イプシロン　2020. Vol.62，33 － 42

GCの「条件を満たす点の集合の自動描画機能」を使った数学的探究
- 数学的探究に関するケーススタディを基にして -

愛知教育大学数学教育講座　**飯　島　康　之**

1.　はじめに

GC で扱う軌跡には，「点などの幾何的対象が動いた跡」としての軌跡と，「条件を満たす点の集合」としての軌跡の 2 つがあり，「条件を満たす点の集合」にはいくつかの自動描画機能がある。これまで主に教材研究のために使う機能として想定してきたが，それを有効に使えた数学的探究の事例があったので，その紹介を中心に，GC の「条件を満たす点の集合の自動描画機能」についてまとめることにしたい。

1.　GC における「条件を満たす点の集合」と自動描画機能

1.1　「条件を満たす点の集合」に関する生徒のための標準的な機能

たとえば，「平面内の定点 A,B と動点 P があり，PA=2PB となる点の集合を求めたい」という問題があるとき，GC の中で想定している生徒の標準的な使い方は，次のようなものである。

(1)画面の中の点 P を動かす。

(2)PA=2PB が成り立つような場所を見つける。

(3)「記録ボタン」を押す。（すると，P の位置が記録される）

これを繰り返すことによって，次第に点 P の記録が増えていき，それをもとに，さらなる数学的活動につなげていく。

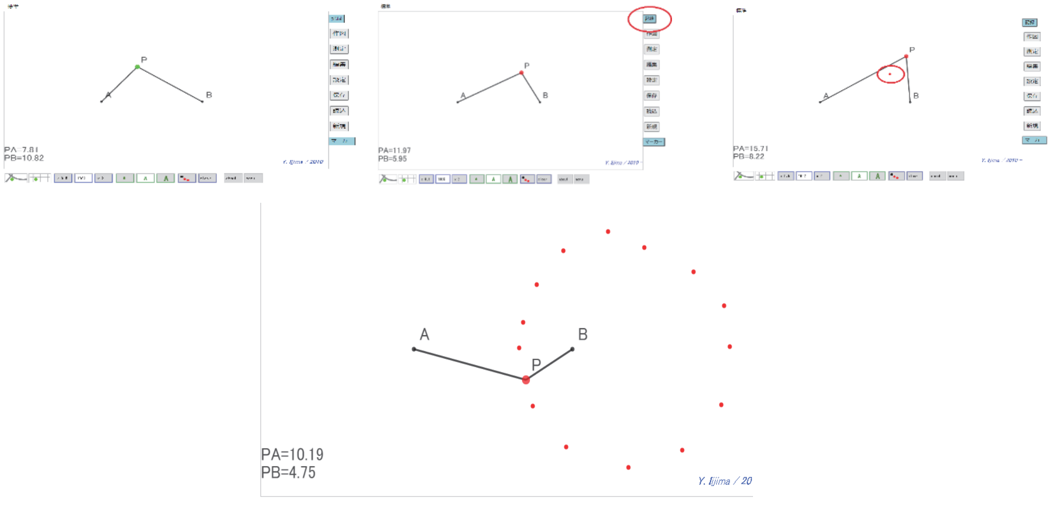


図 1　「条件を満たす点の集合」を調べる標準的な手続き

このような活動をするために必要なことは，点 P の「編集」において，「軌跡の色」をたとえば「赤」などに設定しておくことだけである。軌跡のスイッチを on にしておくと，P の動いた跡をすべて記録するが，off にしておき，必要に応じて「記録」ボタンを押すと，このような形で条件を満たす点の集合を，いわば手作業で残すのが，GC における標準的な生徒の活動である。(軌跡のスイッチを on にして常時記録を残すと，「点が動いた跡」としての軌跡になる)

