lympiad 委員会は、これを半年かけて審査し、成績を発表する。

このコンテストの主な特徴は、次の通りである。

- ①同じ高校に在籍する3人から4人のチーム戦であること。
- ②英語で出題されること。なお、予選での解答は英語に限定されていない。
- ③1日（午前9時から午後4時まで）で課題に取り組み（決勝は2日間）、レポートを提出すること。
- ④実社会で起こりうる問題を読み解き、数学を利用してより良い解決を求める内容であること。
- ⑤出題内容は、自然科学・社会科学に広く及び、文系・理系の生徒を問わないこと。

つまり、数学の力のもとよりグローバル課題を発見する力、主体性や活発なコミュニケーションに基づく協働性、レポートを論理的に構成する力、英語力を総合して試されるコンテストだといえる。また、限られた時間の中でより良い解決をどう模索するか、チーム一人一人の個性や得意分野をどのように活かすか、などの戦略やマネジメント能力も必要である。

3. オランダの数学教育

(1) オランダの学校制度

国際数理コンテスト「Math A-lympiad」の理解を深めるため、主催しているオランダの教育事情についても触れておきたい。

まず、オランダの子どもたちは、初等教育の終了年である12歳に、全国共通学力テストであるCITO（Centraal Instituut Voor Toetsontwikkeling）テストを受験する。この結果と普段の成績を加味して、進路を決定する。Fig 1の通り、その中等教育制度は複線型であり、進路は3つで、

- ①VWO（大学進学教育コース：6年）中等教育を受ける生徒の20%程度がこのコースへ進む。
⇒WO（大学）への進学率は全体の10%程度
- ②HAVO（上級一般中等教育コース：5年）中等教育を受ける生徒の20%程度がこのコースへ進む。
⇒HBO（高等職業専門学校：4年）主に小学校教師、看護師、技術者などを育成する。
- ③VMBO（中等職業訓練教育コース：4年）
⇒MBO（中等職業専門学校：4年）主に警察官、准看護師、美容師などを育成する。他にもLBO（初等実務中等学校）等、1996年に導入された成人・職業教育法により、包括的な職業教育課程が提供されている。

とはいえ、ほとんどの中等学校が、このうちの2種類以上を提供しており、生徒は2～3年かけて、次の進路を決定するようである。いずれの学校も最終試験は全国共通の国家認定試験であり、卒業試

験をパスすれば、自由に上の学校を選択できる。(参考資料: <https://sekai-ju.com/life/nld/culture/4271/>)

これらのことから、そもそもオランダ国内で「Math A-lympiad」に参加が想定されている対象生徒は、文理問わないとはいえ、数学を含めた高次の学習が可能な、かなり限定的な層を対象にしていることがわかる。

