イプシロン　2020. Vol.62，115 － 119

特異点を持つ線形微分方程式の特徴づけ（要旨）

＜修士論文要旨＞

東　　直　樹

1　研究の背景と研究課題

本論文では複素領域における線形常微分方程式を扱う．複素数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ と複素数 c に対して，無限級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ を $x=c$ まわりの**冪級数**という．$x=c$ まわりの冪級数全体の集合を $\widehat{\mathcal{O}}(c)$ で表し $x=c$ まわりの**形式的冪級数環**という．また，$x=c$ まわりの冪級数のうち，収束半径が正であるもの全体の集合を $\mathcal{O}(c)$ で表し $x=c$ まわりの**収束冪級数環**という．

既知関数 $a_i(x)$, $f := f(x) \in \mathcal{O}(c)$ と未知関数 $u := u(x)$ に対して，次の形の方程式を $\boldsymbol{m}$ **階線形常微分方程式**という：

$$\sum_{i=0}^{m} a_i(x)u^{(i)} = f \quad (a_m(x) \not\equiv 0). \tag{$*$}$$

ここで，$a_m(c) \neq 0$ となる $x=c$ を方程式 $(*)$ の**通常点**といい，$a_m(c)=0$ となる $x=c$ を方程式 $(*)$ の**特異点**という．$x=c$ が通常点であるとき，方程式 $(*)$ の解 $u \in \mathcal{O}(c)$ が存在することが知られている [12]．一方，$x=c$ が特異点であるとき，解 $u \in \widehat{\mathcal{O}}(c)$ が存在したとしても，$u \in \mathcal{O}(c)$ とは限らない．以後，簡単のために，方程式 $(*)$ は原点を特異点としてもつと仮定し，$\widehat{\mathcal{O}}(0)$, $\mathcal{O}(0)$ をそれぞれ単に $\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ とかく．例として，次の 2 つの方程式を考える：

$$x(1-x)u'' + (1-3x)u' - u = 0, \tag{1.1}$$

$$x^2v' - v = -x. \tag{1.2}$$

方程式 (1.1), (1.2) は原点を特異点としてもつ．それぞれの冪級数解を求めると $u = \sum_{n=0}^{\infty} Cx^n$ $(C \in \mathbb{C})$, $v = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\,x^n$ である．このとき，u, v の収束半径はそれぞれ $1, 0$ であるから，$u \in \mathcal{O}$, $v \notin \mathcal{O}$ である．本論文では特異点を解の収束半径によって次のように分類する．

定義 1. 方程式 $(*)$ が原点を特異点としてもつとき，任意の $f \in \mathcal{O}$ に対して，命題「方程式 $(*)$ の原点まわりの冪級数解が存在するならば，その解は正の収束半径をもつ」が真であるとき，その特異点を**確定特異点**といい，そうでないとき**不確定特異点**という．

原点を不確定特異点としてもつ方程式は形式的冪級数解が存在しても，f によっては原点以外の点で発散してしまい意味をもたない場合がある．方程式に対して，冪級数の範囲で「意味のある解」が存在するかを判定するために，原点が確定特異点であるための条件を求めることは重要である．また，冪級数を拡張した Laurent 級数の範囲においても「意味のある解」が存在するための条件を求めることは興味深い問題である．そこで，本論文では次の問題に解答を与えることを目標とする．

問題. 原点を特異点としてもつ方程式 $(*)$ について

(a) 原点を確定特異点としてもつための必要十分条件を与え，その条件について考察せよ．
(b) 原点を確定特異点としてもつかどうかを判定する方法を与えよ．
(c) f を収束 Laurent 級数とするとき，形式的 Laurent 級数解の収束条件を与えよ．

2　主定理と考察

主定理を述べるために必要な概念を導入する．∂ を x に関する微分 $\partial = \dfrac{d}{dx}$ を表す作用素とし，有限和

$$P = \sum_{i=0}^{m} a_i(x)\partial^i \quad (a_m(x) \not\equiv 0,\, a_i(x) \in \mathcal{O}) \tag{$**$}$$

