

高等学校の図形の計量的な問題解決における 図の指導に関する研究

<修士論文要旨>

後藤 彩可

論文構成

第1章 本研究の目的と方法	4.2 指導計画
1.1 本研究の背景と本研究の目的	4.3 パイロットスタディについて
1.2 本研究の方法と構成	4.3.1 調査方法
第2章 図的表現に関する先行研究	4.3.2 調査結果
2.1 Cooper, Sidney & Alibani の見解	4.3.3 考察と授業実践に向けて
2.2 Rellensmann, Schukajlow & Leopold の見解	4.4 本章のまとめ
2.3 先行研究のまとめと本研究の焦点・課題	第5章 授業実践とその成果について
第3章 高等学校の図形の計量問題の解決に おける図の効果に関する調査	5.1 指導の様子について
3.1 調査方法	5.2 授業実践後の成果について
3.2 調査結果と解答例	5.2.1 調査方法
3.2.1 [調査1]の結果	5.2.2 [調査2]の結果
3.2.2 解答例	5.2.3 考察と課題
3.3 考察と課題	5.3 本章のまとめ
3.4 本章のまとめ	第6章 本研究のまとめと今後の課題
第4章 指導の枠組み・指導計画	6.1 本研究のまとめ
4.1 指導の枠組み	6.2 本研究に残された課題
	参考・引用文献

第1章 本研究の目的と方法

生徒が問題解決を行うとき、図をかくことが有効であるということは多くの研究者によって指摘されており、例えば、望月(2005)や Van Meter and Garner (2005)は、学習者が作成した図を使って問題解決を促すことに価値があると述べている。しかしその一方で、実際に問題を解くときに図をかくことに苦勞する生徒は少なくない。図表を利用する際の学習者の問題として、植阪(2014)は、次の3点を挙げ、それぞれが相互に関連していると述べている。

- (1) 「自発的に図表を作成・利用しようとしていない」
- (2) 「適切な図表を選択・作成できない」
- (3) 「図表から正しく推論できない」 (p.52)

本研究では、(1)と(2)の問題に着目しつつも、自発的に適切な図を作成させることに焦点を当てた先行研究が少ない現状を考慮し、生徒が問題解決に有用な図を作成することができるようになるために必要と考えられる指導について検討していくことにする。図的表現の役割に関する

先行研究としては、小学校で多くの研究がなされているものの、高等学校数学の分野では、図的表現の役割や図をかくことに関する指導に着目した研究はあまりない。そこで、本研究では、高等学校数学の図形の計量問題に焦点を当て、その解決に有用な図をかくための指導の枠組みを構成するとともに、その枠組みに基づく授業を実践し、枠組みの有効性を検討することを目的とする。

本研究では、前節で述べた研究目的を達成するために、次の4点を研究課題として設定した。

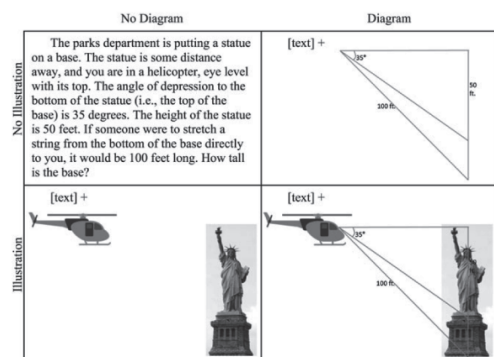
- 〔研究課題1〕 図形の計量問題において、先行研究から問題解決のために有用とされる図を整理すること
- 〔研究課題2〕 高校生が図をかくことに対してどのような困難性を抱えているのかを明らかにすること
- 〔研究課題3〕 困難性の克服に向けた指導の枠組みを検討し、授業の実践を行うこと
- 〔研究課題4〕 授業実践の分析を行い、成果と課題をまとめること

第2章 図的表現に関する先行研究

本節では、図形の計量問題のサポートとなり得る図の種類とそれぞれの役割について、先行研究をもとに比較・整理する。

2.1 Cooper, Sidney & Alibani の見解

Cooper, Sidney, & Alibani(2018)の実践調査は、92人の学部生を対象とし、状況を表す図をイラスト(illustrations)、数学的な図を図式(diagrams)と定義し、それぞれ2種類の図の有無に着目した4種類のサポートを与えることで、数学的問題解決にどのように影響するか調査を行っている。



