イプシロン　2020. Vol.62,　61 － 69

魔方陣を連立1 次方程式で考える

愛知教育大学　**小　谷　健　司**
愛知教育大学大学院　**Chann Rada**

序

魔方陣は算数・数学の興味ある教材の 1 つです。**魔方陣**とは, n 行, n 列のマス目に, 1 から n^2 までの整数が 1 つずつ入り, その行の和, 列の和, 対角線の和がすべて同じ数になっているものをいいます。この数を**共通和**と呼びます。図 0 は 3 次の魔方陣の例です。図 0 は 1 から 9 までの整数から成り, 3 つの行の和, 3 つの列の和, 2 つの対角線の和がすべて 15 に等しくなっています：

4	9	2
3	5	7
8	1	6

図 0

$$\begin{aligned}&4+9+2=15, \quad 3+5+7=15, \quad 8+1+6=15,\\ &4+3+8=15, \quad 9+5+6=15, \quad 2+7+6=15,\\ &4+5+6=15, \quad 2+5+8=15.\end{aligned}$$

この論説では, さまざまなタイプの魔方陣を考えます。魔方陣の和の条件を積にした**積魔方陣**, 魔方陣の対角線の条件を強くした**汎魔方陣**, それらの条件をあわせた**汎積魔方陣**です。この論説の第 2, 3 節では, 3 次の魔方陣と積魔法陣がそれぞれ本質的にただ 1 つであることを証明します。第 3, 4 節では, 4 次の汎魔方陣と汎積魔方陣が本質的に 3 個であることを証明します。

1　3 次の魔方陣

3 次の魔方陣を図 1.1 のように添字つきの文字で (a_{ij}) と表すと, 3 つの行, 3 つの列, 2 つの対角線の和に関する条件は, 下の 8 個の式になります：

$$\begin{aligned}&a_{11}+a_{12}+a_{13}=c, \quad a_{21}+a_{22}+a_{23}=c, \quad a_{31}+a_{32}+a_{33}=c,\\ &a_{11}+a_{21}+a_{31}=c, \quad a_{12}+a_{22}+a_{32}=c, \quad a_{13}+a_{23}+a_{33}=c,\\ &a_{11}+a_{22}+a_{33}=c, \quad a_{13}+a_{22}+a_{31}=c.\end{aligned} \tag{1.1}$$

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

図 1.1

3 次の魔方陣について, 次のことがわかります。

定理 1.1.　3 次の魔方陣は, 回転と裏返しの違いを数えなければ, 図 0 のただ 1 つである。

上の定理の「回転と裏返しの違い」の意味を説明します。図 1.2 の左上の魔方陣が図 0 と同じで, その右にそれを 90°, 180°, 270° 回転させて得られる魔方陣を示しています。そして, それらの下に, それらを上下裏返しして得られる魔方陣を示してしています。

2	9	4	4	3	8	8	1	6	6	7	2
7	5	3	9	5	1	3	5	7	1	5	9
6	1	8	2	7	6	4	9	2	8	3	4
6	1	8	2	7	6	4	9	2	8	3	4
7	5	3	9	5	1	3	5	7	1	5	9
2	9	4	4	3	8	8	1	6	6	7	2

図 1.2

3 次の魔方陣は, 回転と裏返しの違いを数えなければただ 1 つですが, 数えれば上の 8 個あるということです。したがって, 次の系を得ることができます。

系 1.2. 3 次の魔方陣は 8 個存在する。

定理 1.1 の証明. 式 (1.1) の最初の 3 つの式を足し合わせ, 次の式を得ます：

$$1+2+3+\cdots+9=3c. \tag{1.2}$$

上式の左辺は 9×5 に等しいから, $c=15$ を得ます。式 (1.1) について $b_{ij}=a_{ij}-5$ とおくと, 配列 (b_{ij}) は -4 から 4 までの異なる整数から成り, 次の等式を満たします：

$$\begin{array}{llllll} \text{(r1)} & b_{11}+b_{12}+b_{13}=0, & \text{(r2)} & b_{21}+b_{22}+b_{23}=0, & \text{(r3)} & b_{31}+b_{32}+b_{33}=0, \\ \text{(c1)} & b_{11}+b_{21}+b_{31}=0, & \text{(c2)} & b_{12}+b_{22}+b_{32}=0, & \text{(c3)} & b_{13}+b_{23}+b_{33}=0, \\ \text{(rd)} & b_{11}+b_{22}+b_{33}=0, & \text{(ld)} & b_{13}+b_{22}+b_{31}=0. & & \end{array} \tag{1.3}$$