を **m 階線形常微分作用素**（以後，単に**微分作用素**）という．このとき，方程式 $(*)$ は $Pu = f$ と表せる．微分作用素 $(**)$ に対して，m を P の**階数**といい $\operatorname{ord} P$ で表す．本論文では $\operatorname{ord} P > 0$ を仮定する．また，$a_i(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}x^j$ とするとき，$\operatorname{ord} a_i(x) := \min\{j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid a_{ij} \neq 0\}$ を $a_i(x)$ の**位数**という．ただし，$a_i(x) \equiv 0$ のとき $\operatorname{ord} a_i(x) = \infty$ と定める．

例 1. 方程式 (1.1), (1.2) はそれぞれ微分作用素 $P_1 := x(1-x)\partial^2 + (1-3x)\partial - 1$, $P_2 := x^2\partial - 1$ により $P_1 u = 0$, $P_2 v = -x$ と表せる．また，$\operatorname{ord} P_1 = 2$, $\operatorname{ord} x(1-x) = 1$ である．

線形写像 $T : V \to W$ に対して，$\operatorname{Ker} T := \{v \in V \mid Tv = 0\}$, $\operatorname{Im} T := \{Tv \in W \mid v \in V\}$, $\operatorname{Coker} T := W/\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim \operatorname{Coker} T$ をそれぞれ T の**核**，**像**，**余核**，**指数**という．ここで，微分作用素 P は線形作用素であり，$\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ など様々な関数空間に作用するため，たとえば，$\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ における指数をそれぞれ $\operatorname{Ind}(P, \widehat{\mathcal{O}})$, $\operatorname{Ind}(P, \mathcal{O})$ のように表して区別する．このとき，$\operatorname{Irr} P := \operatorname{Ind}(P, \widehat{\mathcal{O}}) - \operatorname{Ind}(P, \mathcal{O})$ を P の**不確定度**という．

例 2. $P = x\partial^2$ とすると，$\operatorname{Ker}(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \{c_0 + c_1 x \mid c_0, c_1 \in \mathbb{C}\}$, $\operatorname{Coker}(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \{c_0 + \operatorname{Im}(P, \widehat{\mathcal{O}}) \mid c_0 \in \mathbb{C}\}$ であるから，$\operatorname{Ind}(P, \widehat{\mathcal{O}}) = 2 - 1 = 1$ である．$\dim \operatorname{Ker} P$ は方程式 $Pu = f$ の解空間の次元であり，$\dim \operatorname{Coker} P$ は方程式 $Pu = f$ が解をもつための f が満たすべき条件の数を意味する．

線形写像 $T : V \to V'$ に対して，W, W' をそれぞれ V, V' の部分空間とする．$T(W) := \{Tw \mid w \in W\} \subset W'$ が成り立つとき，$\overline{T} : V/W \ni v + W \mapsto Tv + W' \in V'/W'$ が定義される．この $\overline{T}$ を T の**誘導する線形写像**という．

例 3. $\mathcal{O} \subset \widehat{\mathcal{O}}$, $P(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ であるから，微分作用素 P に対して $\overline{P} : \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O} \ni u + \mathcal{O} \mapsto Pu + \mathcal{O} \in \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}$ が定義される．

微分作用素 $(**)$ に対して，$\operatorname{ord}_{(-1,1)}(P) := \max\{i - \operatorname{ord} a_i(x)\}$ を P の重みベクトル $(-1, 1)$ に関する**階数**という．また，$d = \operatorname{ord}_{(-1,1)}(P)$ とおくとき，$\operatorname{in}_{(-1,1)}(P) := \sum_{i-j=d} a_{ij}x^j\partial^i$ を P を重みベクトル $(-1, 1)$ に関する**主部**といい，$\operatorname{in}_{(-1,1)}(P)x^s = \sum_{i-j=d} a_{ij}s(s-1)\cdots(s-i+1)x^{s-d} =: b(s)x^{s-d}$ により定まる s の多項式 $b(s)$ を重みベクトル $(-1, 1)$ に関する **b 関数**（または，**決定多項式**）という．

例 4. 例 1 の $P_1 = x(1-x)\partial^2 + (1-3x)\partial - 1$ に対して，$\operatorname{ord}_{(-1,1)}(P_1) = 1$, $\operatorname{in}_{(-1,1)}(P_1) = x\partial^2 + \partial$, $b(s) = s^2$ である．また，例 1 の $P_2 = x^2\partial - 1$ に対して，$\operatorname{ord}_{(-1,1)}(P_2) = 0$, $\operatorname{in}_{(-1,1)}(P_2) = -1$, $b(s) = -1$ である．