調査結果として、図のない問題よりも図のサポートがある問題を正確に解決する傾向が高く、数学に対して前向きな態度を取る生徒ほど、図式の効果として顕著な結果が出た。また、数学の能力が高い生徒は、イラストのない問題よりもイラストのある問題を正確に解答する傾向があり、さらに、数学の能力の低い生徒はイラストのある問題を正確に解答する傾向が低かった。

2.2 Rellensmann, Schukajlow & Leopold の見解

Rellensmann, Schukajlow & Leopold は、描画に関する方略的知識、状況図(Situational Drawing)と数学的線画(Mathematics Drawing)の正確さのうち数学的モデルを促進するための条件はどこにあるのかを調査した。

<p>Fire brigade</p> <p>In 2004, the Munich fire brigade got a new fire engine with a turn-ladder. Using the cage at the end of the ladder, the fire-brigade can rescue people from great heights. According to the official rules, while rescuing people, the truck has to maintain a distance of at least 12 meters from the burning house.</p> <p><i>Technical data of the engine:</i></p> <p>Engine model: Daimler Chrysler AG Econic 18/28 LL - Diesel</p> <p>Construction year: 2004</p> <p>Power: 250 kw (279 HP)</p> <p>Cubic capacity: 6,374 cm³</p> <p>Dimensions of engine: length 10 m width 2.5 m height 3.19 m</p> <p>Dimensions of ladder: length 30 m</p> <p>Weight of unloaded engine: 15,540 kg</p> <p>Total weight: 18,000 kg</p> <p>From what maximal height can the Munich fire brigade rescue people with this fire engine?</p> <p>a) Make a situational drawing for this task. b) Make a mathematical drawing for this task. c) Solve the task. Write down how you found your solution.</p>	
---	--

研究結果として、生徒は描画に関する十分な方略的な知識と、モデルパフォーマンスをサポートする正確な数学的な描写を作成する能力を備えていなければならないことを示し、この結果が数学的な図が問題解決のモデル化に特に役立つという仮説を支持していると述べている。状況描写はモデリングパフォーマンスに直接関連するものではなかったが、問題の表面構造の下にある数学的構造を認識することによって数学的な図を構築するのを支援するかもしれないため、状況描写は数学的モデルにも有益であり得ると述べている。

2.3 先行研究のまとめと本研究の焦点・課題

Cooper, Sidney & Alibani(2018)は、2次元での図形の計量問題を例に、イラストと図式の2種類のサポートに焦点を置き、それぞれのサポートの有無から、図式のサポートが有効であることと、イラストにおいては学習者の態度に依存することを明らかにした。しかし、Rellensmann, Schukajlow & Leopold (2017)にあるように、状況を理解するためのイラストに関しては間接的に問題解決に有益であり得ることを述べていることも示されており、情景図のようなサポートに関しても高等学校の図形の計量問題に有効性がある可能性もある。

そこで本研究では、これら2種類のサポートに焦点を当てて、それぞれのサポートが日本の高校生にはどのように働くのかを調査すると共に、サポートがない問題で生徒が図を自発的にかくためにどのような困難性を感じるのか特定することで、その困難性の克服に向けた指導の手立てを検討し、授業実践として成果をまとめていくことにする。

第3章 高等学校の図形の計量問題の解決における図の効果に関する調査

本章では、問題解決を行う際にサポートとなりうる図を特定すること、サポートがないときに数学的に正確な図をかくことができるのかを調べることを目的とした調査問題を行い、その結果の分析と考察を述べる。

3.1 調査方法

本調査は2つの調査に分けて実施する。それぞれの調査を調査A、調査Bと設定する。どちらの調査も共通の問題を出題し、生徒はそれぞれ異なる条件の下で解答を導出する。問題は以下の通りである。

【調査1】

塔から真西の地点に太郎さんがいて、塔から真南の地点に花子さんがいます。それぞれの地点から塔の頂点の仰角を測ると太郎さんは 30° で、花子さんは 45° でした。塔の高さが100mのとき、太郎さんと花子さんの直線距離を求めなさい。ただし、太郎さんと花子さんの身長は考えないものとします。


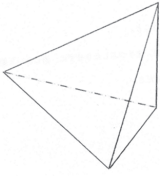
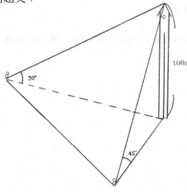
※仰角…物を見上げたときの視線の方向と水平面のなす角

調査Aでは高校1年生の生徒80人を20人×4群に振り分け、Cooper, Sidney, Alibani(2018)の調査を参考に、それぞれの4群に対して異なる図を与える。与える図のサポートの種類として、Rellensmann, Schukajlow, Leopold (2017)の定義にならい、以下のように設定する。

