Bulletin of Aichi Univ. of Education, 69（Natural Sciences），pp. 11 － 15, March, 2020

高校生に向けた数の性質と表現
－ 公開講座「数の不思議」－

岸 康弘　野崎 寛

数学教育講座

Properties and Representations of Numbers for High School Students: Open Lecture “Wonder of Numbers”

Yasuhiro KISHI　and　Hiroshi NOZAKI

Department of Mathematics Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

1　はじめに

本稿は，筆者たちにより2019年7月23日24日に愛知教育大学で行なわれた，高校生向け公開講座「数の不思議」についての報告である．23日の講座では岸により数の性質が扱われ，24日の講座では野崎により折り紙作図が扱われた．両日ともに，学校教育では扱われることの少ない『整数や実数自体の性質の面白さ』について焦点を当てたものである．本稿では，講座で扱った内容，およびその数学的な背景について紹介したい．

2　数の性質

2.1　素数の無限性

素数とは，正の約数を1と自分自身の2つだけしか持たない2以上の整数のことである．講座では，素数の定義を述べた後，15以下の正の整数に対して正の約数をすべて挙げて素数を見つける，という演習を行った．基本的で容易な計算ではあるが，講座を始めるにあたってウォーミングアップ的な意味合いもある．そして，素数の無限性を証明した．講座で解説した証明方法をここで述べておく．

定理． 素数は無限に存在する．

証明． pを素数とし，pよりも大きな素数を作ることができればよい．そこで，p以下のすべての素数2，3，5，7，...，pに対し，

$$N = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p + 1$$

を考える．Nが素数のときは，$N > p$なので，pより大きな素数Nが作られたことになる．Nが素数でないときは，Nはある素数qを約数に持つ．このとき，Nはp以下のどの素数で割っても割り切れない（余りが1となる）ため，qはpよりも大きな素数となる．　□

さらに続けて，$4n - 1$の形の素数が無数に存在することを上と同様の方法で証明した．講座が始まったばかりのまだ元気なうちに，やや重い証明を2つ取り組んでもらった．なお，この主張は，代数的整数論において重要な役割を持つ次の定理に拡張されている：

ディリクレの算術級数定理． aとbの最大公約数が1ならば，$an + b$の形の素数は無限に存在する．

2.2　フェルマー素数

続いて，フェルマー素数という特別な形をした素数に焦点をあて考察をした．フェルマー素数の定義は次の通りである．

定義． 0以上の整数nに対し，

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

が素数になるとき，F_nをフェルマー素数と呼ぶ．

まずはフェルマー素数とはどういったものかを理解するため数値実験することから入り，表1を完成してもらう．短い時間ではあったが，多くの受講生が$F_5 = 2^{2^5} + 1$まで頑張って計算をしてくれた．素数かどうかの判定については，F_3のあたりから戸惑う受講生がいる中で，躊躇なくF_5まですべて素数と断定してしまう受講生もいる．講座では，フェルマーがフェルマー素数についてパスカルに充てた手紙を紹介し，またF_n

表 1: フェルマー素数

n	F_n	素数？
0	$2^{2^0}+1=2+1=3$	○
1	$2^{2^1}+1=2^2+1=$	
2	$2^{2^2}+1=2^4+1=$	
3	$2^{2^3}+1=$	
4	$2^{2^4}+1=$	
5	$2^{2^5}+1=$	

の素因数分解についての現在までの歴史を簡単に解説した．なお，現在知られているフェルマー素数は$F_0=3$，$F_1=5$，$F_2=17$，$F_3=257$，$F_4=65537$の5つのみであり，上記F_5は

$$F_5=4294967297=641\times 6700417$$

と素因数分解され，素数ではない．

2.3 レピュニット素数

特殊な表示を持つ素数の2つ目の例として，レピュニット素数を扱った．レピュニット素数とは，すべての桁の数が1であるような素数のことである．（レピュニット（repunit）はrepeatとunitを組み合わせた造語である.）講座では，計算機を使ってレピュニット素数を素因数分解させた数値実験の結果を用いて，一般に与えられた数が素数であるかどうかの判定が難しいこと，またそのこと以上に素因数分解することが難しいことの解説をした．さらに，1を38個並べた38桁の整数

