イプシロン　2020. Vol.62,　43 － 52

比・比例・割合の概念形成の一環としての
プリフォーマルな表現の理解を支える諸活動

愛知教育大学　山　田　篤　史

１．はじめに

比・比例・割合概念は，小学校算数の学習内容の中でも，児童が困難を抱えがちな内容であろう。筆者も，本誌『イプシロン』の 58・59 巻で，表現研究の立場から，そうした概念の指導の困難性や方向性について議論してきた(山田, 2016;2017)。そこでの議論は，例えば，平成 20 年の『小学校学習指導要領解説：算数編』(文部科学省, 2008)以降に，教科書の「×小数，÷小数」の単元に数多く掲載されることになった図１のような比例数直線，あるいは，それらの単元に先立つ「倍を表す小数」の単元で数多く掲載される図２のような２つのテープとそれらの倍関係を示す図が，児童にそれほど理解されているわけではないのではないか，という問題意識を背景にするものであった。

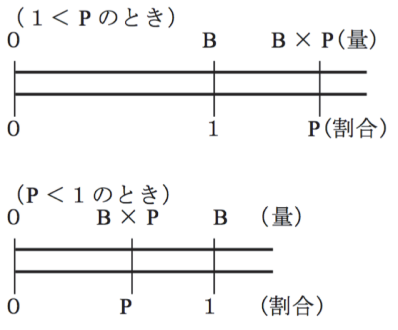


図１：比例数直線(文部科学省,2008,p.144)

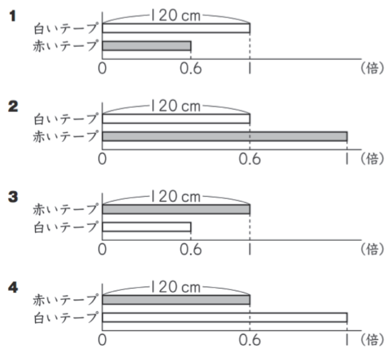


図２：２つのテープとそれらの倍関係を表す数直線(文部科学省/国立教育政策研究所,2012,p.186)

図１・２のような表現は，児童にとってリアルな文脈での経験に根ざしたインフォーマルな表現と学校数学で公式に推奨されるフォーマルな表現（例えば，数式）を媒介するものであり，しばしば「プリフォーマルな表現」と呼ばれる(Webb *et al*., 2008)。プリフォーマルな表現は，「児童生徒のインフォーマルな表現や推論に基盤を置くが，より大きな数学的構造を提供する」(Webb *et al*., 2008, p.112)ものであるため，概念形成や問題解決には有用と目されるものの，基本的には，教科書や教師によって提供されるものである。図３の「氷山モデル」(Webb *et al*., 2008)で考えると，児童が「氷山の先端(tip of the iceberg)」であるフォーマルな数学的表現（図３の事例では，先端の 3/4）の理解を支えるためには，水面下中間層にある線分図などのプリフォーマ

ルな表現や，更にそれらの理解を支える水面下の右下層にあるリンゴの分割表現のようなインフォーマルな表現など，下層部にかなりの「浮力を生み出す容積(floating capacity)」を必要とするはずである。しかし，その先端である割合周辺の概念に関わるフォーマルな表現（例えば，比，倍を表す小数・分数，×小数や÷分数の形式と意味，［割合］＝［比べる量］÷［もとにする量］といった言葉の式など）がかなり大きい場合，それを支える表現・理解が，プリフォーマルな表現である図１・２に基づく理解だけで足りるかは疑問である。そしてむしろ，図１・２のような表現に対する十分な理解が怪しい現状を見ると，図１のような「比例数直線の理解を支えるインフォーマルな表現（に基づく活動や概念理解）にはどのようなものが有り得るだろうか」，あるいは「児童は，どのようなインフォーマルな表現を基盤にして，プリフォーマルな表現（比例数直線の類の表現）を理解し得るのだろうか」という疑問が湧き起こってくるのは当然であろう。