非負整数 k に対して，$\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ のイデアル $\widehat{\mathcal{O}}_k$, $\mathcal{O}_k$ を $\widehat{\mathcal{O}}_k := \left\{\hat{f} \in \widehat{\mathcal{O}} \,\middle|\, \operatorname{ord} \hat{f}(x) \geq k\right\}$, $\mathcal{O}_k := \{f \in \mathcal{O} \mid \operatorname{ord} f(x) \geq k\}$ で定める．ただし，$k < 0$ のとき，$\widehat{\mathcal{O}}_k = \widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}_k = \mathcal{O}$ とする．

例 5. $\widehat{\mathcal{O}}_1 = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{C}\right\} = \left\{x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\middle|\, a_n \in \mathbb{C}\right\} = x\widehat{\mathcal{O}}$ であり，$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\, x^n \in \widehat{\mathcal{O}}_1$ である．

$\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ の商体をそれぞれ**形式的 Laurent 級数体**，**収束 Laurent 級数体**といい，$\widehat{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ で表す．このとき，任意の $\widehat{\mathcal{K}}$ の元は，負冪の項が有限個の形式的 Laurent 級数 $\sum_{n=-N}^{\infty} a_n x^n \quad (a_n \in \mathbb{C})$ で表せる．

例 6. x^{-1} は $\widehat{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ の元ではないが，$\widehat{\mathcal{K}}$, $\mathcal{K}$ の元である．また，$f = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \in \widehat{\mathcal{O}}$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \in \widehat{\mathcal{O}}$ に対して，$g = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ より，$x^2/(1-x)$ がわかる．したがって，$f/g \in \widehat{\mathcal{K}}$ は Laurent 級数 $\dfrac{1-x}{x^2} \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=-1}^{\infty} x^n$ で表せる．

本論文における主定理は次の通りである：

定理 1. 微分作用素 $(**)$ が原点を特異点としてもつこと，すなわち $a_m(0) = 0$ を仮定する．また，微分作用素 P の重みベクトル $(-1, 1)$ に関する b 関数 $b(s)$ は高々 m 次の多項式であるから，非負整数 k を $l \geq k$ を満たす任意の整数 l に対して $b(l) \neq 0$ が成り立つようにとれる．また，$d = \mathrm{ord}_{(-1,1)}(P)$ とする．このとき，次の 8 つの条件はすべて同値である：

(1) $\dim \mathrm{Ker}\,(\overline{P}, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$,
(2) $\mathrm{Irr}\, P = 0$,
(3) $\mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{O})$ かつ $\mathrm{Coker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Coker}\,(P, \mathcal{O})$,
(4) $\dim \mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k-d}) = 0$,
(5) $m - \mathrm{ord}\, a_m(x) \geq i - \mathrm{ord}\, a_i(x) \quad (0 \leq i \leq m)$,
(6) $\mathrm{ord}\, P = \mathrm{ord}\, \left(\mathrm{in}_{(-1,1)}(P)\right)$,
(7) $\dim \mathrm{Ker}\,(\overline{P}, \widehat{\mathcal{K}}/\mathcal{K}) = 0$,
(8) $\dim \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{K}) = 0$.

定理 1 の各条件について考察していく．

まず，(1) の条件を図で表すと図 1 のようになり，「任意の $f \in \mathcal{O}$ に対して，方程式 $Pu = f$ の冪級数解 $u \in \widehat{\mathcal{O}}$ が存在するならば $u \in \mathcal{O}$」を意味する．これは，原点が $Pu = f$ の確定特異点であることの定義（定義 1）に他ならない．一方，$\dim \mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \neq 0$ であるとき，図 2 のようになり，「ある $f \in \mathcal{O}$ と $\hat{u} \in \widehat{\mathcal{O}} \setminus \mathcal{O}$ が存在して，$P\hat{u} = f$」が成り立つこと，すなわち，ある f に対して収束半径が 0 の冪級数解が存在することを意味する．

例 7. 例 1 の $P_2 = x^2\partial - 1$ について，$P_2 u = -x$ の冪級数解 $u = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)!\, x^n$ は原点以外で発散するから図 3 のようになり，$\dim \mathrm{Ker}\,(P_2, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \neq 0$ がわかる．