- ・状況図(Situational Drawing : 以下SDとする) : 情景図や場面図のように、具体的に数値はないものの、その場面を与えるような図を指すこととする。
- ・数学的線画(Mathematical Drawing : 以下MDとする) : 数学的記号はないものの、数値を付加しやすくするための必要な線分など構造を取り上げている図を指すこととする。

これら2種類のサポートの有無で、4種類の問題を作成し、4群に分けた生徒にそれぞれ取り組ませる。4種類の

分類は以下の通りである。

	Non-SD	SD
Non-MD	塔から真西の地点に太郎さんがいて、塔から真南の地点に花子さんがいます。それぞれの地点から塔の頂点の仰角を測ると太郎さんは 30° で、花子さんは 45° でした。塔の高さが100mのとき、太郎さんと花子さんの直線距離を求めなさい。ただし、太郎さんと花子さんの身長は考えないものとします。 ※仰角…物を見上げたときの視線の方向と水平面のなす角	問題文+ 
MD	問題文+ 	問題文+ 

調査Bは、高校1年生の生徒39人を対象に、SD、MDのどちらのサポートもない問題を与えるが、問題を解く前の説明時に図をかいてから問題を解くよう指示をし出し、どのように図をかき問題を解いていくか、問題解決に有効な図がかけられているかを分析し、考察する。

3.2 調査結果

各条件における参加者、正解者、正答率を示した表は以下の通りである。

	全体数	正解者	正答率
調査A(80名)			
SD+MD	20	12	0.60
MD	22	12	0.54
SD	20	12	0.60
サポートなし	18	9	0.50
調査B(39名)	39	19	0.48

以上の結果から、本調査の問題ではサポートの有無によって若干の正答率の差はあるものの、大きな差異は見られないことが分かった。しかし、参加者の間違いの原因を見ていくと、サポート有無に関わらず、正解者全員が問題解決に必要な情報を図にかいているものの、不正解者のほとんどは問題解決に必要な情報を図にかくことができていないことが分かった。

3.3 考察と課題

調査結果から、問題解決に必要なプロセスとして、3つの段階があり、それぞれの段階で生徒は困難性を抱えていると考えられる。

プロセス1：MD+の導出

本研究におけるMD+とは、MDに加え、問題文に記載されている数学的記号や数値情報も加えられた図のことを指す。

問題解決を行う際に、まず問題文を読み、状況を把握した上で図をかくことが大切である。本調査問題においては、太郎さんと花子さん、塔の位置関係を理解できているか、また 30° や 45° の数値情報を適切な場所にかくことができているかを示す。

プロセス2：付加情報の追加

プロセス1の過程をクリア後、与えられた情報を観察し、新たな情報を見出し、図に書き加えることも図をかくストラテジーとして問題解決に重要な役割を持っている。本調査問題においてのプロセス2は、三角比の位置を図に対応できているか、直角の位置を見出し、図に付加できているかを示す。

プロセス3：関係式を見出す

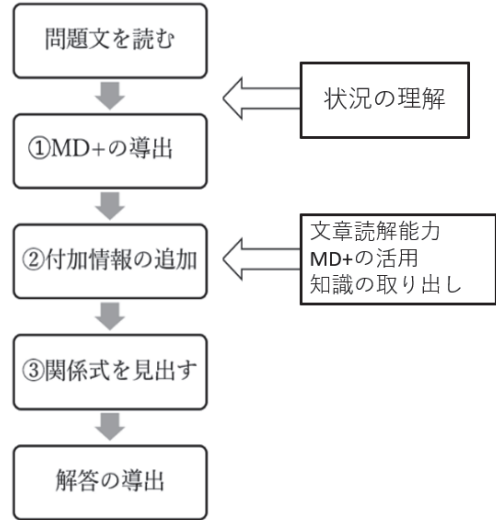
プロセス2によって必要な情報を付加していく過程で、問題解決に必要な知識を取り出し、活用していく必要がある。プロセス2までの過程まで進んだ生徒からプロセス3の段階がクリアできなかった生徒は、解答の方針がずれていることが主な原因であると言える。

そして、それぞれのサポートにおいて、①プロセス1、②プロセス2、③プロセス3と設定し、生徒の解答例を分析した結果、以下のように分類された。

		①	②	③	正解者
調査A	SD,MD (20名)	20	13	12	12
	MD (22名)	21	15	13	12
	SD (20名)	15	14	12	12
	サポートなし (18名)	15	10	9	9
調査B	(39名)	35	22	20	19