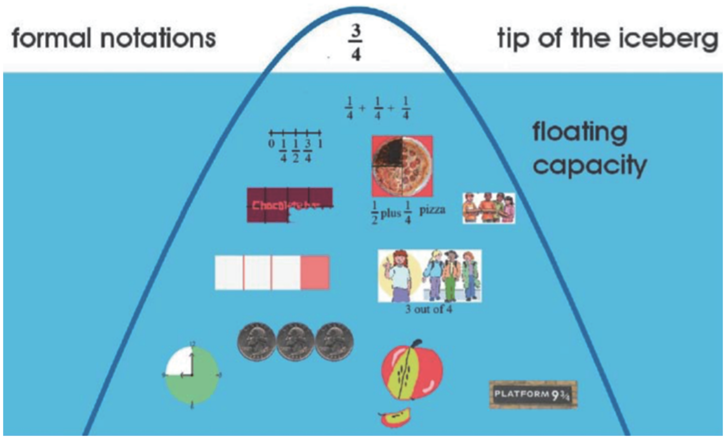


図３：氷山モデル (Webb, Boswinkel, & Dekker, 2008, p.111)

この疑問に部分的に応えるために，山田(2016)では，石田(1982)の議論を参考に，*Educational Studies in Mathematics, 7*(3) 特集号における Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO)の研究活動報告の中にある，「比」における２つの教材を紹介した。しかし，その報告の中にある「比」の指導事例には，他にも興味深い活動や教材がある。

そこで，本稿では，それらの中でも，比・比例・割合の概念形成の一環としてのプリフォーマルな表現の理解を支えうる活動と目され（つまり，氷山モデルの中程から下に向かって活動・教材を探索し），直ぐにでも教材化できそうな事例を幾つか紹介してみることにする。なお，上記報告書の指導事例は，例えば「低学年におけるオーバーヘッド・プロジェクター」のような特定のストーリーやアイデアに沿った複数の活動・教材の集合体である（それらが６節分ある）。しかし，本稿では，そうした文脈性を敢えて無視して，個々の活動・教材が現行の我が国の算数指導にどう位置付くかを考慮して，つまり，我々教師の指導のバリエーションを豊かにすることを優先して，恣意的な選択をすることにした。

２.「何倍かを考え，他の長さを考える」活動

IOWO 報告における「比」の指導事例の１番目が，先に紹介した「低学年におけるオーバーヘッド・プロジェクター」である。最初の活動は，そのタイトルが示す通り容易に想像が付くだろう。具体的には，オーバーヘッド・プロジェクター（OHP）の OHP シートを置く所に載せたもの（例えば，手や鉛筆）がスクリーンに投影されたとき，それが何倍に投影されているかを考えるという活動である。活動的には，任意単位の測定の考えを使って，実際のものが OHP により何倍に投影されているかを考えるという活動が紹介されているが，昨今の教室には OHP は無いし，プロジェクターでは被投影物を置く場所がないのが難点である。一方，図４のワークシートの活動やそれをアレンジした活動は，第４学年で登場する「簡単な場合の割合」や「倍を表す小数」の学習場面で活かすことができるかもしれない（実質的には３年生の割り算以降で学習可能だろうが，自由な数的処理をするにはこれらの単元での学習が無難であるし，そのアレンジを考えると，我が国では「低学年」の教材とは言えないかもしれない）。

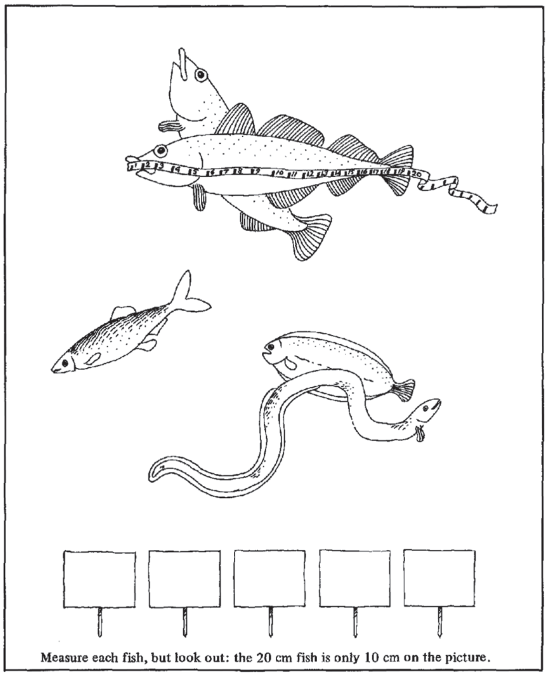


図４：魚の長さ(IOWO, 1976, p.262)