式 (1.3) において (r1) + (r2) + (r3) を計算すると,

$$b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{21}+b_{22}+b_{23}+b_{31}+b_{32}+b_{33}=0. \tag{1.4}$$

また, (r2) + (c2) + (rd) + (ld) を計算すると,

$$b_{11}+b_{12}+b_{13}+b_{21}+4b_{22}+b_{23}+b_{31}+b_{32}+b_{33}=0. \tag{1.5}$$

式 (1.5) から (1.4) を引くと $b_{22}=0$ が得られます。ここで, $b_{11}=z$, $b_{12}=x$, $b_{21}=y$ とおくと, 他の成分は次のように求めることができます：

$$b_{13}=-x-z,\quad b_{23}=-y,\quad b_{31}=-y-z,\quad b_{32}=-x,\quad b_{33}=-z. \tag{1.6}$$

式 (1.6) の b_{13}, b_{31} を式 (1.3) の (ld) に代入することにより, $z=-(x+y)/2$ を得ます。これを式 (1.6) に代入し正方形に並べることにより, 図 1.3 の方陣を得ます。

$-(x+y)/2$	x	$-(x-y)/2$
y	0	$-y$
$(x-y)/2$	$-x$	$(x+y)/2$

図 1.3

−3	4	−1
2	5	−2
1	−4	3

図 1.4

2 つの数 x, $-x$ のどちらかは正, どちらかは負です。2 つの数 y, $-y$ についても同様です。したがって, $x>0$, $y>0$ と仮定してもかまいません。なぜならば, $b_{12}>0$, $b_{21}<0$ の場合は配列を 90° 回転, $b_{12}<0$, $b_{21}>0$ の場合は 270° 回転, $b_{12}<0$, $b_{21}<0$ の場合は 180° 回転させることによって $b_{12}>0$, $b_{21}>0$ とすることができるからです。また, $x>y$ と仮定してもかまいません。なぜならば, $b_{12}<b_{21}$ の場合は配列を右下がり対角線に関して裏返すことにより, $b_{12}>b_{21}$ とできるからです。以上より, $x>y>0$ がわかります。

図 1.3 の 9 個の成分のうち正の数は, x, $(x+y)/2$, y, $(x-y)/2$ の 4 つです。仮定 $x>y>0$ より, これら 4 数のうち最も大きいのは x, 次に大きいのは $(x+y)/2$ です。したがって, $x=4$, $(x+y)/2=2$ です。これらを解くと $x=4$, $y=2$ です。これらを図 1.3 に代入すると図 1.4 を得ます。 □

2　3 次の積魔方陣

アメリカの著述家マーチン・ガードナー (Martin Gardner, 1914–2010) は, 科学雑誌 Scientific American 誌に 25 年もの間 “Mathematical Games” という記事を連載していたことで有名です。彼が 1964 年 1 月号に掲載した記事 [1] に積魔方陣が紹介されていました。（図 2.1 の配列中に 1964 の数字があります。）

2	36	3
9	6	4
12	1	18

図 2.1

積魔方陣とは, n 行, n 列のマス目に異なる正の整数が入り, n 個の行, n 個の列, 2 つの対角線の積がすべて同じ数 c になっているものをいいます。この c を**共通積**と呼びます。図 1.1 の配列 (a_{ij}) について, この条件を式で表すと下の 8 個の式になります：

$$\begin{aligned} &a_{11}a_{12}a_{13} = c, \quad a_{21}a_{22}a_{23} = c, \quad a_{31}a_{32}a_{33} = c,\\ &a_{11}a_{21}a_{31} = c, \quad a_{12}a_{22}a_{32} = c, \quad a_{13}a_{23}a_{33} = c,\\ &a_{11}a_{22}a_{33} = c, \quad a_{13}a_{22}a_{31} = c. \end{aligned} \tag{2.1}$$