特に、生徒が図をかく際に、3.1で定義したMDの図はかいているものの、数学的記号や数値情報の付加ができな

い生徒もいたため、数値情報も正しく付加された図をかく段階もプロセス1に含まれているのではないかと考えた。そこで、本調査問題から得られた結果をもとに、問題解決プロセスを以下のように段階づけられると考える。



このモデルにおいてのMD+は、構造を表す図に加え、問題文に与えられた情報を全て表された図を指す。また、本節以降に表されたMD+においても上記と同様の定義として意味付けをする。

今回の調査では①の過程において正しくMD+をかくことができなかった生徒、そして②の過程で上手く情報を付加できない生徒が多かった。②で間違えてしまう理由として、問題文から図に移し替えるときに不注意が起こってしまう場合もあり得るが、生徒が図に依存しすぎてしまっていることも原因の1つだと考える。図をかくことは、視覚的にサポートされるため問題解決に役立つが、不十分な図、もしくは誤った情報を図にかいてしまった場合、当然ながら問題を解こうとするためのサポートにはならない。今回の場合、三角比を導出する際の三角形の形が正確にかくことができなかったため、正しい位置に正しい比を書き込むことができず、正解までたどり着けていない生徒が多く見られた。また、①のサポートが与えられていない問題において①の過程ができていない生徒が多かったことは、今後図の指導を研究していく上で注目すべき課題となる。

第4章 指導の枠組み・指導計画

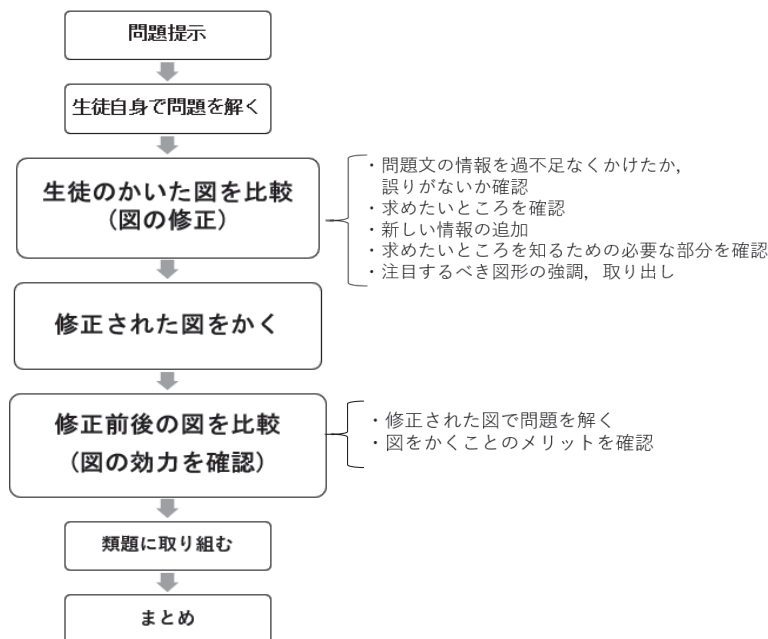
本章では、第2章で述べた先行研究の結果、及び第3章で述べた高校生が抱えている図をかくことの困難性をふまえた上で、指導の枠組みを定め、どのような指導を実践していくべきかを述べる。

4.1 指導の枠組み

第2章、第3章をもとにした先行研究及び調査の結果から、以下の手立てが必要と考える。

- ・図の効力感を感じさせるための指導
- ・状況をイメージさせたいうで、自発的に図に表すことを促す指導
- ・図の修正を行い、さまざまな視点から見ることを促す指導
- ・十分なスキルを獲得するための指導

以上をふまえ、【調査2】を5クラスを対象に実施する。まず、5クラスのうち1クラスを実験群とし、指導の枠組みとして下図の流れで実践を進めていく。本枠組みは、1時間完了を想定して作成している。



その後、5クラスを対象に事後調査を実施する。授業実践のなかで実施した問題の類題2題を図のサポートがない状態で解く。

指導の流れとしてはまず、図のサポートがない状態での問題提示を行ったうえで、自発的に問題を解く環境を整えるために生徒自身で問題を解く時間を設ける。その後、黒板に図をかいている生徒2人を指名し、他の生徒は周りの生徒とそれぞれの図を比較し、自身の図が問題解決に有用に働くための図を再度考えさせる時間を設ける。そして生徒2人の図を比較したうえで、図をかくときに気を付ける観点を確認していく。その際に、3.3の問題解決のプロセスを意識し、問題解決に必要な情報をすべてまとめる。問題解決に必要な情報が全体で共有された後、修正された図をかく活動を行い、修正前後の図を比較することで、図をかくことの効力感を生徒に感じてもらう。そして最後に類似問題に取り組むという流れになる。