図４のワークシートの下部には「それぞれの魚の長さを測れ。ただし，20cm の魚は，絵では 10cm でしかないことに注意せよ」と指示がある。中央上部の魚にはメジャーが当てられており，実物は 20cm であることが分かる。一方，その注意書きから，実物から絵への縮尺度合いは 1/2 であり，他の魚の長さを求めるには，逆に絵の実測値を２倍してやればよいことが分かる。

この図４の問題の前半は，図２において白いテープと赤いテープの長さを既知として，そこから一方が他方の何倍かを求める問題と同じ構造であるし，後半も，（少々現実的な場面を盛り込

んではいるが）その倍率を使った比の第二用法の適用問題でしかない。特に，図４の中央上部のメジャーを当てられている魚が実際にワークシート上で 10cm の長さであったなら，その活動自体もそれほど興味深いものに映らないだろう。

しかし，メジャーを当てられている魚が，ワークシート上で 10cm でなかったらどうだろうか（実際，その魚を丁度 10cm に印刷するのは難しい）。ワークシート上の魚の長さを何倍すると 20cm になるのか，あるいは，20cm を何倍に縮小するとワークシート上の魚の長さになるのかを，ワークシート上の魚の長さの実測値を基に考えなければならない。これは，図２のような図が登場する我が国の教科書における「倍を表す小数」で登場する問題の殆どが，「白いテープの長さ」「赤いテープの長さ」「倍」のうちの２数を直ぐに使える数として与えてしまっている状況とはかなり異なる。図２を基にして敢えてその種の問題を作ろうとすれば，「赤いテープの長さが 120cm だとすると，白いテープの長さは何 cm になるでしょう」のような形になるかもしれないが，「赤いテープと白いテープの紙面上での長さを測って考えましょう」といったヒントが無ければ手が付かない児童は多いだろうし，あまりに無味乾燥な問題でもあろう。確かに，図４のような魚の長さを求めるという問題場面は，小学生にとってリアルな状況でなく，場面・素材は工夫しなければならないかもしれないが，問題場面が生み出しうる活動は興味深いものである。

そうした図４をアレンジした問題場面としては，図５も示唆的である。図５では，まず子どもが写っていない左のドールハウスだけの写真を見せ，自分がその写真の中ではどれくらいの大きさ（高さ）になるかを推測させてから（子どもは，それがドールハウスだと分からなければ，写真の１階部分の適当な所の高さを指さすだろう），図５右の写真を見せるという活動が紹介されている程度である。ただ，４・５年生であれば，この右側の写真だけから，どのようにドールハウスの高さを求められるかを考えさせることができるかもしれない。勿論，最初から女の子の想定身長を与えて考えさせてもよいが，できればドールハウスの高さと女の子の身長を写真上で実測し，それら二量間の関係を考えただけでは十分でないことにも（更には，差ではなく，結局，倍を考えないと有効な問題解決に至らないということにも）気付かせたい。また，そもそも最初にクラスに配る写真は，大きさの異なる何種類かを用意しておくということも考えられるだろう。勿論，そもそもドールハウスに馴染みがないなら，この写真と同様の状況，例えば，教師と子どもが並んで写っている写真（と教師の実際の身長）から子どもの身長を見積もるという活動を考えてもよいだろう（例えば，サツキとトトロがバス停でバスを待つ場面から，トトロの身長を見積もらせてもよいだろう）。

結局，相似拡大が成立している写真などを問題場面として利用し，その写真内の特定のものの長さを，別のよく分かっている（あるいは見積もり可能な）ものの長さと，写真上のそれらの２つの長さの関係を利用して求めるという活動とその具体的なイメージが（一方が他方の何倍になるかを考えることが有効で，子どもにとってリアルな場面を想定する必要はあるが），図２のようなプリフォーマルな表現の理解を支えうる重要なインフォーマルな活動・表現として浮かび上がってくるのである。

図５：ドールハウス(IOWO, 1976, p.263)