$$11111111111111111111111111111111111111$$

の素因数分解を考察した．

2.4 正p角形の作図

ここで，話題を少し転換し，講座2日目の内容に関連する正多角形の作図について取り扱った．まず初めに，正3角形，正5角形をコンパスと定規のみを用いて作図する方法を解説する．（受講生の感想で分かったことであるが，この正5角形の作図は好評だったようである.）そして，ガウスが定規とコンパスのみを用いて正17角形が作図可能であることを発見したことを伝える．3，5，17，...，何か気づくことはないだろうか，と問いかけ，次の定理を紹介する：

ガウスの作図可能定理． pを素数とするとき，正p角形が定規とコンパスのみで作図できるためには，pがフェルマー素数のときのみに限る．

フェルマー素数と幾何とのつながりが現れたところで，本節を終える．

証明について講座では一切触れなかったが，円分体の理論とガロア理論を用いて示される．また，ガウスの作図可能定理より次が導かれる：

定理． nを3以上の整数とするとき，正n角形が定規とコンパスのみで作図できるためには，nが$n=2^m p_1 p_2\cdots p_k$（ただし，m，kは0以上の整数で，p_iは異なるフェルマー素数）の形をしたときのみに限る．

2.5 円周率

初日最後の話題は円周率πである．円周率は小学校教育においても重要な数であり，また初めて目にする「無理数」でもある．講座では円周率の定義を述べた後，円周率と円の周の長さ，円周率と円の面積の関係を確認する．そして，πの値について，$\pi<4$となること，$\pi>3$となること，$\pi<3.5$となること，をそれぞれ，円と正方形との面積の比較，円と正6角形との周の長さの比較，円と正6角形との面積の比較，をすることで証明を与えた．

このように，正多角形を用いて円周率の近似値を求めるという手法は古くから知られていた．実際，紀元前3世紀にアルキメデスは正96角形を用いて，小数点以下2桁，すなわち，πが

$$\pi=3.14\cdots$$

となることを求めている．また，1424年にペルシャの数学者カーシャーニーは正805306368（$=3\times 2^{28}$）角形を用いて，小数点以下16桁，すなわち，

$$\pi=3.1415926535897932\cdots$$

まで求めている．最新の結果としては，2019年3月14日に岩尾エマはるかがチュドノフスキの公式を用いることにより小数点以下31兆桁を超える記録を作っている（[1]，[2]を参照）．

残念ながら，時間の都合上円周率の無理数性に触れることはできなかった．高等学校では，平方根や対数以外の無理数に対して無理数性に言及することはないため，公開講座のような機会に考えてもらうことは有意義なことだと考える．次回以降の課題とする．

3 折り紙作図

3.1 基本的な作図

折り紙作図とは，紙を折ることにより得られる直線を用いて，図形を構成する作図方法である．まず，定規とコンパスを用いて作図できたものが，折り紙作図でも作図可能であるかを調べる．実際には，次の作図を高校生たちに自ら考えて折ってもらい，なぜその作図方法で目的の図を得ることができるのかを考えてもらった．

(1) 直線Lの垂線で，ある点Pを通る直線
(2) 直線Lと平行で，ある点Pを通る直線
(3) 長さ1の線分が与えられたとき，長さ3の線分
(4) 角の二等分線
(5) 線分の垂直二等分線
(6) 線分の直線上の移動（図1）
(7) 線分の二直線間の移動（図2）

特に(6)と(7)を組み合わせることで，平面上の任意の場所に同じ長さの線分を作図できることに注意されたい．これは，定規とコンパスの作図においては，長さをコンパスで測り取り，任意の場所にその長さの線分を作図することに対応する操作である．

3.2 数を折る

ここで，実数aを折るとは，$|a|$の長さの線分を折り紙作図することをいう．どんな数が折り紙作図可能であるかということが問題であり，それはどんな図形が作図可能であるかということに関わる．例えば，正多角形を作図するとき，その対角線の長さの線分も同時に作図していることになり，対角線に作図不可能な長さの線分が現れる正多角形は，作図不可能であるということになる．