4.2 指導計画

授業実践では、教科書に記載されている問題を扱う。その際に、教科書に即して授業を行ってしまうと、教科書に既に問題の状況を含む、必要な数学的な線画を表す図が記

載されているため、本目的が達成されない。したがって、生徒には文章のみを与え、状況をイメージしてもらうために問題を一部改変した。

問題：

山のおもとに、200m はなれている 2 地点 A と B がある。それら A と B から山の頂上 P を見ると、 $\angle PAB = 60^\circ$ 、 $\angle PBA = 75^\circ$ であった。また、B から P を見上げた角度は 30° であった。P と B の標高差 PH を求めよ。

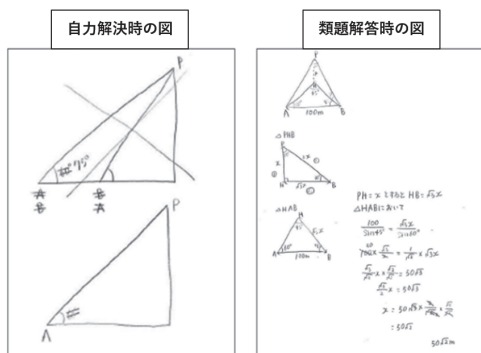
第 5 章 授業実践とその成果について

5.1 指導の様子について

本節では、自力解決時の正答者、類題解答時の正答者の例を一部取り上げながら指導時の様子について説明し、分析していく。

実験群の生徒 36 名	自力解決時	類題解答時
(i)MD をかくことができた生徒	17	35
(ii)MD+ をかくことができた生徒	14	29
(iii)問題解決に有用な情報を 1 つ以上追加できた生徒	12	27
(iv)問題解決に有用な情報を全て追加できた生徒	4	24
(v)関係式を見出すことができた生徒	4	22
正解者	3	18

表から、指導前後で(i)のプロセスを達成できた生徒が増え、(iv)のプロセスまで達成できた生徒が半数以上いることが分かる。以下の図は、ある生徒の自力解決時と類題解答時の図である。



自力解決時の図においては、問題文の状況が理解できずに平面図形のみしかかくことができなかったが、教授後にかけた図では空間を把握できていると思われる図をかいて

おり、部分的な図をかいて問題解決のための有効な図をかくことができていた。分析する際に、自力解決時の段階で状況が把握できずに MD をかくことができない生徒も多かったため、全体を通して MD をかくことができた生徒と MD+ をかくことができた生徒で分けて考えることとする。したがって、[調査 2] においての問題解決プロセスを、第 3 章及び第 4 章の考察から整理すると以下のようにまとめられる。



5.2 授業実践後の成果について

5.2.1 調査方法

[調査 2] の事後調査として、以下の問題を設定した。

【事後調査】

A. 塔の真西の地点 A から先端を見上げた角度は 45° 、真南の地点 B から先端を見上げた角度は 30° 、A、B 間の距離が 20m であった。塔の高さを求めよ。目の高さは無視する。

B. 100m はなれた 2 地点 A と B から A と同じ標高の建物の地点 K を見たとき、 $\angle KAB = 75^\circ$ 、 $\angle KBA = 60^\circ$ であった。また、A から建物の屋上を見上げた角度は 30° であった。建物の高さを求めよ。目の高さは無視する。

第4章の流れに基づいた授業実践を1クラスに実施し、他4クラスはそれぞれの教師が教科書に則った授業を行っている。授業実践後、全クラスに事後問題を解いてもらい、それぞれのクラスの正答率及び答案を分析する。

5.2.2 [調査2]の結果

	A問題		B問題	
	実験群(36名)	統制群(159名)	実験群(36名)	統制群(159名)
(i)	26	104	34	117
(ii)	26	104	16	78
(iii)	26	96	16	70
(iv)	13	54	10	45
(v)	17	79	8	50
正解者	9	45	6	33

事後調査における実験群及び統制群の正解者と分析において、表の各番号は5.1で示した問題解決プロセスの対応付けられている番号を示す。なお、(iv)においては、(iii)の情報が全て付加することができた場合に段階をクリアできたとみなす。