３．汎用性のある幾何的表現（バー，影モデル，タイルパターン）の導入を伴う活動

IOWO 報告における「比」の指導事例の２番目は，「比を把握すること(coming to grips with ratio)」であるが，この一連の指導では，低学年の子どもたちが身の回りの事象を記述できるようにと，「棒・帯 (*bars/strips*)」「影のモデル (*shadow model*)」「タイルパターン (*tile patterns*)」というコトバが，図６のような表現と共に導入される（なお，本稿では，「棒・帯」は「帯図」に統一する）。

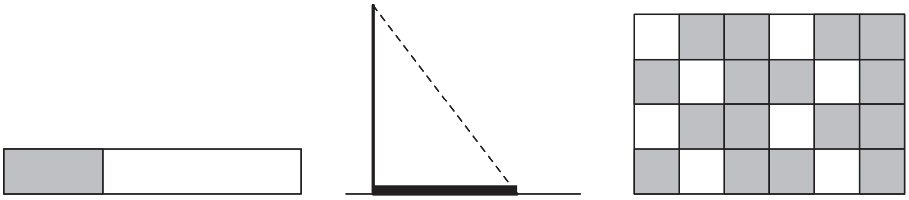


図６：帯図・影のモデル・タイルパターン

「影のモデル」については山田(2016)で一部紹介されているため，ここでは先ず，比例数直線との視覚的類似性を考慮して帯図に注目し，それらを使ってどのような活動が目論まれているかを眺め，後に，帯図とタイルパターンが同時に登場するワークシートについて検討していこう。

まず，「帯図」に関するワークシートの１つは，図７のようなものである。図７のワークシートの下部には，「しおりは，どのページにありますか？」と「本は 90 ページあります。そのしおりは，およそどのページにありますか？」という問題があるのだが，イラストの３つの帯図のパターン（A・B・C）の上にも「どの状況が正しい？」という疑問文が付いている。結局，このワークシートでは，まず，「既読ページ数」と「未読ページ数」の比を，帯図の白部分と色付き

部分の比に置き換えさせ（A・B・Cのいずれかを見積もらせ），その帯図のモデル（と，おそらく上部の数直線）をもとに，しおりが挟んであるページを見積もらせる活動を仕組んでいるのであろう。図７だけを見れば，帯図が，比や割合に関わる計算手段としても機能しているかのようにみえるが，「帯図は，比を計算する前に，主としてそれらを視覚化するためのモデルとして意図されている」(IOWO, 1976, p.275)とあるように，この段階での帯図の主な役割は，比や割合を視覚化するための手段である。例えば，図６の一番左の帯図を使い，「帯図で考えれば，色付き部分が４だとすると，全体は 12 であるし，色付き部分が 20 なら，全体は 60 である」のように，比・割合に相当する関係を説明するための手段として位置付けられているのである。

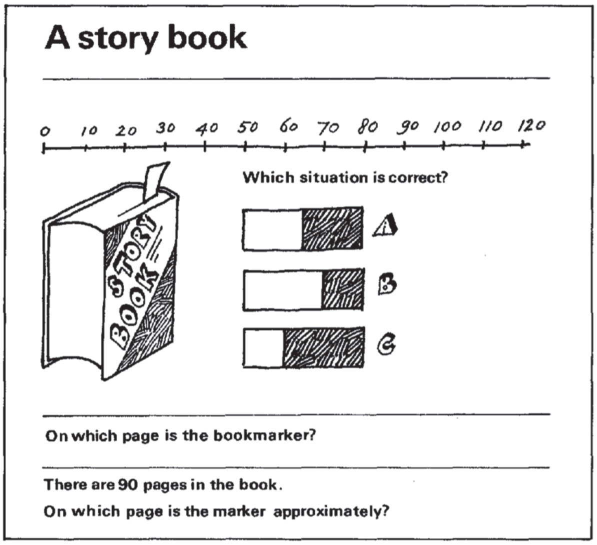
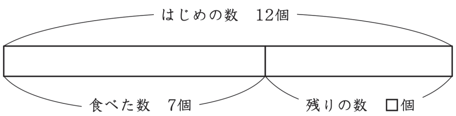


図７：物語本(IOWO, 1976, p.274)