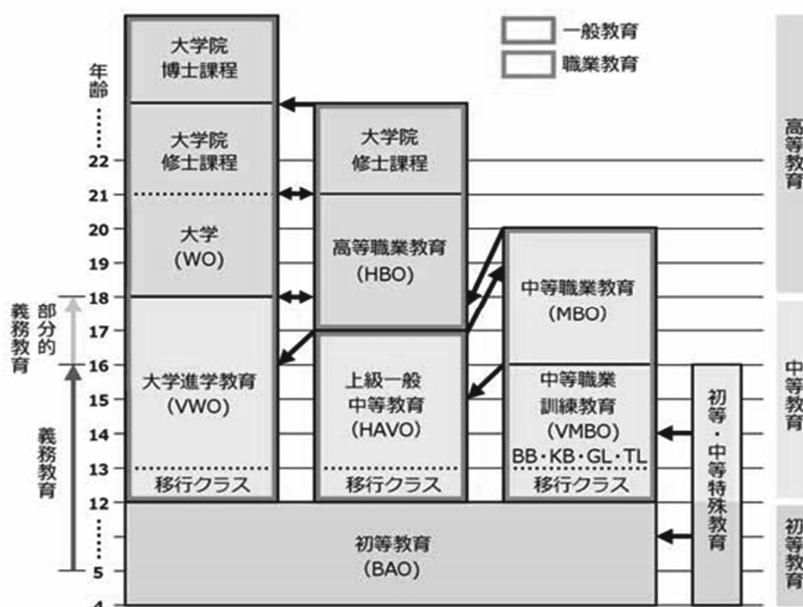


Figure 1 オランダの学校制度

(2) 世界の数学教科書の文章の分類の比較から

国名	物語的	物語に関連	グラフに関連	練習・問題	活動	実例
フランス	10%	6%	17%	48%	1%	9%
日本	20%	1%	22%	48%	2%	8%
オランダ	16%	5%	8%	63%	0%	4%
ノルウェー	15%	11%	10%	57%	0%	4%
スペイン	19%	17%	5%	23%	0%	30%
スイス	9%	2%	5%	74%	3%	6%
アメリカ	12%	2%	8%	65%	2%	10%

Figure 2 世界の中学2年の数学教科書比較

Fig 2 は、中学2年生に用いられている7か国の数学の教科書の内容を、分類して比較したものである(長崎, 2008)。前述の通り、オランダの「数学A」は純粹・抽象数学よりも実社会の数学の応用や問題解決プロセスを理想としている。しかしながら、現実には Fig 2 の通り、提供されている教科書では理想とする実社会の数学を経験するにふさわしい適切な内容・課題が不足している。もちろん「数学A」を履修する高校2年生から3年生の教科書を直接的に比較しているわけではないことを十分踏まえて述べるにしても、これよりも低学年の教科書において、日本より「練習・問題」の割合が多く、活動や実例の割合少ないことから、「Math A-lympiad」の実施は、『数学A』をはじめとして、オランダの数学教育の理想と現実のギャップを埋めるための1つの手段だった(大谷他, 2005)ことがわかる。これは日本の高校数学教育にとっても非常に示唆的である。

4. 第1回日本数学「A-lympiad」の実際

(1) 日程及び環境

日本でおこなわれる「A-lympiad」は、金沢大学が主催する。昨年度から「日本数学 A-lympiad」として、国内の高校の自校での参加が可能になった。第1回の日程等は次の通りである。

開催日時：2018年11月18日（日）午前9：00～午後4：00

開催場所：金沢大学および参加チーム所属会場

応募資格：コンテスト開催時に同じ高校に在学する高校1・2年生、または同じ中等教育学校に在学する4・5年生の者3～4名で構成されたチーム

注意事項：実施にあたっては、書籍・インターネットでの情報検索は認められているものの（引用参考文献として明示することは必要）、他者への質問助言は認められない。なお、問題は紙媒体で各々に配布される。

(2) 評価の観点

評価の観点は要項にあらかじめ示されている。

- ①最後まで成し遂げられているか。
- ②数字を用いる際、結果だけでなく過程を示しているか。
- ③図・表・グラフ等、数学的表現を適切に活用しているか。
- ④課題に対する考察が深いか。
- ⑤複数の方法がある中で、なぜ特定の方法を選択したか、その理由を述べているか。
- ⑥議論の前提が明確であり、飛躍はないか。
- ⑦読みやすさ、論の組み立て、引用・参考文献の明示、など。

5. 実践とその分析

(1) 課題と活動の概要

生徒に示された課題の概略（筆者訳）は次の通りである。原文は巻末資料にある。

通常、予防接種は、その流行を防ぐための最も効果的な方法です。ワクチンを接種すると、弱体化した関連ウイルスが注入され、この病気に対する抗体が生成されて免疫を持つので、ウイルスに遭遇しても病気になることはなくなります。しかし、予期しない病気の発生がある場合、集団全体に予防接種を行うのに十分なワクチン用量が常に利用できるとは限りません。最良の成果を得るために、どのように予防接種を受けさせるか考える必要があります。