1.2 「条件を満たす点の集合」において想定している生徒の数学的活動

この「手作業によるプロット」では，中高生に適した数学的活動が生まれることが多い。たとえば，どのあたりに P を動かすと，条件が満たされるかを予想しながら P を動かす。上記の図の場合であれば暗算をして PB を 2 倍し，PA=2PB が成り立つかどうかを判断する。ぴったりの場所などほとんどない。しかし目的は「精密な結果を求める」ことよりも，「大まかな形を調べて，なぜそうなるかを数学的に考える」ことなので，それなりの精度でかまわない。どれくらいの精度だったかいいかを考えながら作業を進めることになる。

グループによっては，その調べ方に差が生まれる。かなりの時間が経過してからの完成作品を比較するよりも，途中の様子を比較すると興味深い。それぞれのグループが，いわばどんな戦略で取り組んでいるのかがよくわかる。

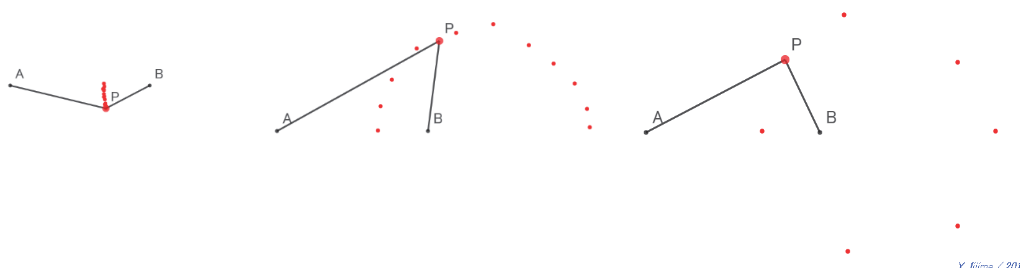


図 2 調べ方の違いの様子

これらの結果を観察し，「円のようだ」という表現も生まれる。それでは不十分な表現なので，「円の特徴を把握するには，何をとらえるといいだろうか」という生徒の中でのつぶやきがあったり，あるいはそれがない場合に教師側から投げ掛けたりすることになる。たとえば，「中心と半径」のような発言が生まれ，「必ず通るはずの点はどこだろう」というような問いにつなげ，「AB を 2:1 に内分する点」「AB を 2:1 に外分する点」「内分点と外分点を端点とする線分を直径とするような円」とか「内分点と外分点の中点が中心になる」などの言語活動を導くことができる。

そのような言葉を受けて，「実際にそれらを作図し，確かめてみよう」という流れをつくり，内分点，外分点あるいはそれらを結んだ線分やそれを直径とする円を描画し，それまでの観察結果と比較することができたり，その円上に点 P をとったときに，PA と PB はどうなるかを検証することができるようになる。

さらに「きちんと決着をつけたい」と考えると，初等幾何的な証明，あるいは数式による証明のいずれかに結びつけていくことも考えられる。

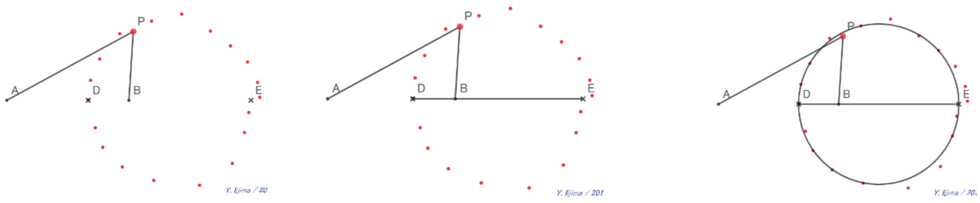


図 3 仮説となる円を作図し，検証する様子

このように，「手作業でプロットする」プロセスにおいて， さまざまな観察や思考あるいは対話が関わり，言語活動や数学的活動が活性化される。だからこそ，「手作業でプロットする」ような機能が，いわば，標準的な GC の機能なのである。