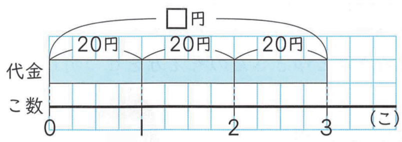
低学年での帯図のこうした位置づけは，比の正式な指導が割合の後に来て，しかも，割合の指導が倍の指導や小数による乗除（×小数，÷小数）と強力に結びついている我が国のカリキュラムとは微妙なコントラストを成す。我が国の算数カリキュラムにおいても，２年生の「分数」では，分割分数としての分数が現れて，帯図に似たテープ図の類で，分割分数を表現したり，「18 個の 1/2 や 1/3 の大きさについて考えてみましょう」といった類の問題を解決したりする（ただし，その多くでは，分割線が明示されているし，問題解決に際しては，アレイ図のような○と組み合わされた図になる）。ところが，３年生の「分数」の単元になると，冒頭部の分割分数的な文脈で単独の帯図・テープ図的な表現が登場しても，直ぐに分数が「量分数」としての位置づけを持つようになるため，それが「全体と部分の乗法的関係」のような２量間の関係を説明・表現するために使われることは滅多に無い。図７にあるような単独の帯図・テープ図の類は，我が国では，低学年の加減に関わる指導において，専ら加法構造における「部分-全体関係」を表現・説明するための図（図８(a)）として使われるものになり，低学年でも，乗法構造における倍関

係を表現・説明するための図としては，累加の延長としての倍関係を示唆するテープ図（図８(b)）や基準量による測定をイメージさせて倍関係を表すテープ図（図８(c)）など，比例関係にある２量を比例数直線に繋がるようにして提示する図（逆に言えば，児童には，２量の関係を特定の図式で解釈せよと迫る図）が大勢を占めるようになるのである。

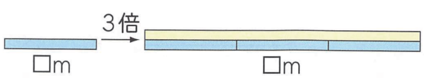
ともすれば，児童は，５年生の「帯グラフ」を学習するまで，「全体の大きさに対する部分の大きさの割合」や「全体は部分の何倍に当たるか」等の最も素朴な乗法的関係の説明を見聞きする際，図９の平成 28 年度全国学力・学習状況調査の算数A $\boxed{8}$ (文部科学省/国立教育政策研究所, 2016)のようなシンプルな単独のテープ図・帯図に出会うことは殆どないかもしれない。推測を交えてやや敷衍して言えば，昨今の教科書では（そして実際の指導でも），加減と乗除のような概念毎に，その関係を説明する際に使われる表現がかなり絞り込まれてしまっているのではないか，という仮説も浮かび上がるのである。勿論，小数・分数の乗除の指導（特に文章題での演算決定）で最も汎用的に使用可能なものは，恐らく比例数直線であり，高学年におけるその熟達した使用に向けて中・低学年から一貫した指導ができるようにとの教科書の工夫は素晴らしいものがあるのだが，問題解決における柔軟な表現の使用と創造という観点からは，少々狭苦しい指導になっているかもしれない，という点も危惧されるのである。



(a) 加減の「部分－全体関係」を表す図



(b) 累加の延長としての倍関係を示唆するテープ図
(坪田・金本他, 2020, p.17)



(c) 基準量による測定をイメージさせて倍関係を表すテープ図
(清水他, 2020, p.18)

図８

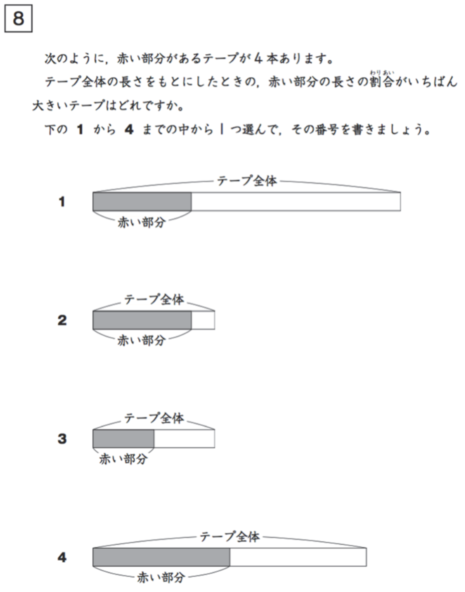


図９：H28 全国学力・学習状況調査算数A $\boxed{8}$

一方，「比」の素地指導の文脈で図６の３つの表現の導入を図ろうとする IOWO の指導事例・教材には，図 10 のようなものがある。

このワークシートには，タイルパターンと帯図とを明確に関連付ける説明として，最上部に「これは，４つの黒と５つの白の小タイルからなるタイルです」，帯図の下に「そのタイルに合