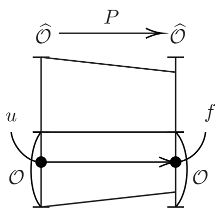

図 1　$\dim \mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) = 0$

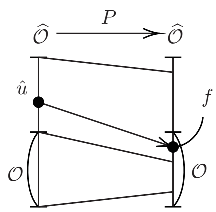

図 2　$\dim \mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \neq 0$

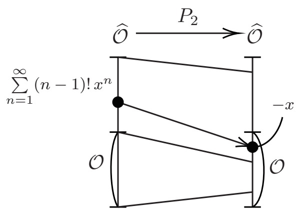

図 3　$\dim \mathrm{Ker}\,(P_2, \widehat{\mathcal{O}}/\mathcal{O}) \neq 0$

この考察により，定理 1 の各条件は，原点が $Pu = f$ の確定特異点であることと同値である．したがって，以下の考察はすべて原点が $Pu = f$ の確定特異点であるような微分作用素 P に関するものであり，前章の問題 (a) に解答を与える．

(2) の条件は $\mathrm{Irr}\, P$ の定義から $\mathrm{Ind}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{O})$ と変形できる．ここで，微分作用素 P に対して，$\mathrm{Ker}\, P$ の次元は「$Pu = f$ の解 u の自由度」のことである．また，$\mathrm{Coker}\, P$ の次元は「$Pu = f$ が解をもつために f が満たすべき条件の数」のことであり，いわば「f の不自由度」を意味する．したがって，$\mathrm{Ind}\, P$ は微分作用素 P と P が作用する関数空間に対して，方程式 $Pu = f$ における「u の自由度」から「f の不自由度」を引いた，「$Pu = f$ の解に関する指標」である．ゆえに，この条件は $\widehat{\mathcal{O}}$ と $\mathcal{O}$ における「$Pu = f$ の解に関する指標」に差がないことを意味する．

(3) の前半の条件は，特に $\mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) \subset \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{O})$ であること，すなわち，$Pu = f$ の形式的冪級数解があれば必ず収束することを意味している．$Pu = f$ が原点を確定特異点としてもつならば，$\mathrm{Ker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{O})$ であることは確定特異点の定義から明らかであるが，逆が成り立つためには後半の条件 $\mathrm{Coker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Coker}\,(P, \mathcal{O})$ が必要であることがわかる．この後半の条件は，直感的には，微分方程式 $Pu = f$ が解をもつための f に関する条件が $\widehat{\mathcal{O}}$ と $\mathcal{O}$ の間に違いがないことを表す．

例 8. $P_2 = x^2\partial - 1$ に対して，$\mathrm{Ker}\,(P_2, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Ker}\,(P_2, \mathcal{O}) = \{0\}$ であるが，$-x + \mathrm{Im}\,(P_2, \widehat{\mathcal{O}}) \notin \mathrm{Coker}\,(P_2, \widehat{\mathcal{O}})$, $-x + \mathrm{Im}\,(P_2, \mathcal{O}) \notin \mathrm{Coker}\,(P_2, \mathcal{O})$ より，$\mathrm{Coker}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) \neq \mathrm{Coker}\,(P, \mathcal{O})$ である．よって，原点は $P_2u = f$ の不確定特異点である．

(4) の条件は，b 関数から定まる k に対して $P : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k-d}$ が全射であることを意味する．すなわち，図 4 のように位数が $k - d$ 以上の任意の収束冪級数 $f \in \mathcal{O}_{k-d}$ に対して，$Pu = f$ の解 $u \in \mathcal{O}_k$ が存在する．確定特異点の定義から，原点を確定特異点としてもつ方程式 $Pu = f$ に対して，形式的冪級数解が存在するならば必ず正の収束半径をもつが，この条件は形式的冪級数解が存在するための f に関する十分条件を与えるものである．なお，必要十分条件が [8] により与えられている．

例 9. 微分作用素 $P = x(1-x)\partial^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\,\partial - \alpha\beta \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C})$ に対して，$Pu = 0$ は Gauss の超幾何微分方程式である．このとき，$\mathrm{ord}_{(-1,1)}(P) = 1$ であり，b 関数は $b(s) = s(s + \gamma - 1)$ より $b(s) = 0 \iff s = 0, 1 - \gamma$ である．