もちろん，このような作業を紙と定規だけで行おうとすると非常に難しい。点をとって PA,PB を測り，ちょうど PA=2PB になるような点を見つけてプロットするというだけで，多大な時間と労力を必要とする。そういう意味では，手作業で行うことは実質的に不可能な活動を，可能にするための機能でもある。

1.3 従来の道具を使った「条件を満たす点の集合」に関する数学的探究との関わり

たとえば，定点 A,B に対して∠APB=30° になるような点 P の集合を求めるとき，A,B のところに画鋲などを刺し，三角定規の 2 辺をそこに当て，頂点がどういう軌跡になるかを残す方法を使うことができる。30° の代わりに他の大きさについて調べようと思うと，同じような実物をつくることが必要になり，あまり現実的ではない。

たとえば，定点 A,B に対して PA+PB=10 となるような点 P の集合を求めるとき，A,B のところに画鋲などを刺し，長さが 20 の紐をかけ，鉛筆などの先端をひっかけて動かし，その鉛筆の先端の先で記録を残す方法を使うことができる。和が一定なのでこの方法が使えるが，差が一定などになると，別の方法を工夫しないといけない。

いろいろな場合について「条件を満たす点の集合」について調べたいと思うと，点 P を平面内のいろいろなところを動かし，長さや角度を測定し,必要に応じてその値を計算することが必要になる。かなり煩雑な作業になる。

しかし，数学の授業の中でこの活動を扱う場合には，膨大な点について作業を機械的に行うことがねらいになっているわけではない。むしろ，機械的に行うのに必要な手間を避けるためには，調べるべき適切な場所を推測できるといい。プロットしながら全体がどんな形になるのか，どんな特徴があるのか，なぜそうなりそうなのか。そういうことを推論しながら解決にいたることをねらっている。逆にいえば，機械的に膨大な点について調べることの原理を理解することは一つのねらいであっても，それを実行することがねらいではなく，少しずつ作業を進めながら推測や推論，あるいは計算などを目的をもって進めることがねらいといえる。

これまでと同様の教材に関して GC を使う上では，ねらいとする数学的活動を支援することが必要だ。「推測や推論・計算などをする」ことの意義を実感する程度の時間や労力を必要とする大

変さを感じることが重要である。一方，手作業では「原理はわかっていても測定や計算問うが大変なので実質的には実行可能でなかった対象」についても可能になっていることが，従来の道具と比較したときの GC の利点になっている。

上記のような意味において，GC の「標準的な使い方」では，手作業のような煩雑さを伴うことを想定しているが，上記のようなプロットする作業を自動的に行う機能も実装している。その機能は，次のような考え方に基づいて設計・実装している。

1.4 「条件を満たす点の集合」の自動描画機能と基本的な考え方

P に関する条件を満たす集合を求める上で，P に関する条件は一般に

$$f(P) = 0$$

という形で表現される。なお，GC の中で扱える対象は，長さ・面積・角度など「測定」メニューの中に含まれている測定とそれを使った数式である。

また，P の座標を x,y とすると，上記の式は

$$f(x,y) = 0$$

とも表現できる。つまり，条件を満たす点の集合とは， x,y に関する陰関数の中で，長さ・面積・角度などを含む数式で表現されるものといえる。

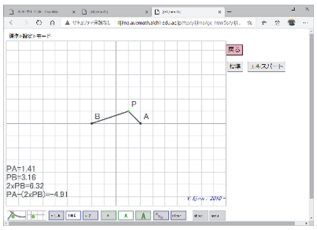
GC を使うとき，探究が進んで測定値が増えていくと，すべての測定値に対して 数式 ＝ 0 となるものについての軌跡を扱えるようにすることは，現実的ではない。f(P)=0 が意味がある数式になるためには，左辺の値ガプラスにもマイナスにもなる必要があるが，長さなど，正の値をとる測定値が多い。そのため， 数式の中に「-」を含むもののみに対して，GC では，自動描画の対象としている。