今回の事後調査において、正答率には顕著な結果が出なかったものの、実験群の生徒は自発的に図をかこうと試みる姿勢が感じられる答案が多く、パイロットスタディの結果と比較しても(iii)のプロセスまでは達成できている生徒が増えたことが分かる。したがって、指導の手立てを改良することで適切な図を自発的にかくことができる生徒を育てることができると期待できるであろう。しかしその一方で、(iii)から(iv)のプロセスをクリアした生徒は、実験群・統制群ともに変わらず、授業実践を行ったにも関わらず、付加情報を全て付加することに困難性を感じる生徒が多いことが明らかになった。

第6章 本研究のまとめと今後の課題

6.1 本研究のまとめ

本節では、1.1で述べた4つの研究課題に沿って、本研究の結論を述べることにする。

○問題解決のために有用とされる図の整理

第2章では、先行研究をもとに問題解決のために有用とされる図を整理した。そこで、数学的線画のパフォーマンスが問題解決に有用に働くことが明らかとなり、状況図においても間接的にはあるが、表面構造で有用に働くことが分かった。

そこで、問題解決に有用とされる2種類の図に着目して本研究を進めた。

○図をかくことに対する困難性の特定

第3章では、[調査1]を実施し、サポートの有無によって正答率と生徒の答案を分析するとともに、サポートが何もない状態での生徒の図の実態を明らかにすることで、生徒の困難性を段階化した。また、第4章にて、第3章での段階をより精緻なものとし、それぞれの課題を克服することで指導の手立ての方向性を明確にした。

○困難性の克服に向けた教師の指導行為を検討する

第4章にて、第3章での困難性を克服するための指導の手立てを整理し、1時間完了の授業実践に組み込むことで授業の提案としてまとめた。「状況をイメージさせようとして、自発的に図を表すことを促す指導」「図の修正を行い、さまざまな視点から見ることを促す指導」「図の修正を行い、さまざまな視点から見ることを促す指導」「十分なスキルを獲得するための指導」を提案した。

○指導行為の提案の実践を行い、成果と課題をまとめる

第5章にて、実際の授業実践での様子を紹介し、事後調査の正答率と生徒の答案を分析することで、成果と課題をまとめた。

指導の様子から、指導前と指導後の生徒の図を比較し、指導後の図では自発的に図をかこうとする姿勢が感じられたことと、生徒の図がより問題解決に必要な情報が付加されていたが、自発的に図をかく上で、提示した指導の手立てに加え、文章読解能力や必要の定着で課題が見られた。

6.2 本研究に残された課題

本研究に残された課題は以下の3点挙げられる。

第1に、問題解決に有用とされる図において、今回の計量問題に限らず、数学の分野での有用な図を把握するために、他の単位についても追究するべきだと考える。

第2に、指導行為について、より長期間での指導を想定したときの実践も考える必要があると考えられる。

第3に、本研究で課題となった文章読解能力や必要な知識を定着させた上で問題解決に取り組む力を育成させるための指導についての検討を行ったうえで、指導の手立てを改良したときの成果を考えた上での結果も分析する必要があると考える。

参考・引用文献

- Blum, W. (2011). Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in the teaching and learning of mathematical modelling - Proceedings of ICTMA14* (pp. 15-30). Springer.
- Cooper, J.L., Sidney, P.J., Alibali, M.W. (2018). Who Benefits from Diagrams and Illustrations in Math Problems?: Ability and Attitudes, Matter. *Applied Cognitive Psychology*, *32*, 24–38.
- Rellensmann, J., Schukajlow, S. Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance, *Educational Studies in Mathematics*, *95*, 53–78.
- Uesaka, Y., Manalo, E., & Ichikawa, S. (2007). What kinds of perceptions and daily learning behaviours promote students' use of diagrams in mathematics problem solving? *Learning and Instruction*, *17*(3), 322–335.
- Van Meter, P. and Garner, J. (2005), The Promise and Practice of Learner-Generated Drawing: Literature Review and Synthesis, *Educational Psychology Review*, *17*(4), 285-325
- 植坂友理(2014). 『数学的問題解決における図表活用の支援-理論と実践を結ぶ「REALアプローチ」の展開-』. 風間書房.
- 岡部恒治ほか(2017). 『改訂版 高等学校数学 I』. 数研出版.
- 望月悟(2005). 「文章題の解決過程における図的表現の有
用性についての研究」. 『上越数学教育研究』, 20, 205-214.