ガードナーは, 図 2.1 が 3 次の積魔方陣で共通積が最小のものであると述べています。この節では, このことを証明します。

定理 2.1. 3 次の積魔方陣の共通積の最小値は 6^3 である。そして, 3 次の積魔方陣で最小の共通積をもつものは, 回転と裏返しの違いを数えなければ, 図 2.1 のただ 1 つである。

上の定理から第 1 節と同様の方法により, 次の系を得ることができます。

系 2.2. 3 次の積魔方陣で最小の共通積をもつものは 8 個存在する。

定理 2.1 の証明. 式 (2.1) について, 両辺の対数をとると,

$$\begin{aligned} &\log a_{11} + \log a_{12} + \log a_{13} = \log c, \quad \log a_{21} + \log a_{22} + \log a_{23} = \log c,\\ &\log a_{31} + \log a_{32} + \log a_{33} = \log c, \quad \log a_{11} + \log a_{21} + \log a_{31} = \log c,\\ &\log a_{12} + \log a_{22} + \log a_{32} = \log c, \quad \log a_{13} + \log a_{23} + \log a_{33} = \log c,\\ &\log a_{11} + \log a_{22} + \log a_{33} = \log c, \quad \log a_{13} + \log a_{22} + \log a_{31} = \log c. \end{aligned} \tag{2.2}$$

式 (2.2) について $b_{ij} = \log a_{ij} - \log c/3$ とおくと, 第 1 節の式 (1.3) に変換できます。そして, 第 1 節と同じ議論によって, 配列 (b_{ij}) が図 1.3 のように表せることがわかります。したがって, $e^x = X$, $e^y = Y$, $c^{1/3} = a$ とおくと, 配列 (a_{ij}) は図 2.2 のように表せることがわかります。また, 第 1 節の議論により, $x > y > 0$ と仮定することができるから, $X > Y > 1$ と仮定することができます。

$a/\sqrt{XY}$	aX	$a\sqrt{Y/X}$
aY	a	a/Y
$a\sqrt{X/Y}$	a/X	$a\sqrt{XY}$

図 2.2

n	m^2n^2/l^3	m
m^2/l	mn/l	n^2/l
mn^2/l^2	l	m^2n/l^2

図 2.3

ここで, $(3,2)$, $(1,1)$, $(1,3)$ 成分をそれぞれ l, n, m とおきます。すなわち,

$$\frac{a}{x} = l, \quad \frac{a}{\sqrt{xy}} = n, \quad a\sqrt{\frac{y}{x}} = m. \tag{2.3}$$

すると, 図 2.2 は図 2.3 のように書き直すことができます。配列 (a_{ij}) の共通積は $c = (mn/l)^3$ になります。仮定より $X > Y > 1$ だから,

$$\frac{m}{n} = \frac{a\sqrt{Y/X}}{a/\sqrt{XY}} = Y > 1, \quad \frac{n}{l} = \frac{a/\sqrt{XY}}{a/X} = \sqrt{\frac{X}{Y}} > 1. \tag{2.4}$$

したがって, $m > n > l$ です。

場合 1. $l = 1$ の場合。共通積 $c = (mn/l)^3$ を最小にする組み合わせは $(l, n, m) = (1, 2, 3)$ であり, このとき共通積は $c = 6^3$ となる。これを図 2.3 に代入すると図 2.1 になります。

場合 2. $l \geqq 2$ の場合, l の素因数を s とすると, $l = rs$ と表すことができます。このとき, 図 2.3 に現れる 2 数 $\dfrac{m^2}{rs}$, $\dfrac{n^2}{rs}$ はともに整数でなければなりません。このことから, m, n は s の倍数です。また, それらは $l = rs$ より大きくなければなりません。したがって, $n \geqq (r+1)s$, $m \geqq (r+2)s$ となります。これを用いると,

$$\frac{mn}{l} \geqq s(r+2)\frac{r+1}{r} > s(r+2) \geqq 6. \tag{2.5}$$

共通積 $c > 6^3$ となり, これは最小値ではありません。したがって, 最小の共通積をもつ積魔方陣は, 場合 1 で得られた図 2.1 です。 □

3　4 次の汎魔方陣

前節で見たとおり, 3 次の魔方陣は回転, 裏返しの違いを数えなければ 1 個, 数えても 8 個と多くありませんでした。しかし, 4 次の魔方陣をコンピュータを使って探すと, 回転, 裏返しの違いを数えなければ 1296 個, 数えれば 7040 個あることがわかります。これだけ多いと, 手計算で考えるのが難しくなります。そこで, 4 次の魔方陣については, より条件を多くした汎魔方陣を考えることにします。