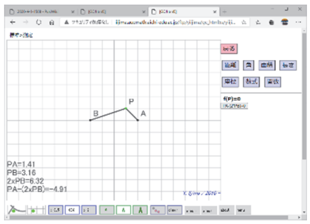
それまでに動かしていた点を P とするなら，その P に関して「-」を含む数式の候補をボタンとして表示し，そのボタンを押すと，画面の中のすべての点の上に P をとり，

$f(P) > 0$ となる領域と $f(P)<0$ となる領域の境界線

を表示する機能として実装する。

そのため，たとえば，上記の例でいえば，「PA-(2*PB)」という数式をつくり，「設定」>「モード」>「エキスパート」によりエキスパートモードに変える。次に「測定」のボタンを押すと，図 5 のように「PA-(2*PB)=0」というボタンが表示され，このボタンを押すと，しばらくすると図 6 のような結果が得られる(A(2,0), B(-2,0)の場合)。





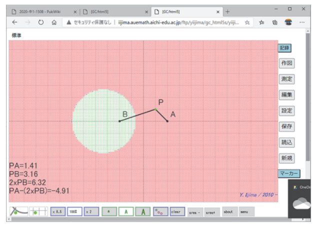


図 4 エキスパートモードに　図 5 測定メニューでボタン表示 図 6 ボタンを押すと軌跡表示

1.5 「条件を満たす点の集合」の自動描画機能の不適切性

上記に述べたような操作で，図 6 のような結果を短時間が得ることができる。画面内の多くの点に関して機械的な作業を正確に行ったらどんな結果が得られるかを知ることはできるが，従来の教材に関して，生徒がこの機能を使うことは適切でないことが多い。「ほぼ正確な結果が得られた」ことにより，最初の問題の解決のために，推測や推論あるいは計算などを行う必要性がなくなってしまうことであり，結果的に想定される数学的活動が実現できなくなってしまうからである。

逆にいえば，自動描画機能を使う上では，この機能を使うことによってはじめて可能になる数学的探究に焦点を当てることが必要になる。

2. GC における「条件を満たす点の集合」の自動描画機能を利用した数学的探究の具体例

2.1 「条件を満たす点の集合」の自動描画機能の特徴

たとえば，PA=2PB という条件を x,y を使った数式に変え，√((x-2)^2+y^2)-2√((x+2)^2+y^2)=0 を計算し，この「関係式」のグラフを Grapes を使った場合と対比すると，図 7 のようになる。

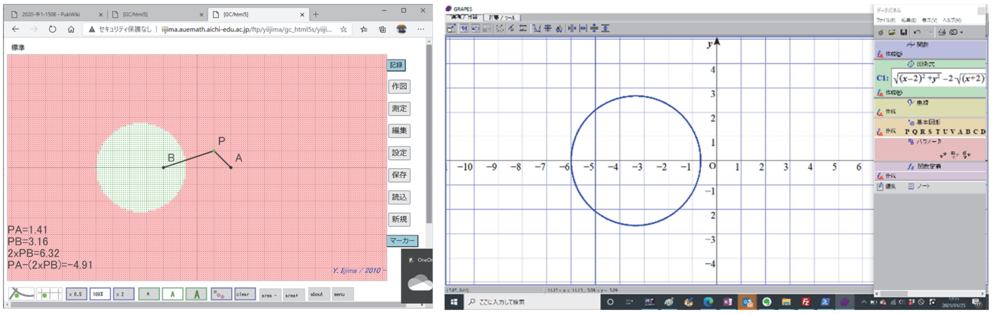


図 7 PA=2PB という条件を満たす点の集合に関する GC と Grapes での結果の比較

GC では，測定値をもとにした数式で探究を進めることになる。それに対して Grapes の場合には，(長さなどを使った数式で求める方法もあるかもしれないが)基本的な機能を使うことを前提にするなら，長さによる数式を x,y による式に表現し，それを関係式として入力することになる。特に角を扱う数式を使う場合には，x,y への変換は複雑な式になるため，幾何的な関係式を直接扱えることに GC の利点があるといえよう。