う帯」という説明がある。更に，このワークシートでの作業は，より広い床のタイルパターンを決めるための作業であるということを踏まえて（その意味で，このワークシートでの活動も，IOWO の他の指導事例に漏れず，子どもにとってリアルな文脈の中に位置付いている），中段右側には「あなたは表を作ることができる」という説明が付く。そして，最下段に，帯図と共に「以下を埋めよ」として，「帯の黒い部分（の値）は８です。このとき，白い部分（の値）は....」「帯の黒い部分（の値）は 16 です。このとき，白い部分（の値）は....」という問題が来るのである。

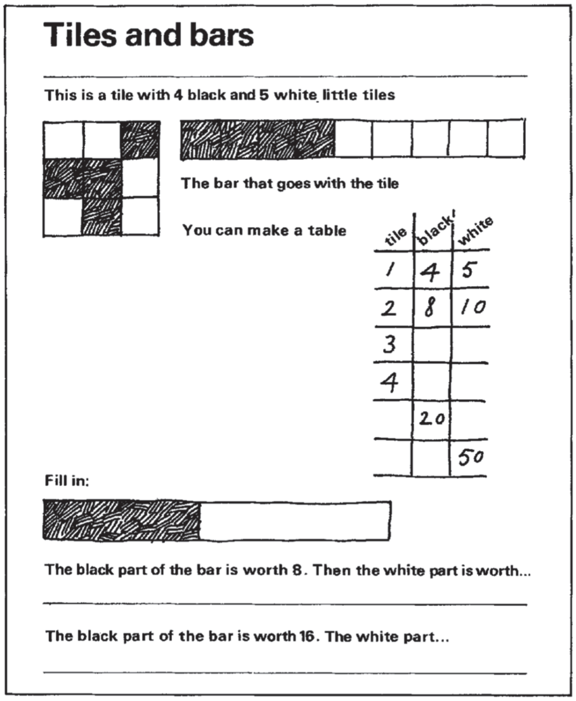


図 10：タイルと帯(IOWO, 1976, p.277)

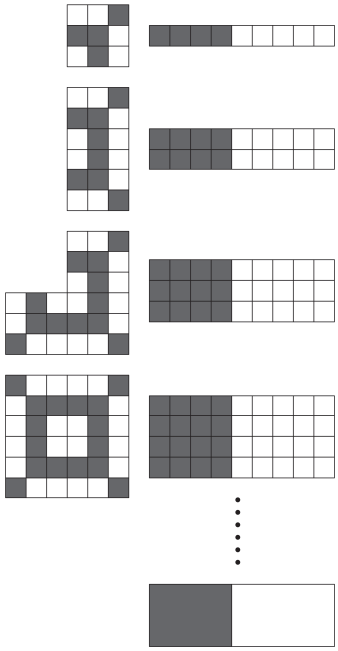


図 11：想定される図の関連付け

我が国の算数カリキュラムからすると，表に関する活動は，殆ど６年生の「比」の内容なのだが，恐らく「二桁×一桁の筆算」や「割り算」を学習した３年生程度でも十分学習可能な内容だろう。また，３×３のタイルパターンを床一面に敷き詰めていく活動を考えると，５年生の「簡単な場合の比例」の内容と考えることもできる。ただむしろ，注目すべきは，床の模様（タイルパターン）というインフォーマルではあるが，子どもにとってそれなりにリアルな問題解決場面を通じて，図６で導入された表現（インフォーマルな問題解決の文脈でも使われ得るのでインフォーマルな表現と言ってもよいし，教師によって解釈の仕方を含めて指導されたとするとプリフォーマルな表現としても考えられる表現ではあるが，比例数直線のように洗練されたプリフォーマルな表現ではない表現）の間の関連付けの仕方の秀逸さである。元はといえば，一定の白黒比で構成されるタイルパターンを床に敷き詰めるという活動を通じて，２種の小タイルの個数を数