テーマは、ワクチンの分配です。最初に、インフルエンザの流行がどのように発生するかを調査し、次に人口の一部のみにワクチン接種することでどのように流行を防ぐことができるかを調査しましょう。

課題 1 文章を読んで、「9月30日には誰も免疫がなかった。」「たとえインフルエンザに感染しても、必ずしも症状が出るとは限らない。」の真偽について述べよ。

課題 2 クラブ内のインフルエンザ感染の実際の経過をグラフィックで示せ。

課題 3 3つの表を完成させよ。「V」は感染する可能性のある者。「Z」は感染者。「I」は免疫あり。残りの方々（空の正方形）は影響を受けやすい。誰もが毎日「隣人」と直接接し、1日あたり最大4人に感染する。

課題 4 最終的に全員がインフルにかかってしまうときのワクチン接種者の最小数（I）を調べよ。

課題 5 集団免疫効果を示すグラフを使って、カバー率（感染を免れる人）80%のワクチン接種率を求めよ。

最終課題 1

3つの中学校にはそれぞれ1000、2000、4000の生徒がいます。この3つの学校の委員会は、生徒をインフルエンザから最適に保護したいと考えています。ただし、学校で使用できるワクチンの数は限られており、合計で3000です。委員会では、インフルエンザに感染する生徒をできるだけ少なくするために、学校間でワクチンを最適に配分する方法を探っています。さまざまな分配とその影響を調査し、この調査に基づいて根拠のあるアドバイスを提供しましょう。

最終課題 2

最終課題1では、限られた数のワクチンを特定の状況に応じて異なる学校の生徒に分割する最善の方法を研究しました。前回の課題は、自分の学校の生徒同士は多くの接触があるが、他の学校の生徒とはあまり接触がないことを考慮しました。最終課題2では、利用可能なワクチンを可能な限り最良の配分する要因とその影響を調査します。ワクチンをグループに配分する際の一般的な運用手順をアドバイスしてください。

(2) 生徒の課題の取り組み

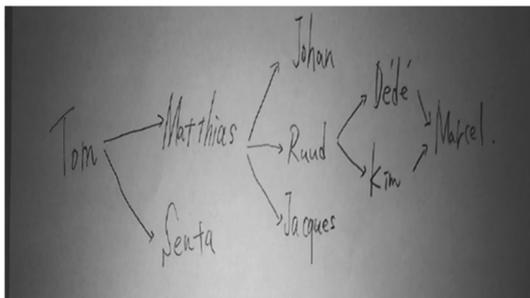
生徒4名は、コンピュータ教室で課題を受領し、日程と注意事項の説明を受けた後、課題の最初に示されている「ガイド」と「アドバイス」を共有した。そして、英訳の分担をし、時間を決めて再集合することにした。互いに分担したものを持ち寄って課題を理解し、2グループに分かれて小問5題に取り組んだ。また再集合して解答を共有し、最終課題は互いにアイデアを出し合って方向性を定めた。生徒の提出したレポートは次の通りである。

Assignment 1

1日目・・・正しい。Tomはインフルエンザに感染し、Sent、Matthiasはすぐにはかかっておらず、Monicaは10/21までは感染していないから。

2日目・・・誤っている。TomとMatthiasはインフルエンザに感染したと覚える前日に体調不良だったが、他の感染者についてはそのような記述がないから。

Assignment 2



Assignment 3

Situation 1

4	3	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	Z	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	2	3	2	3	4	5	6
4	3	2	3	2	1	2	3	4	5
5	4	3	2	1	Z	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	2	3	4	5
7	6	5	4	3	2	3	4	5	6
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7
9	8	7	6	5	4	5	6	7	8

上の表より、9日

Situation 2

4	3	2	I	4	5	6	7	8	I
3	I	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	Z	1	2	3	4	5	6	7
3	2	1	2	3	4	5	4	5	6
I	3	2	3	I	I	I	3	4	5
5	4	I	2	1	Z	1	2	3	4
6	5	4	3	2	1	2	3	4	5
7	6	5	4	3	2	3	4	I	6
8	7	6	5	4	3	4	5	6	7
I	8	7	6	5	4	5	6	7	8