一方，グラフの精密さは明らかに Grapes の方が優れている。Grapes では，陽関数と同じ精度で計算・描画しているのに対して，GC の方では,かなり「間引いて調べた結果」しか表していない。実際, GC/html5 では，表示されている領域には 900x540 の点がある。しかし，「条件を満たす点の集合」を調べた結果は，色(赤,緑,白)の他，「・」「x」「○」による表示をするために, 5 ドットおきでしか調べていないので，実際に調査をしている点の数は 181 x 109 個の点のみである。また，これらの点の上でぴったりと「f(P)=0」となる場所は非常に少ないことが多いため,多くの場合, f(P)>0 の領域と f(P)<0 の領域の間のどこかに境界があることを推測することになる。

また，これは Grapes や mathematica など,他の数学ソフト全般に共通することだが，これらの観察結果は限られた領域の中の有限個の点での値のみをもとに計算しているので，その間でのグラフの挙動などを正確に把握・描画しているわけではない。もちろん，領域の外に関しても同様である。そのため，必要に応じて領域の拡大・縮小などをしながら，目的に応じて使いこなしていくことが必要になる。

2.2 条件を少し変えた問題について調べるための手段としての自動描画機能

結果が分かっている問題に対して，その条件を少し変えてみたときに，どのような結果になるかを調べてみる。いわゆる what if not 方略を適用したらどのような結果になるのかを調べることは，教員にとっての教材研究としては適した素材の一つといえよう。たとえば次の命題を考えてみる。

A,B,C が一直線上に並んでいて AB=BC となっていて，平面内に動点 P がある。

∠APB=∠BPC となるような点 P の集合を求めよ。

B を通って AC に垂直な直線を引けば，これは AC の垂直二等分線になる。これは AC に対する線対称の軸にもなるので，これが条件を満たす集合になることが推測されるが，実際に，結果は図 8 のようになる。

まず，「一直線」という条件を外してみる。すると,△BAC は二等辺三角形になり，調べた結果は図 9 のようになる。この円は，△ABC の外接円になりそうだ。弧 AB と弧 BC の長さが等しいので，この外接円上に P があるなら，円周角が等しくなるので，この結果になると考えることができる。

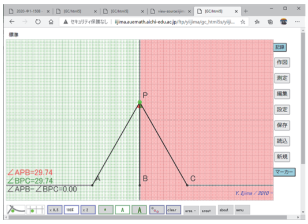


図 8 AB=BC で一直線上

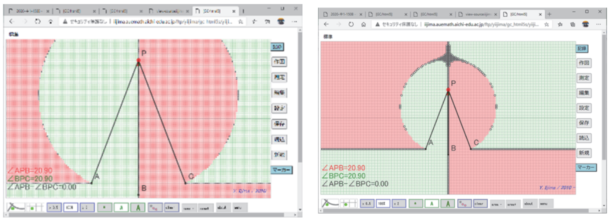


図 9 AB=BC で，一直線上ではない

次に，「一直線」という条件は保ったまま, AB と BC の長さが異なるように配置して調べてみると,結果は図 10 のようになる。このときも結果が円になるというのは興味深い。しかも円の片方の端点は B になっている。反対側の端点の一はどこになるかなどを考えてみるとよさそうだ。この話題は,アポロニウスの円との関わりで考察することができる。