える，あるいはそれらの等しい比を構成させるという作業なのだが，タイルパターンの帯図への自然な変換を利用すると，その作業は劇的に容易になり，表の構成も自然になる。タイルパターンの敷き詰めだけからは，小タイルの白黒比を考えるのは（特に，それらを数えることによって考えるのは），非常に面倒な作業かもしれないが，帯図に変換しておけば，直接的な表の構成が難しくとも，例えば，図 11 のような形で帯図と表を関連付けることで，表の構成を助けることも可能だと考えられるのである。

４．おわりに

本稿では，「比例数直線の理解を支えるインフォーマルな表現（に基づく活動や概念理解）にはどのようなものが有り得るだろうか」という素朴な疑問に応えるために，1970 年代の Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (IOWO)の研究活動報告（*Educational Studies in Mathematics, 7* (3) 特集号）の中でも，低学年の「比」の指導事例に注目し，比・比例・割合の概念形成の一環としてのプリフォーマルな表現の理解を支えうる活動と目され，我が国でも教材化できそうな事例を幾つか紹介した。本来，上記報告書の指導・教材事例は，特定のストーリーやアイデアに沿った複数の活動・教材の集合体であるが，本稿では，我が国の算数指導における位置付けを考慮し，我々教師の指導のバリエーションを豊かにすることも目論みつつ，個別的な教材・事例を選択した。その点には注意すべき点だが，個々のワークシートを検討するだけでも，十分興味深いことは，これまでの議論の通りである。

本稿で紹介した IOWO の指導事例や教材は，上記のように，現代化時代に考案されたものであるとか，オランダ特有の数学教育の考え方を背景にしていること等の注意点もあるが，「比」とその周辺概念（比・比例・割合）を，子どもにとってリアルな（それ故，インフォーマルな表現を基盤にした）問題場面に基づく活動と特有の表現（インフォーマルにも使われるが，基本的にはプリフォーマルな表現）を使って「低学年から」積極的に指導していこうという点は参考にしてよい点だろう。我が国の比・比例・割合に関する指導が，乗除という演算を基軸にして構成されがちであり，そこで用いられる表現も（素朴なものから抽象的なものへという点は首肯できるものの）比例数直線に繋がるものに絞られがちな傾向にあるのではないかということを考えると，比例数直線を導入するにしても，その表現の理解を支え得ると考えられるプリフォーマルな表現やインフォーマルな表現（と，そうした表現を生み出したり使ったりする活動）を，子どもの素朴な活動や表現の中から収集したり，過去や他国の指導事例からも収集したりするなどは，我々の指導のバリエーションを広げるためにも意義あることだと考えられる。

引用・参考文献

石田忠男(1982). 「小数の計算についての新しい見方・扱い方 —小数のかけ算を中心に—」. 『新しい算数研究』, No.134, 2-5.

清水静海・根上生也・寺垣内政一・矢部敏昭ほか 120 名(2020). 『わくわく算数３下』. 新興出版社啓林館.

坪田耕三・金本良通ほか 33 名(2020). 『小学算数３上』. 教育出版.

山田篤史(2016). 「数学教育における表現研究の立場からみた割合指導の困難性と方向性」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, ***58***, 21-34.

山田篤史(2017). 「表現研究の立場からみた「全体に対する部分の割合」の指導に関する一考察」. 愛知教育大学数学教育学会誌『イプシロン』, ***59***, 19-26.

文部科学省(2008). 『小学校学習指導要領解説：算数編』. 東洋館出版社.

文部科学省/国立教育政策研究所(2012). 『平成 24 年度全国学力・学習状況調査【小学校】報告書』. 文部科学省/国立教育政策研究所. (http://www.nier.go.jp/12chousakekkahoukoku/03shou-gaiyou/24_shou_houkokusyo_ikkatsu_2.pdf)

文部科学省/国立教育政策研究所(2016). 『平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書：小学校算数』. 文部科学省/国立教育政策研究所.(http://www.nier.go.jp/16chousakekkahoukoku/report/data/16pmath.pdf)

Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs (1976). Mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* ***7*** (3), 193-331. (Special Issue: Five Years IOWO)

Webb,D.C., Boswinkel,N., & Dekker,T.(2008). Beneath the tip of the iceberg: Using representations to support student understanding. *Mathematics Teaching in the Middle School,* ***14*** (2), 110-113.

謝辞：本研究は科研費（課題番号：20K02909）の助成を受けたものである。