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

図 3.1

汎魔方陣とは, n 行, n 列のマス目に 1 から n^2 までの整数が入り, n 個の行, n 個の列, n 個の右下がり汎対角線, n 個の左下がり汎対角線の和がすべて同じ数 c になっているものをいいます。ここで, **右下がり汎対角線**とは, 図 3.1 の a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{41} のように, 右端に到達したら左端から続ける右下がりの数の並びをいいます。同様に, **左下がり汎対角線**とは, 図 3.1 の a_{12}, a_{21}, a_{34}, a_{43} のように, 左端に到達したら右端から続ける左下がりの数の並びをいいます。したがって, 図 4.1 が汎魔方陣である条件は, 下の 16 個の式になります：

$$\begin{aligned}
&a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4} = c, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\
&a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + a_{4j} = c, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\
&a_{1j} + a_{2,j+1} + a_{3,j+2} + a_{4,j+3} = c, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\
&a_{1,j+3} + a_{2,j+2} + a_{3,j+1} + a_{4j} = c, \quad j = 1, 2, 3, 4.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ただし, 上式では添字を周期 4 で考えています。つまり, 添字に 5, 6, 7 が現れたら, それらはそれぞれ 1, 2, 3 とみなします。この節では次の定理を証明します。

定理 3.1. 4 次の汎魔方陣は, 縦移動, 横移動, 回転, 裏返しの違いを数えなければ, 下の 3 個だけである。

13	12	6	3
8	1	15	10
11	14	4	5
2	7	9	16

図 3.2.1

13	8	10	3
12	1	15	6
7	14	4	9
2	11	5	16

図 3.2.2

11	8	10	5
14	1	15	4
7	12	6	9
2	13	3	16

図 3.2.3

定理 3.1 を理解するために, 縦移動, 横移動, 回転, 裏返しの説明をします。方陣 (a_{ij}) に対して, 上へ 1 行の縦移動を $(a_{ij}) \mapsto (a_{i+1,j})$, 左へ 1 列の横移動を $(a_{ij}) \mapsto (a_{i,j+1})$, $(2,2)$ に関する回転を $(a_{ij}) \mapsto (a_{j,4-i})$, 第 2 行に関する裏返しを $(a_{ij}) \mapsto (a_{4-i,j})$ で定義します。下図はそれらを示しています。

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

元の方陣

a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}

上へ 1 行の縦移動

a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{11}
a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{21}
a_{32}	a_{33}	a_{34}	a_{31}
a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{41}

左へ 1 列の横移動

図 3.3

a_{13}	a_{23}	a_{33}	a_{43}
a_{12}	a_{22}	a_{32}	a_{42}
a_{11}	a_{21}	a_{31}	a_{41}
a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}

$(2,2)$ に関する 90° 回転

a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

第 2 行に関する裏返し

$(2,2)$ に関する回転は 4 通り (0°, 90°, 180°, 270°), 2 行に関する裏返しは 2 通り (裏返しする, しない) あります。また, 縦移動は 4 通り (上へ 0, 1, 2, 3 行), 横移動は 4 通り (左へ 0, 1, 2, 3 列) あります。これらの操作が汎魔方陣の等式を保つことは簡単に確かめることができます。定理 2.1 で与えられた 3 つの方陣それぞれに対して, 回転と裏返しで $4 \times 2 = 8$ 個の新たな汎魔方陣を作ることができます。また, それらの方陣はすべて $a_{22} = 1$ という性質をもちます。それらの方陣それぞれについて, 縦移動, 横移動によって $4 \times 4 = 16$ 個の新たな汎魔方陣を作ることができます。以上より, 定理 2.1 の 3 個の方陣から $3 \times 8 \times 16 = 384$ 個の異なる汎魔方陣を作ることができます。したがって, 次の系を得ることができました。