上の表より、8日

Situation 3

I	I	I	I	I	I	I		I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	Z	1	I	I	I	I	I	I
I	I	I	I		I	I	I	I	I
I	I	I	I	I	Z	I	I	I	I
	I	I	I	I	I	I	I		I
I	I	I	I	I	I		I	I	
I	I		I	I	I	I	I	I	I
I		I	I	I	I	I	I	I	I

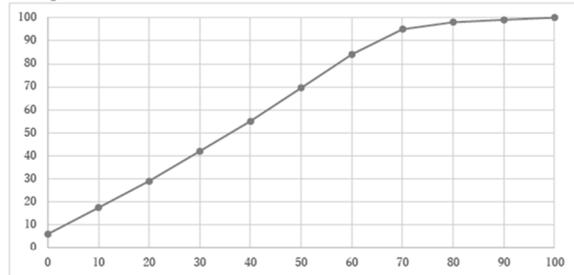
上の表において、空欄はすべて1で囲まれているため、これ以上感染することはないよって、感染が広がるのは1日

Assignment 4

3	4	5	5	5	5	5	5	4	3
4	6	7	6	7	7	6	6	6	4
5	7	7	1	7	6	1	1	6	5
5	7	7	7	7	1	6	6	7	5
5	6	1	7	7	7	6	1	6	5
5	7	6	7	1	5	1	6	6	5
5	6	1	7	5	1	6	6	1	4
5	7	7	7	1	6	6	1	5	5
4	6	7	7	6	6	1	5	6	4
3	4	5	5	5	5	4	5	4	3

この表は、その場所の人に感染した際に感染の拡大を止めるために何人の免疫を持つ人が必要かを示したものである。これより、14人

Assignment 5



このグラフは、縦軸に感染を免れる人、横軸にワクチンを受けた人をとったものである (ともに単位はパーセント)。

このグラフの縦軸が80になる横軸の点を探せばよいので、f=57

final assignment

Part 1 Middle part でのグラフより、4,000人の67%がワクチンを受けるとき、最も多くの人を守られることになる。このことから、2,700人分を4,000人の学校、300人分を2,000人の学校で使えばよい。そのとき、守られる人は4,676人

Part 2

人の数が多いほうのワクチンを打った人の割合が67%に近づくほど助かる人数が増えることから、ワクチンが4,000人の約67%である2,700本以下の場合4,000人の中にしてワクチンが2,700本より多くて、2,000人の約67%である1,350本を足した4,050本以下のときは4,000人の中の2,700人は必ずして、2,000人の中に残りの数をする。ワクチンが4,050本より多くて、1,000人の約67%の670本をたした4,720本以下のとき、4,000人の中の2,700人と2,000人の中の1,350人には必ずして1,000人には残りをするワクチンが4,720本以上のとき4,000人、2,000人、1,000人の順に100%になるように打っていく。これを表にまとめると次のようになる。

ワクチンの数(本)	1000人の中に打てる数(本)	2000人の中に打てる数(本)	4000人の中に打てる数(本)	助かる人数(人)
0	0	0	0	420
2700	0	0	2700	3900
4050	0	1350	2700	5640
4720	670	1350	2700	6510
6020	670	1350	4000	6790
6670	670	2000	4000	6930
7000	1000	2000	4000	7000