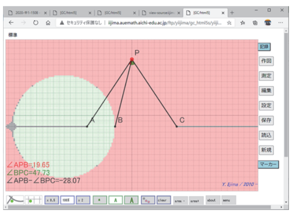


図 10 一直線上で AB=BC でない

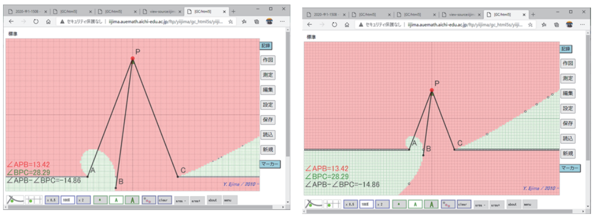


図 11 AB=BC でもないし，一直線上にもない

さらに，両方の条件を外してみる。つまり，一直線上になくて，ABとBCの大きさが異なるように配置してみる。すると，まず最初の結果が図11左となり，全体像を把握するために，少し縮小してみると，図11右のようになる。曲線が得られることはわかるが，初等的には扱える曲線にはなりそうもない。このように，「自分の力量では扱えそうもない」ということを見極める上では，一定の時間と労力で，結果をみることができることに対しては，自動描画機能は有効なのである。実際，元の条件を変えたとき，図9や図10のように，きれいな結果が得られることは多くない。大半は，図11のように，わけのわからない結果になることの方が多い。逆にいえば，わけのわからない事例がたくさんある中で，数少ないいい事例を見つけていく上では，手作業のような機能では適切ではなく，せめて，自動描画機能くらいのものが必要になってくる。

2.3 一連の「条件を満たす点の集合」について調べるための手段としての自動描画機能

たとえば，PA + PB = 一定 という条件を満たす点の集合は，楕円であった。いわば,長さの1乗の和である。これ「1」を2,3,4,… と変えてみるとどうなるであろうか。変数の機能を使えば，このような調べ方は，それほど時間を要することなく実行できる。1,2,3,4に関する結果が図12である。

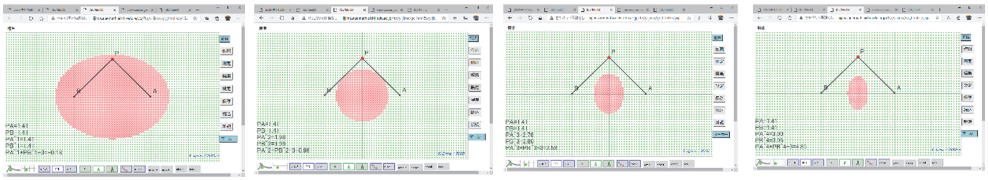


図12 PA^n + PB^n = 3 の結果(n=1, 2, 3, 4)

この図の場合，n=1 が楕円，n=2 が円となるのが特徴的。n=3,4 はそれまでと違って縦長になることはわかるが，楕円になるかどうかは，ここからはよくわからない。むしろ，そこから次に探究すべき問題を発見し，さらに深めていくことが必要になってくるといえるだろう。

このように，自動描画機能を使うことを前提にした場合，これまでとは違った数学的探究が生まれてくるけれども，現時点においては，上記のように，結果の見通しが分かっているような事例が 1,2 混在しているとともに，こちらは曲線を観察すると，あまりいい数学的結論は得られそうにないという事例も入っているような教材がいくつか得られている程度である。

3. 条件を満たす点の自動描画機能が役立った数学的探究の例

3.1 出発点

GCの「条件を満たす点の自動描画機能」は，前章で示したような使い方が主立ったが，先日,ある問題を解決する上で，役立つ経験を得た。その概要を報告しておきたい。

問題 長方形ABCDがあり，AB,BC,CD,DAの中点をそれぞれとり，図のように頂点とむすび，それらの交点を E,F,G,H とするとき，EFGHの面積はABCDの1/5になることを証明せよ。

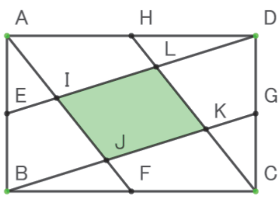


図13 長方形の場合

この問題では，平行四辺形 EFGH の面積と同じになる三角形の組を見つけると，簡単に 1/5 となることを確認することができる。

いわゆる四角中点などと似たような問題構成である。そこで，「いろいろな場合を調べてみる」課題として学生に提示してみた。問題が特殊な場合には簡単に証明できる。一般化するのに応じて証明は段階的に難しくなったり，あるいは一般化できない限界が見えてくるかもしれない。