系 3.2. 4 次の汎魔方陣は 384 個である。

定理 3.1 の証明. 式 (3.1) の 1 行目の 4 つの式を足し合わせ, 次の式を得ます：

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 16 = 4c. \tag{3.2}$$

上式の左辺は 8×17 に等しいから, $c = 34$ を得ます。式 (3.1) について $b_{ij} = 2a_{ij} - 17$ とおくと, 配列 (b_{ij}) は -15 から 15 までの異なる奇数から成り, 次の等式を満たします：

$$\begin{array}{rl}
(\mathrm{r}\,i) & b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} = 0, \quad i = 1,2,3,4, \\
(\mathrm{r}\,j) & b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} + b_{4j} = 0, \quad j = 1,2,3,4, \\
(\mathrm{rd}\,j) & b_{1j} + b_{2,j+1} + b_{3,j+2} + b_{4,j+3} = 0, \quad j = 1,2,3,4, \\
(\mathrm{ld}\,j) & b_{1,j+3} + b_{2,j+2} + b_{3,j+1} + b_{4j} = 0, \quad j = 1,2,3,4.
\end{array} \tag{3.3}$$

まず, 次の 2 つの等式を順に証明します：

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{sq}\,ij) & b_{ij}+b_{i,j+1}+b_{i+1,j}+b_{i+1,j+1}=0, \quad i,j=1,2,3,4, \\ (\mathrm{jd}\,ij) & b_{i+2,j+2}=-b_{ij}, \quad i,j=1,2,3,4. \end{array} \tag{3.4}$$

式 (3.3) において, (r2) + (r3) + (rd1) + (ld1) − (c1) − (c4) を計算し, $b_{22}+b_{23}+b_{32}+b_{33}=0$ を得ることができます。この式に $(i-2)$ 行の縦移動, $(j-2)$ 列の横移動をし, $(\mathrm{sq}\,ij)$ を証明することができます。

次に, $b_{22}=x$, $b_{23}=y$, $b_{24}=z$, $b_{32}=w$, $b_{42}=u$ とおくと, (r2), (c2), (sq12), (sq13), (sq21), (sq31) から, 次式を得ることができます：

$$\begin{array}{llll} b_{21}=-x-y-z, & b_{12}=-x-w-u, & b_{13}=-y+w+u, & b_{14}=-z-w-u, \\ b_{31}=y+z-w, & b_{33}=-x-y-w, & b_{41}=-y-z-u. & \end{array} \tag{3.5}$$

これを方陣で表したのが図 4 である。これに条件 (ld1) を使うと, $u=-z$ が得られる。これを b_{ij} で表すと, $b_{42}=-b_{24}$ で, これは $b_{46}=-b_{24}$ と同じです。この式を上へ $(i-2)$ 回の縦移動, 左へ $(j-4)$ 回の横移動をし, 公式 $(\mathrm{jd}\,ij)$ を得ることができます。

公式 (jd11), (jd12), (jd21), (jd22) より, b_{11}, b_{34}, b_{43}, b_{44} を求めることができます。それらを図 2.4 に代入し, 図 2.5 を得ます。

b_{11}	$-x-w-u$	$-y+w+u$	$-z-w-u$
$-x-y-z$	x	y	z
$y+z-w$	w	$-x-y-w$	b_{34}
$-y-z-u$	u	b_{43}	b_{44}

図 3.4

$x+y+w$	$-x+z-w$	$-y-z+w$	$-w$
$-x-y-z$	x	y	z
$y+z-w$	w	$-x-y-w$	$x-z+w$
$-y$	$-z$	$x+y+z$	$-x$

図 3.5

問題を簡単にするため, 縦移動, 横移動, 回転, 裏返しを使うことにします。縦移動, 横移動は汎魔方陣の等式を保つので, 次の仮定をすることができます：

仮定 1. b_{22} は最小の数, すなわち $b_{22}<b_{ij}$, $(i,j)\neq(2,2)$.

回転は汎魔方陣の等式を保つので, 次の仮定をすることができます：

仮定 2. b_{23} は b_{22} の上下左右の 4 数の中で最大, すなわち $b_{23}>\max\{\,b_{12},\ b_{21},\ b_{32}\,\}$.

第 2 行に関する裏返しは汎魔方陣の等式を保つので, 次の仮定をすることができます：

仮定 3. b_{32} は b_{22} の上下の 2 数の中で最大, すなわち $b_{32}>b_{12}$.