Figure 3 生徒の提出したレポート

(3) 結果の考察

評価の観点にしたがって、Fig 3の生徒の提出したレポートを筆者なりに評価する。

まずはこれだけのボリュームある課題を短時間で分担し、1つにまとめて提出できたことを非常に高く評価した。最後まで成し遂げられていた(①)。数字を用いる際、結果だけでなく過程を示しているかについては、課題3・4は添付されていた表を用いて、根拠としている。課題5のグラフは与えられたデータから、近似関数を導き出し、グラフを作成している。最終課題についても、得られた結果からワクチンの配分とカバー率・人数を示していることから、結果だけでなく過程が示されていると判断した(②)。図・表・グラフ等、数学的表現の適切さは、グラフや表に単位の明記がきちんとなされているものの、グラフタイトルがないことや補われている説明文の表現が不十分で分かりづらさは否めない。また、最終課題2は、課題の意図からも、ワクチンの本数の表のみでなく、ワクチンの配分を割合で示すグラフや表が適当であったと考える(③)。さらに、課題1・2の解答には

誤答もあり、課題文を十分には読み込めていないため、最終課題対しての考察は十分ではなかった(④)。それは、議論の前提として、現実社会でのインフルエンザの感染は、当然閉じられたコミュニティだけで起こるのではなく、いくつかのコミュニティの複合体であることを踏まえ(⑥)、複数の方法を提案した上で、どのように場面設定して、その方法を選択したかを述べなくてはならなかった(⑤)。結果的に、レポート全体が読みにくい印象になってしまった。もっと文献や資料を参考・引用して、既存にあるアイデアを有効に活用することもできたはずである(⑦)。

残念ながら、結果として、全国47チーム(180名)のなかで、受賞はかなわなかった。

6. まとめと今後の課題

今回の実践から、改めて、現在求められている「新しい学力」の獲得のために、このようなプロジェクトベースの問題解決コンテストに参加することが有効だと感じた。「A-lympiad」では、優良な教材と学習の場が提供され、競うことで評価が得られる。前章では、生徒のレポートを考察し、レポート全体にはまだまだ課題があると評価したものの、筆者は参加した生徒たちの取り組みを非常に高く評価している。今回コンテストに参加したメンバー4名は、学年の先生方の推薦によって理系クラスから選出された。一度、当日のシミュレーションをするため集まり、過去問を使って練習したものの、普段から部活やクラスでグループ活動をしていたメンバーではない。メンバー同士、互いの得意分野をなんとなくは把握し、多少の交流はあるものの、実際に、誰がどのようなコミュニケーションをして役割分担をし、問題解決をしていくか、筆者自身、非常に興味深かった。生徒たちの主体性や活発なコミュニケーションに基づく協働性が、正に試された。この点において、生徒それぞれの表現は控えめであったが、各自が責任をもって役割を遂行する姿勢や助け合う姿が見て取れ、実に理系男子のグループらしい効率的で協働的な仕事ぶりであった。また、翻訳機能を使わずこれだけのボリュームの英文の課題を短時間で把握する英語力が問われ、これを各々が遺憾なく発揮できた。またPCを使ったグラフや表の作成、近似関数の導出などは、それぞれが得意分野で活躍していた。

一方、課題もあった。一つは、レポートの評価でも指摘したが、表現力の未熟さである。数学的な表現を用いた記述は、概ね良かったものの、それを補う記述は不十分であった。また、レポート全体の構成も未熟であった。例えば、インフルエンザの感染やワクチン接種について資料や文献を引用したり、多面的なアプローチの提案があったりすれば、最終課題の論の展開も考察も深まっただろう。もちろん、これらは、経験を重ねることで高められる力である。逆に言えば、これらの力をつけるような学習活動をこれまで十分行えていなかったといえる。今後は、このような学習経験を積み重ねるためにも、数学のみならず、教科を横断して学校の教育活動全体で取り組んでいきたい。

参考・引用文献

増田朋美他. (2018). データでスポーツをしようー「データコンペ」3年目の挑戦からー. 統計数理研究所共同研究リポート399『統計実践研究』第10巻, 35-40

大谷実他. (2005). オランダの数学教育における創造性の育成: フロイデンタール研究所の「数学A-lympiad」. 日本科学教育学会年会論文集29, 253-256

長崎栄三. 算数・数学教科書のあり方ー国際比較を中心にー

https://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/tosho/004/gijiroku/08100711/004.htm