(i) $\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき
　$1 - \gamma$ は正の整数となるから，$k = 2 - \gamma$ とすればよい．このとき，図 5 のように任意の $f \in \mathcal{O}_{1-\gamma}$ に対して，微分方程式 $Pu = f$ を満たす正則解 $u \in \mathcal{O}_{2-\gamma}$ が存在する．

(ii) $\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき
　$1 - \gamma$ は正の整数でないから，$k = 1$ とすればよい．このとき，図 6 のように任意の $f \in \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$ に対して，微分方程式 $Pu = f$ を満たす正則解 $u \in \mathcal{O}_1$（定数項が 0 の収束冪級数解）が存在する．

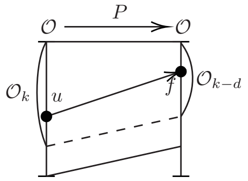

図 4　$\dim \mathrm{Coker}\,(P : \mathcal{O}_k \to \mathcal{O}_{k-d}) = 0$

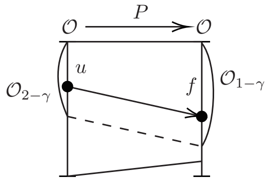

図 5　$\gamma \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき

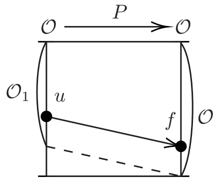

図 6　$\gamma \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ のとき

(5) の条件は Fuchs の条件とよばれる有名な条件であり，これを原点が $Pu = f$ の確定特異点であることの定義とすることもある．この条件により，微分作用素，または微分方程式から直ちに得られる情報だけで，容易に原点が $Pu = f$ の確定特異点であるかどうかを判定することができる．

(5)，(6) の条件は，Newton 図形とよばれるもので表現できる．微分作用素 $(**)$ に対して，s-t 平面上における $Q(i) := \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid s \leq i,\, t \leq i - \mathrm{ord}\, a_i(x)\}$ $(0 \leq i \leq m)$ の凸包を $N(P)$ で表し，これを微分作用素 P の **Newton 図形**という．Newton 図形 $N(P)$ がただ一つの自明な頂点をもつことと，$Pu = f$ が原点を確定特異点としてもつことは同値である．次の例からもわかる通り，(6) の条件は Newton 図形の t 座標，(7) の条件は Newton 図形の s 座標に関する条件である．

例 10. 例 1 の $P_1 = x(1-x)\partial^2 + (1-3x)\partial - 1$, $P_2 = x^2\partial - 1$ について，P_1 は条件 (5) を満たすが，P_2 は条件 (5) を満たさない．また，P_1, P_2 の Newton 図形をそれぞれかくと，図 7 のようになる．これらのことからも $P_1u = f$ は原点を確定特異点としてもち，$P_2u = f$ は原点を不確定特異点としてもつことがわかる．

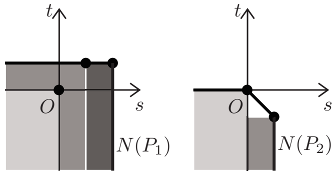

図 7　Newton 図形

これらの条件を満たすかどうかは微分方程式，または，微分作用素から直ちに判定できる．したがって，これらの条件 (5)，(6) は前章の問題 (b) に解答を与えるものである．

(7) の条件から，(1) で考察したことが $\widehat{\mathcal{O}}, \mathcal{O}$ を $\widehat{\mathcal{K}}, \mathcal{K}$ に入れ替えても成り立つ．すなわち，原点まわりの形式的 Laurent 級数解が正の収束半径をもつことと，原点まわりの冪級数解が正の収束半径をもつことは同値であることがわかる．このことは，前章の問題 (c) に対する解答を与える．ただし，次の例のように，$f \in \mathcal{O}$ としても $\widehat{\mathcal{O}}$（または $\mathcal{O}$）と $\widehat{\mathcal{K}}$(または $\mathcal{K}$) における $Pu = f$ の解が一致するとは限らない．

例 11. $P_3 := x\partial + 1$ に対して $Pu = 0$ の解を求めると，$\widehat{\mathcal{O}}$（または $\mathcal{O}$）における解は $u = 0$ であるが，$\widehat{\mathcal{K}}$(または $\mathcal{K}$) における解は $u = cx^{-1}$（$c \in \mathbb{C}$）である．