仮定 1, 2, 3 より, 次の性質を導くことができます：

$$\text{(i) } x=-15, \quad \text{(ii) } y>w, \quad \text{(iii) } y>\frac{15-z}{2}, \quad \text{(iv) } y>15+z-w, \quad \text{(v) } w>\frac{15+z}{2}.$$

条件 (iii), (v) より, 次の性質を導くことができます：

$$\text{(vi) } y>0, \quad \text{(vii) } y>-z, \quad \text{(viii) } w>0, \quad \text{(ix) } w>z.$$

次に, $y=13$ を証明します。すなわち, $(i,j)\neq(2,3),(4,4)$ に対して $b_{23}>b_{ij}$ を証明します。仮定より, $(2,2)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,2)$ の場合は明らかです。他の場合は下のように証明することができます：

$$
\begin{array}{llllll}
(1,1) & y>y-(15-w), & (1,3) & y>-z>-z-(y-w), & (1,4) & y>0>-w, \\
(2,4) & y>w>z, & (3,1) & y>y-(w-z), & (3,3) & y>-z>15-w-y, \\
(3,4) & y>w>w-(15+z), & (4,1) & y>0>-y, & (4,3) & y>y-(15-z).
\end{array}
$$

$b_{44}=15$ ですから, b_{23} は 2 番目に大きい数です。したがって, $y=13$ が証明できました。

さらに, $w\geqq 7$ を証明します。すなわち, $(i,j)\neq(2,1),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)$ に対して $b_{32}>b_{ij}$ を証明します。仮定より, $(1,2)$, $(2,2)$ の場合は明らかです。他の場合は下のように証明することができます：

$$
\begin{array}{llllll}
(1,1) & w>w-(15-y), & (1,3) & w>w-(y+z), & (1,4) & w>0>-w, \\
(2,4) & w>z, & (3,1) & \multicolumn{3}{l}{w=2w-w>(15+z)-w>y+z-w,} \\
(3,3) & \multicolumn{3}{l}{w=2w-w>15+z-w>15-y-w,} & (3,4) & w>w-(15+z), \\
(4,1) & w>0>-y, & (4,3) & w>z>z-(15-y). & &
\end{array}
$$

$b_{44}=15$, $b_{23}=13$ ですから, b_{32} は 3, 4, 5 番目に大きい数です。したがって, $w\geqq 7$ が証明できました。

以上より, $x=-15$, $y=13$, $w\geqq 7$ です。$x=-15$, $y=13$ を図 2.5 に代入すると, その 16 個の成分は下のように 3 つのグループに分けることができます：

$$
\begin{gathered}
-15<-13<-w<-w+2<w-2<w<13<15, \\
z-2<z<z-w+13<z-w+15, \\
-z+w-15<-z+w-13<-z<-z+2.
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

$w=11$, 9, 7 の 3 つの場合に分けて考えます。

場合 1. $w=11$ の場合。式 (3.6) の第 1 グループの正の数は 15, 13, 11, 9 であり, 第 2 グループの最大数は $z+4$, 第 3 グループの最大数は $-z+2$ です。7 は第 2, 3 のどちらかのグループに属し, 最大数になっていなければならないので, $z+4=7$ または $-z+2=7$ のどちらかが成り立ちます。1 番目の場合, $z=3$ であり, これは図 3.2.1 になります。2 番目の場合, $z=-9$ であり, これは図 3.2.2 になります。

場合 2. $w=9$ の場合。式 (3.6) の第 1 グループの正の数は 15, 13, 9, 7 であり, 第 2 グループの最大数は $z+6$, 第 3 グループの最大数は $-z+2$ です。数 11 は第 2, 3 のどちらかのグループに属し, 最大数になっていなければならないので, $z+6=11$ と $-z+2=11$ のどちらかが成り立ちます。1 番目の場合, $z=5$ であり, 配列の中に 9 が 2 度現れます。これは定義に反します。2 番目の場合, $z=-9$ であり, 配列の中に 9 が 2 度現れます。これは定義に反します。