<https://sekai-ju.com/life/nld/culture/4271/>

金沢大学主催日本数学 A-lympiad www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/alympiad/

Vaccinating meaningfully



Colophon

The Mathematics Olympiad (Wiskunde Olympiade) is an initiative of the Freudenthal Institute, Utrecht University. The Olympiad committee is responsible for the organisation of the Olympiad and for producing the assignment. The committee consists of:

Tom Goris

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Instituut, Utrecht University

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Duitsland

Jacques Jansen

Strabrecht College, Geldrop

Kim Kaspers

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur

Mathematisch Instituut, Utrecht University

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem; Vrijeschool Zutphen VO, Zutphen

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Utrecht University

Secretariat:

Liesbeth Walther and Mariozee Wintermans

Freudenthal Institute, Utrecht University

Preliminary round Olympiad November 16, 2018

1

2

Guide for the preliminary round assignment for the 2018/2019 Mathematics Olympiad

This Mathematics Olympiad assignment consists of five (exploratory) assignments and two final assignments. The first five assignments are a run-up to the final assignments: all the knowledge and insights from these assignments can be applied in the final assignments.

General advice for working on this assignment:

- First read the full text of the assignment so you will know what you have to do.
- Keep an eye on the time you spend on the first five assignments; take plenty of time for the final assignments, at least three hours.
- If you divide up tasks within your team, discuss the results with each other after every assignment.
- Several questions use the word 'research'. Always indicate clearly for these questions what you research, possibly research simpler problems, go further than 'just answering the question', research alternatives. These will be criteria that the quality of your elaboration will be judged on.
- If you adapt certain approaches, methods or procedures while working on the assignments, describe your adaptations in your report and include why you made them.
- It may be a good idea to use Excel or another spreadsheet program for this assignment.

Handing in:

- The two final assignments
- Assignments 1 to 5 as appendices

When you hand in your work, the jury will receive a digital copy. If you have any appendices with your work, hand in everything in a zipped folder. Include the name of your school *and* your own names in the file name.

Judging:

These are some of the points that may be considered by the jury:

- Legibility and clarity of the final assignment;
- How complete the work is;
- The use of maths;
- The argumentation used and justifications of choices that have been made;
- The depth to which the various assignments have been answered;
- Presentation: form, legibility, structure, use and function of illustrations;
- (Mathematical) creativity in your elaboration of the assignments.

Have fun and good luck!

3

4

Introduction

Throughout history infectious diseases have caused millions of deaths. An apparently innocuous disease like the flu still claimed many victims in the twentieth century: more people died from the Spanish flu epidemic in 1918-1919 than had died in the First World War.

Over the last months infectious diseases like meningitis (caused by meningococcus), measles and rubella have been in the news a lot. Usually vaccination (inoculation) is the most effective way to prevent an epidemic.

When you are vaccinated, a strongly weakened form of the virus concerned is injected, which causes your body to start producing antibodies against this disease. When you next encounter the real, much stronger virus, you have become immune because of the antibodies you produced, and you can no longer get ill from it.

A regularly occurring problem with vaccination is however that when there is an unexpected outbreak of a disease there are not always enough vaccine doses available to vaccinate the entire population. You must then consider which groups (and in what numbers) can best be vaccinated for the best (and safest) result. This Olympiad assignment involves making these choices, i.e. allocating the available vaccines.

First we will explore how a flu epidemic can develop, then we will investigate how vaccinating only a part of the population can prevent an epidemic.

In this assignment it is important to distinguish between the following terms:

- Someone is **susceptible** (V) if he or she can be infected by the flu virus.
- Someone is **ill** (Z) if he or she has the flu virus and can infect others.
- Someone is **immune** (I) if he or she is not or no longer susceptible to the flu virus; this is the case either if you have been vaccinated or if you have had the flu.

We assume that every person will always fall exactly into one of these categories.