(8) の条件は，任意の微分作用素 P に対して $\mathrm{Ind}\,(P, \widehat{\mathcal{K}}) = 0$ が成り立つ（本論文の 3.3 節にて証明している）ことから，$\mathrm{Ind}\,(P, \widehat{\mathcal{K}}) = \mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{K})$ と同値である．したがって，(2) の条件の Laurent 級数版といえる．しかし，$\mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{O}) = \mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{K})$ を仮定しても，$\dim \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{O}) = \dim \mathrm{Ker}\,(P, \mathcal{K}), \dim \mathrm{Coker}\,(P, \mathcal{O}) = \dim \mathrm{Coker}\,(P, \mathcal{K})$ が成り立つとは限らない．

例 12. 例 11 の $P_3 = x\partial + 1$ に対して $\dim \mathrm{Ker}\,(P_3, \mathcal{O}) = \dim \mathrm{Coker}\,(P_3, \mathcal{O}) = \mathrm{Ind}\,(P_3, \mathcal{O}) = 0$ である．ここで，方程式 $P_3 u = f$ は原点を確定特異点としてもつから，$\mathrm{Ind}\,(P_3, \mathcal{K}) = 0$ である．しかし，例 11 で見たように，$\mathrm{Ker}\,(P_3, \mathcal{K}) = \{Cx^{-1} \mid C \in \mathbb{C}\}$ である．また，$P_3 u = f$ $(f \in \mathcal{K})$ が $\mathcal{K}$ の範囲において解をもつためには，f の x^{-1} の係数が 0 でなければならないから，$\mathrm{Coker}\,(P_3, \mathcal{K}) = \{Cx^{-1} + \mathrm{Im}\,(P_3, \mathcal{K}) \mid C \in \mathbb{C}\}$．したがって，$\dim \mathrm{Ker}\,(P_3, \mathcal{K}) = 1, \dim \mathrm{Coker}\,(P_3, \mathcal{K}) = 1$ であり，$\dim \mathrm{Ker}\,(P_3, \widehat{\mathcal{K}}) \neq \dim \mathrm{Ker}\,(P_3, \widehat{\mathcal{O}}), \dim \mathrm{Coker}\,(P_3, \mathcal{K}) \neq \dim \mathrm{Coker}\,(P_3, \mathcal{O})$ である．

本章の定理と考察により，先に与えた問題に対して次の解答が得られる：

解答. 以上の考察から，次の解答を得る：

(a) 定理 1 とその後の考察を参照.
(b) Fuchs の条件や Newton 図形などにより容易に判定可能である.
(c) 形式的冪級数解の収束条件と同じ.（ただし，$\mathrm{Ind}\,(P, \widehat{\mathcal{O}}) = \mathrm{Ind}\,(P, \widehat{\mathcal{K}})$，$\mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{O}) = \mathrm{Ind}\,(P, \mathcal{K})$ が成り立つとは限らない.）

参考文献

[1] Malgrange, B(1971-1972) *Sur les singuliers des équations différerntielles,* Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique).
[2] Mutsumi Saito, Bernd Sturmfels, Nobuki Takayama (1991) *Gröbner Deformations of Hypergeometric Differential Equations,* Springer.
[3] 大阿久俊則 (2002)『D 加群と計算数学』朝倉書店.
[4] 笠原乾吉 (1978)『複素解析—1 変数解析関数—』実教出版.
[5] 加藤五郎 (2003)『コホモロジーのこころ』岩波書店.
[6] 黒田成俊 (1980)『関数解析』（共立数学講座 15）共立出版.
[7] 志甫淳 (2016)『層とホモロジー代数』共立出版.
[8] 田島慎一 (2000)「非同次常微分方程式の可解条件について」『数理解析研究所講究録』1168 巻，pp.66-79.
[9] 原岡嬉重 (2002)『超幾何関数』朝倉書店.
[10] 堀田良之 (1988)『加群十話—代数学入門—』朝倉書店.
[11] 三宅正武「『出会い　そして　数学』—微分方程式系のニュートン図形をめぐって—」<http://ocw.nagoya-u.jp/files/220/miyakes.pdf> 2019 年 9 月 18 日アクセス.
[12] 矢野健太郎・石原繁 (1978)『微分方程式』（演習数学選書）裳華房.
[13] 雪江明彦 (2010)『代数学 2　環と体とガロア理論』日本評論社.