場合 3. $w=7$ の場合。式 (3.6) の第 1 グループの正の数は 15, 13, 7, 5 であり, 第 2 グループの最大数は $z+8$, 第 3 グループの最大数は $-z+2$ です。数 11 は第 2, 3 のどちらかのグループに属し, 最大数になっていなければならないので, $z+8=11$ と $-z+2=11$ のどちらかが成り立ちます。1 番目の場合, $z=3$ であり, これは条件 (v) に反します。2 番目の場合, $z=-9$ であり, これは図 3.2.3 になります。

4　4 次の汎積魔方陣

汎積魔方陣とは, n 行, n 列のマス目に異なる正の整数が入り, n 個の行, n 個の列, n 個の右下がり汎対角線, n 個の左下がり汎対角線の積がすべて同じ数 c になっているものをいいます。図 3.1 の配列 (a_{ij}) につい

て, この条件を式で表すと下の 16 個の式になります：

$$\begin{aligned}&a_{i1}\cdot a_{i2}\cdot a_{i3}\cdot a_{i4}=c, \quad i=1,2,3,4,\\&a_{1j}\cdot a_{2j}\cdot a_{3j}\cdot a_{4j}=c, \quad j=1,2,3,4,\\&a_{1j}\cdot a_{2,j+1}\cdot a_{3,j+2}\cdot a_{4,j+3}=c, \quad j=1,2,3,4,\\&a_{1,j+3}\cdot a_{2,j+2}\cdot a_{3,j+2}\cdot a_{4j}=c, \quad j=1,2,3,4.\end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし, 上式の添え字は 4 を法として表しています。すなわち, $a_{i+4,j}=a_{ij}$, $a_{i,j+4}=a_{ij}$ です。この節では次の定理を証明します。

定理 4.1.　4 次の汎積魔方陣の最小の共通積は $c=120^2$ である。そして, 縦移動, 横移動, 回転, 裏返しの違いを数えなければ, 最小の共通積をもつ汎積魔方陣は下図の 3 個である。

15	24	10	4
40	1	60	6
12	30	8	5
2	20	3	120

図 4.1.1

20	24	10	3
30	1	60	8
12	40	6	5
2	15	4	120

図 4.1.2

20	30	8	3
24	1	60	10
15	40	6	4
2	12	5	120

図 4.1.3

上の定理から, 第 3 節と同様の方法により, 次の系を得ることができます。

系 4.2. 最小の共通積をもつ 4 次の汎積魔方陣は 384 個ある。

定理 4.1 の証明. 式 (4.1) の対数を取ると,

$$\begin{aligned}&\log a_{i1}+\log a_{i2}+\log a_{i3}+\log a_{i4}=\log c, \quad i=1,2,3,4,\\&\log a_{1j}+\log a_{2j}+\log a_{3j}+\log a_{4j}=\log c, \quad j=1,2,3,4,\\&\log a_{1j}+\log a_{2,j+1}+\log a_{3,j+2}+\log a_{4,j+3}=\log c, \quad j=1,2,3,4,\\&\log a_{1,j+3}+\log a_{2,j+2}+\log a_{3,j+2}+\log a_{4,j}=\log c, \quad j=1,2,3,4.\end{aligned} \tag{4.2}$$

式 (4.2) について $b_{ij}=\log a_{ij}-\log c/4$ とおくと, 第 3 節の式 (3.3) に変換できます。そして, 第 3 節と同じ議論によって, 配列 (b_{ij}) が図 3.3 のように表せることがわかります。したがって, $e^x=X$, $e^y=Y$, $e^z=Z$, $e^w=W$, $c^{1/4}=a$ とおくと, 配列 (a_{ij}) は図 4.2 のように表せることがわかります。

$aXYW$	$\frac{aZ}{XW}$	$\frac{aW}{YZ}$	$\frac{a}{W}$
$\frac{a}{XYZ}$	aX	aY	aZ
$\frac{aYZ}{W}$	aW	$\frac{a}{XYW}$	$\frac{aXW}{Z}$
$\frac{a}{Y}$	$\frac{a}{Z}$	$aXYZ$	$\frac{a}{X}$

図 4.2

$\frac{mn}{l}$	$\frac{npq}{l^2}$	$\frac{mq}{l}$	p
$\frac{mpq}{l^2}$	l	$\frac{mnp}{l^2}$	$\frac{nq}{l}$
$\frac{np}{l}$	$\frac{mnq}{l^2}$	$\frac{pq}{l}$	m
q	$\frac{mp}{l}$	n	$\frac{mnpq}{l^3}$