まずは，有理数の作図に取り組んでいく．有理数とは，ある整数mと整数$n \neq 0$を用いて，m/nと表せる数のことであるが，有理数とはどんな数か？という定義を尋ねる問いについて，「分数」と答える高校生は多い．小学校教育においては，確かに分数とは整数でないm/nの恰好で表せる数のことをいう．有理数を分数のことと理解している高校生は，整数は有理数か？$\sqrt{3}/2$は有理数か？と尋ねられると困ってしまう．分数や小数といった概念は数の表現（表示）の方法であることに注意すべきだろう．

公開講座では，正方形の折り紙の一辺の長さを1としたときに，一辺を3等分できるかという問題を，高校生自身に考えてもらった．これは1/3を作図することに相当する．闇雲に折っても1/3にはたどり着けず$1/2^n$の付近を彷徨うことになる．この問いは作図に不慣れな高校生にとっては難しいため，図3のようなヒントを出す．

このヒントは[3]を参考にした．図3の頂点Pの座標は（2/3，2/3）になり，このヒントから殆どの受講者は1辺を3等分する作図を思いつくことが出来た．正方形の上の辺の2等分を用いて，3等分が得られていることに注意させ，同様の方法で，$(k-1)$等分からk等分が得られるのではないかと誘導する．実際には，図4の点Pの座標を求めることになる．

図4の点Pの座標は$((k-1)/k, (k-1)/k)$であり，$(k-1)$等分からk等分が得られる．数学的帰納法により，$1/n$が折り紙作図可能であることの証明を与えることが出来る．ひとつ前のものが折れると，次のものが折れるという感覚は，数学的帰納法を理解する良い例となっている．数学的帰納法をまだ学んでいない受講生には，数学的帰納法のよい導入となったと思う．

任意の自然数nに対して$1/n$を折ることが出来ると，$1/n$の線分を繋いでいくことで，m/nを折ることが出来る．これで，全ての有理数は作図可能であることが分かった．