平行四辺形の場合は，左図のようなアイデアで証明できるが，たとえば台形になるとこのアイデアは使えないことが右図のようにわかる。

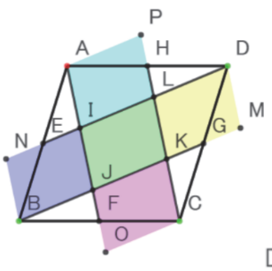


図 14 平行四辺形の場合

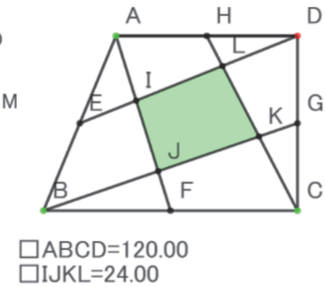


図 15 台形の場合

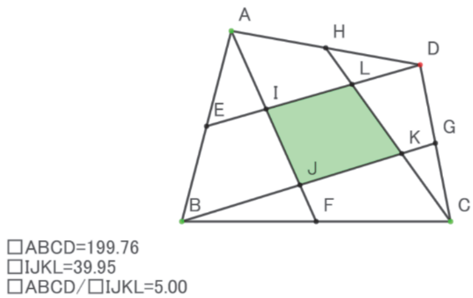


図 16 一般の四角形の場合

でも，台形のときでも結果は成り立ちそうだ。台形でなくなっても,図 16 のように成り立ちそうだ。きっと工夫をすることで証明できそうだ。誰か証明できないかな。そう思っていた。

2020 年。コロナ禍によりオンライン授業をする中で宿題としたのだが，学生から「まだきちんと解決できていないので，あと 1 週間時間をください。来週出します。」というメールをもらったので，もちろん「いいよ」と返信した。でも，彼が取り組むのに私の方が正解をしらないままというのはまずい。ちょっとホンキになって調べておかないといけないと考えた。でも,なかなか答えがわからない。そういう日々が続いた。ところがある日，左図のような場合を見つけたのだった。

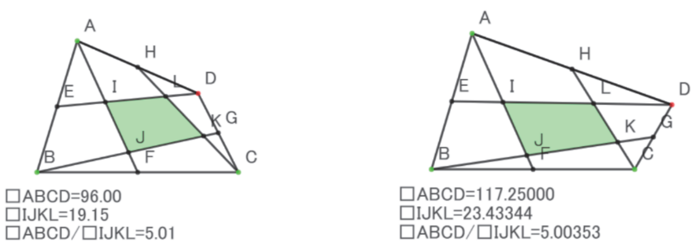


図 17　反例の発見

手作業で取り組むなら，これは「誤差」と思える程度のことである。でも，作図ツールでこんな誤差が出てくることはめったにありえない。もっと特徴的な場合を探すことにした。すると,図 17 右のような場合も見つかった。この結果は，一般的には成り立たない。それまできっとどんな場合でも成り立つはずだからと証明しようと取り組んできた前提を覆す反例の発見になった。成り

立つ場合と成り立たない場合には，どんな境界があるのか。上記の結果では，5.01 あるいは，5.003 という微妙な結果である。そのため，点 A を動かしたときに，□ABCD/□EFGH が 50±0.001 の範囲となる場合を自動描画機能で調べてみると左図のようになった。まだよくわからない。5±0.000001 の範囲を調べてみると右図のようになった。この図は何を意味するのであろう。どうも，平行四辺形となる場所を通って，AF と BG にそれぞれ平行な場合ならよさそうである。