図 4.3

図 4.2 において, $(2,2)$, $(1,4)$, $(4,1)$, $(3,4)$, $(4,3)$ 成分をそれぞれ l, p, q, m, n とおきます。すなわち,

$$aX=l, \quad \frac{a}{W}=p, \quad \frac{a}{Y}=q, \quad \frac{aXW}{Z}=m, \quad aXYZ=n. \tag{4.3}$$

すると, 図 4.3 が得られます。共通積は $c=(mnpq/l^2)^2$ です。

第 3 節と同様の議論によって, 図 4.3 の $a_{22} = l$ は最小の整数と仮定することができます。また, a_{22} に隣接する 4 つの数 a_{12}, a_{23}, a_{32}, a_{21} の中で a_{23} が最大と仮定することができます。また, $a_{32} > a_{12}$ と仮定することもできます。すなわち,

$$\frac{mnp}{l^2} > \frac{npq}{l^2}, \qquad \frac{mnp}{l^2} > \frac{mpq}{l^2}, \qquad \frac{mnp}{l^2} > \frac{mnq}{l^2}, \qquad \frac{mnq}{l^2} > \frac{npq}{l^2}. \tag{4.4}$$

これらを簡単にすると, $l < q < p < m$, $q < n$ です。

場合 1. $l = 1$ の場合。5 つの数 1, m, n, p, q は異なる正の整数でなければならないから, 4 つの数 m, n, p, q が 2, 3, 4, 5 のときに $c = 120^2$ となり, これが最小です。そして, $(q, p, m, n) = (2, 4, 5, 3)$ のとき図 4.1.1, $(q, p, m, n) = (2, 3, 5, 4)$ のとき図 4.1.2, $(q, p, m, n) = (2, 3, 4, 5)$ のとき図 4.1.3 が得られます。

場合 2. $l \geqq 2$ の場合, l の素因数の 1 つを s とすると, $l = rs$ と表すことができます。このとき, 図 4.3 に現れる次の 6 数は整数でなければなりません：

$$\frac{mn}{rs}, \quad \frac{mp}{rs}, \quad \frac{mq}{rs}, \quad \frac{np}{rs}, \quad \frac{nq}{rs}, \quad \frac{pq}{rs}. \tag{4.5}$$

だとすると, 式 (4.5) の分子はすべて s の倍数です。そうなるには, m, n, p, q のうちの少なくとも 3 数は s の倍数でなければなりません。また, それら 3 数は $l = rs$ より大きくなければなりません。したがって, それら 3 数はそれぞれ $(r+1)s$, $(r+2)s$, $(r+3)s$ 以上です。残り 1 つの数は $l = rs$ より大きいから $rs + 1$ 以上です。以上より,

$$\frac{mnpq}{l^2} \geqq \frac{(r+1)s \cdot (r+2)s \cdot (r+3)s \cdot (rs+1)}{r^2 s^2}. \tag{4.6}$$

場合 2.1. $r = 1$ の場合。式 (4.6) は次のように評価できる：

$$\frac{mnpq}{l^2} \geqq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot s(s+1) \geqq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 > 120. \tag{4.7}$$

場合 2.2. $r = 2$ の場合。式 (4.6) は次のように評価できる：

$$\frac{mnpq}{l^2} \geqq 3 \cdot 5 \cdot s(2s+1) \geqq 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 > 120. \tag{4.8}$$

場合 2.3. $r \geqq 3$ の場合。式 (4.6) は次のように評価できる：

$$\begin{aligned} \frac{mnpq}{l^2} &\geqq \frac{r+1}{r} \cdot (r+2)s \cdot (r+3)s \cdot \frac{rs+1}{rs} \\ &> (r+2)s \cdot (r+3)s \geqq 5 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 2 = 120. \end{aligned} \tag{4.9}$$

場合 2.1, 2.2, 2.3 のすべてにおいて $c > 120^2$ となり, 場合 1 の共通積 120^2 より大きくなります。したがって, 最小の共通積をもつ汎積魔方陣は, 場合 1 で得られた図 4.1, 4.2, 4.3 です。

参考文献

[1] M. Gardner, Mathematical Games, Scientific American 210, No.1 (1964), 120–127.