プロジェクト6
長さ a の線分と長さ b の線分が，同じ直線上に与えられている。長さ a+b の線分を折れ。

図 1: プロジェクト６

プロジェクト７
長さ a の線分が与えられている。長さ a の線分を直線 L 上に折れ。

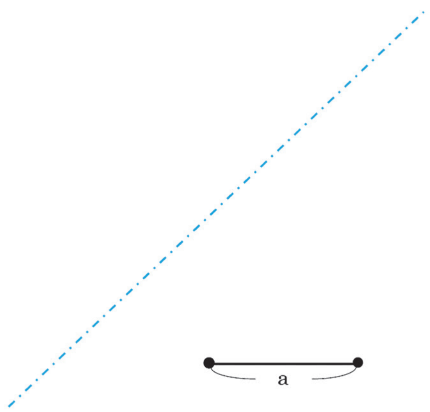

図 2: プロジェクト７

ヒントカード１（有理数を折る）

点 P の座標を求めてみよ。

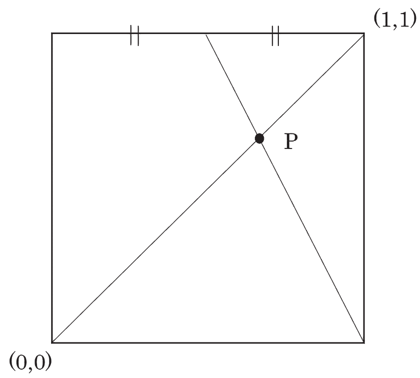

図 3: ヒント１（有理数を折る）

ヒントカード３（有理数を折る）

点Ｐの座標を求めてみよ。

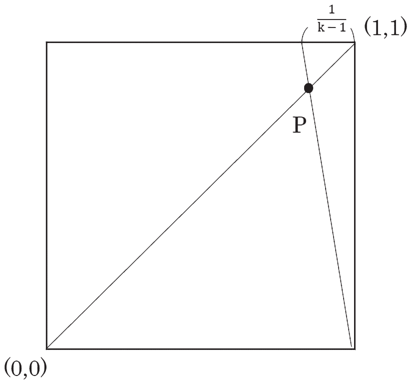

図 4: ヒント３（有理数を折る）

無理数については，自然数nに対して$\sqrt{n}$が折り紙作図可能であることを扱った．証明のカギになる作図は，図5である．

図5における直角三角形の斜辺の長さが$\sqrt{k}$になるため，数学的帰納法により，自然数nについて$\sqrt{n}$が作図可能であることが示される．

さらに，どのような数が折れるかについて，a,bが作図可能な数であるとき，和$a+b$，差$a-b$，積ab，商a/b，$\sqrt{a}$も作図可能であることを簡単な説明と共に紹介した．また折り紙作図可能な数を係数にもつ，2次方程式と3次方程式の解も作図可能であることが知られている．折り紙作図可能な数は，そのように構成されるものに限られることが知られている（[3]などを参照）．

3.3　正多角形の作図可能性

ここでは，定規とコンパスで作図できるものと比較しながら，正多角形の作図可能性についての事実を紹介した．まず，コンパスと定規で作図可能である数は，折り紙作図でも作図可能であることを紹介した．そして，正n角形が折り紙作図可能であることの必要十分条件は，相異なる$p_i = 2^k 3^l + 1$型の素数に対して，$n = 2^k 3^l p_1 \cdots p_m$と表せることであることを紹介した．正7角形について，定規とコンパスでは作図不可能で

ヒントカード３（無理数を折る）

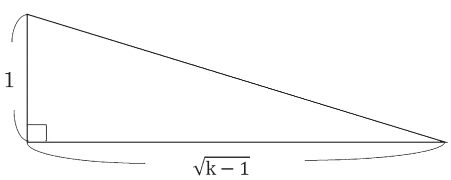

図 5: ヒント３（無理数を折る）

図 6: 正多角形を折る様子

ヒントカード２（正五角形を折る）

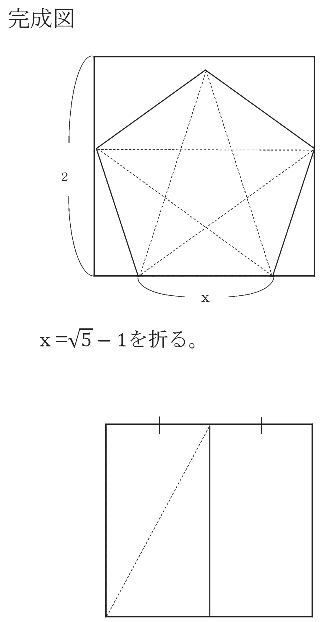

図 7: ヒント２（正五角形を折る）

あるが，折り紙作図可能であることを紹介した．受講生には正3角形と正5角形の作図を考えてもらい，それを折ることに挑戦してもらった（図6）．正5角形については，図7のヒントを与え，$\sqrt{5}-1$の長さの辺を折ることが必要になることを実感させた．

4　終わりに

本講座は，4つの高等学校から募集人数を超える49名の参加者となった．理解を促すために，能動的な作業を取り入れ，また丁寧な説明（証明）を心掛けることにしたが，時間の都合上，端折った部分もあり，また紹介できなかった関連する話題も多く残っている．次回以降も，数の魅力をより伝えられるような講座を提供していきたいと考える．

参考文献

[1] Alexander J. Yee, Google Cloud Topples the Pi Record, http://www.numberworld.org/blogs/2019_3_14_pi_record/.
[2] 岩尾エマはるか, 世界記録を破る“パイ”の作り方, https://japan.googleblog.com/2019/03/most-calculated-digits-pi.html.
[3] トーマス・ハル著，羽鳥公士郎訳，ドクター・ハルの折り紙数学教室，日本評論社，2015.
[4] 和田宗士，折り紙作図可能性について，兵庫教育大学修士論文，2008.

（2019 年 9 月 13 日受理）