実際，平行線を作図し，その上で点 P を動かしてみると，結果はぴったり 5 になった。

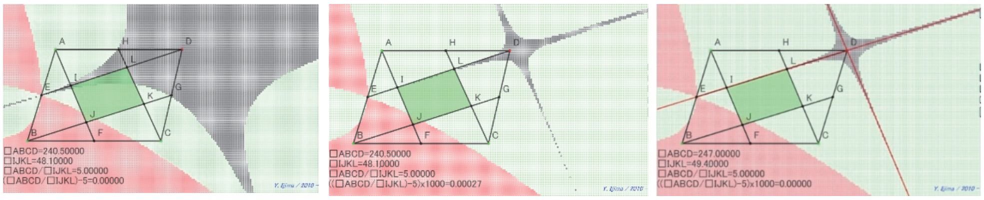


図 18 条件を満たす点の集合で調べていく

つまり，平行四辺形の場合には平行性が 2 組成り立っているが，そのうちの 1 組だけでも成り立つような場合には，結果は成り立つのである。

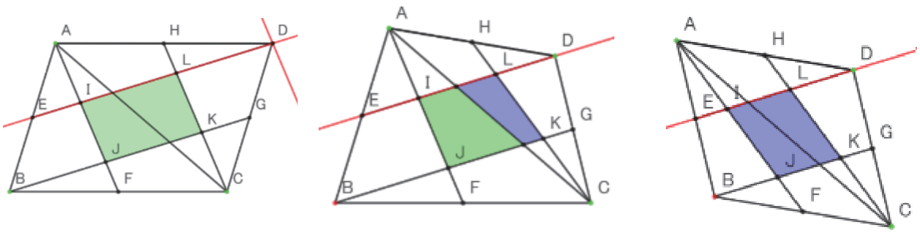


図 18 IL//JK ならば 平行四辺形を半分ずつ合わせた形で構成できる

実際，この場合には図のようなことがいえて証明できることがわかった。同時に，この問題は，非常に特徴的な問題であることもわかった。つまり普通は，だめなときにはかなりはっきりとだめなことがわかる。面積比が 5 ぴったりになるのは○○という条件を満たすときだけれども，そうでない場合はかなり違う値になるのでダメになることがはっきりわかるというケースがおおい。しかし，今回の事例ではかなり 5 に近い値になっている。だから測定値ではだまされていた。それをはっきりと認識し，結果がなりたつ場合を実験から推測するとしたら，自動描画機能のようなものでもないと，かなりむずかしい。そう実感する事例であった。

4. おわりに

本稿では，条件を満たす点の集合に関して，GC では二つの使い方を想定していることを述べた。標準的な使い方として想定しているのは，いわば手作業で点をプロットしていく使い方である。もう一つは，作成されている数式を元にボタンが表示され,それを押すことで結果が得られる自動描画機能である。定規・コンパス・紙・ヒモなどの従来の教具を使った数学的探究と比較したとき，GC での標準的な使い方は，ほぼ同じような作業を実現するので，従来の道具を使うときに

想定していたような数学的活動を実現するのに適していると同時に，それを適用可能な「条件」の範囲がかなり広げられる。逆に，従来想定していた数学的活動を引き出す上では，生徒が自動描画機能を使うことは，必ずしも適切ではない。

自動描画機能に適した使い方としては，what if not 方略などによって，原問題を変えたときに結果がどうなるかを調べる場合や，対象とする数式の中に変数などをいれ，一連のものについて調べ上げる場合について例示した。教員が教材研究などをする上では，このような使い方は適切と思われるが，多くの「うまくいかない事例」の中で，いくつかの興味深い事例を拾い上げるものが多いので，一定時間の中で，それなりの手応えがあるものを，高校生向けの教材として開発していくことが必要になる。

また，筆者自身が初等幾何の問題を解決していく上で，条件を満たす点の集合の自動描画機能を有効に使えた事例を一つ紹介した。これも，同じように成功的に使った事例を蓄積していくことによって，高校生などに適切な教材例として蓄積していくことが課題といえる。

謝辞：本研究は科学研究費補助金（課題番号：17K00967）の助成を受けたものである。