Bulletin of Aichi Univ. of Education, 70（Educational Sciences）, pp. 157 − 165, March, 2021

2次関数についての授業開発と実践

阿武木 啓朗

理科教育講座 物理領域

Practice of Teaching Geometry of Quadratic Functions in High Schools

Hiroaki ABUKI

Department of Science Education ,Physics Division, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

概要

数学Ⅰ「2次関数」を題材とする4時間計画の授業開発，授業実践について報告する。計画にあたっては，数学Aでの扱いとなる「図形の性質」との関連，自然科学との関係に目を向けさせることを第一の目的とした。また，放物線にまつわる数学の歴史を紹介することにより，文化としての数学への親しみを感じてもらえるようにした。事前・事後アンケート，リアクションペーパーの記述をもとに一連の授業の成果について考察し，課題を整理する。

1．はじめに

愛知教育大学では，2019年に学校現場研修制度が定められた。この制度は，大学教員が学校現場における研修を通して現状や課題を理解することを目的としている。 私はそれまでに愛知県内の高校への出張講義は幾度か受け持ったことはあったものの，教育課程に即した内容について，学校現場や生徒の実態に合わせた授業実践経験はなかったためチャレンジすることにした。私の専門は，高校の教科としては理科（物理）であるが，数学での受け入れとなった。もともと高校理科と数学の間で自由な往来があってもよいのではないかと考えていたこともあり，この機会を利用して教科横断的な授業設計をしてみたいと考えた。幸い受け持つことになった1年生のクラスは授業の進度に余裕があったことから，「課題学習」枠での授業実践が可能であった。高等学校学習指導要領では「課題学習」を，必修の数学Iで扱われる各学習項目（①数と式，②図形と計量，③二次関数，④データの分析）の内容又はそれらを相互に関係付けた内容に関連した課題を設け，それらの解決を通して数学のよさを認識できるようにするものとして位置づけている[1]。「数学のよさ」という言葉は学習指導要領を通して頻出するキーワードであるが，その定義においては，条件を満たす事物に数学的な表現を当てはめて解を得ることの利便性すなわち「数学的な表現や処理のよさ」や，生活や科学技術を支えている数学の有用性，実用性が強調されている。しかし，「数学のよさ」には，道具的なよさだけではなく，人間の文化的営みとして芸術や音楽を鑑賞したり，登山を楽しんだりすることと同様のよさがあるだろう。そこで，次の3つを授業の大きな目標として設定することにした。

1. 数学Aで扱われる図形の性質と，数学Iで扱われる数と式，関数の関係など，数学教科内での個々の学習内容の間の有機的なつながりに目を向ける。
2. 自然科学の中に数学があるという感覚をもち，理科における数学利用のアレルギーを取り払う。[1]
3. 役に立つ・立たないを超越した，文化としての数学に親しみを感じ，純粋に数学を楽しむ。

これらの目的のため，「2次関数」を大きな柱に据え，授業計画を練ることにした。本稿ではその授業計画，その遂行のための教材・教具の開発について報告する。また，事前事後アンケート等の回答結果をもとに成果の検証及びさらなる課題の整理をする。

2．教材の選別

数量の2乗に比例する関数として $y = ax^2$ という式は中学校で導入されているが，「2次関数」，「放物線」という用語は数学Iで登場する。しかし，座標平面と方程式による学習が重視され，幾何学的な理解は軽視される傾向にある［2］。また，身の回りの現象の具体例を通した学習も疎かにされがちである。そのため関数について抽象的なイメージしか描けていない生徒が

多い。そこで，幾何光学上の性質を取り上げることにした［3］。放物線を対称軸の周りに回転してできる放物面（パラボラ）に，軸に平行に入射した光線が1点に集まるという性質である。

なお，数学Ⅲ「2次曲線」では，準線l：$y = -p$と焦点F：(0，p) からの距離が等しい点の軌跡として，放物線の方程式 $(4p)y^2 = x$を導くことになっている。今回は1年生向けの授業であることから，可能な限り数学Iと数学Aの内容の使用にとどめる。

3. 教材内容，教材・教具の開発

授業で扱う内容としては次の項目（①から⑥）に絞る。丸番号に続いて内容を大別したキーワード，それに続く括弧内に関連する高校教育課程上の教科・科目内容とのリンクを示している。

【① 作図・幾何学的性質】（数学A；図形の性質，数学C；2次曲線）準線上の任意の点と焦点を結ぶ線分の垂直二等分線は放物線と接する。逆に放物線上の任意の点に準線上の1点が対応する。（図1）従って放物線は直線族の包絡線として定義できる。

【② 自然科学の中の2次関数】
（物理基礎・物理；波・幾何光学）放物面に入射した平行光線は焦点に同時に集まる。[2]

【③ 作図・幾何学的性質】
（数学A；図形の性質 平面図形）準線上の任意の点から放物線に2本の接線を引くことができる。これらの2つの接線は直交する。

【④ 作図・幾何学的性質】
（数学A；図形の性質 平面図形）放物線上の3つの点A，B，Cでの接線が互いに交わる点をP，D，Eとする。（図2）△PDEの外接円は焦点Fを通り，線分比について，$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{PD}}=\frac{\mathrm{EP}}{\mathrm{BE}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{EC}}$ が成り立つ［5,6］。

【⑤ 作図・幾何学的性質】
（数学A；図形の性質 平面図形）任意の点Pと焦点を結ぶ線分を直径とする円と直線$y = 0$（準線lに平行でFとの距離が1/2となる直線）が異なる2点で交わるならば，点Pとそれらの交点を結ぶ2直線はともに放物線の接線となる。

【⑥ 幾何学と代数・解析学】
（数学B；数列，数学Ⅱ；微分法と積分法）直線ABが切り取る放物線の切片の面積は，△ABCの面積の4/3倍である。（図3上）ただし，CはABに平行な接線が放物線と共有する点である。

幾何学的イメージを重視するため座標平面と方程式の利用を最低限にとどめるが，座標を用いる場合には$y = x^2$（本稿では標準形と呼ぶ）に制限する。[3] 導入部①では数学の楽しさを体験してもらうため，［2］にならい「折り紙」を教材化して用いる。教材内容①③④⑤については，Geogebraによるデジタル教材を開発した。②については，実際に生徒が自分の目で見て再発見することが重要と考えたため，木工版，工作用紙，定規，コンパス，L字金具，ミラーシートを用いて焦点観察装置を自作した（図4左）。製作にあたっては，放物線にいくつかの接線を引くことでL字金具の設置位置を決定した。数学の文化として側面にもふれてもらうために，ギリシア時代からの放物線に関わる数学および科学の発展の歴史についての紹介を含める。⑥は数学Bや数学Ⅱにつながる発展的な内容を含むが，数学を楽しんでもらうため，パズル問題をグループ課題として用意した。

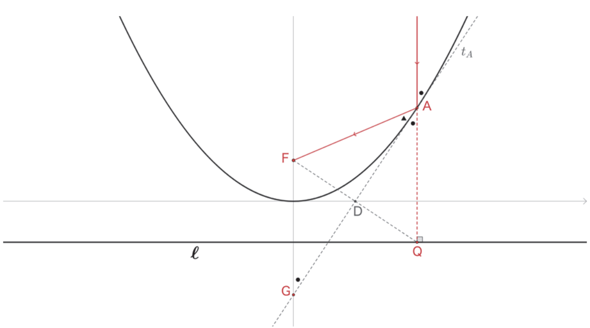

図1 放物線の幾何光学的性質。準線に垂直に入射した光は放物面で反射して焦点Fに向かう。点Aでの接線をt_Aとする。

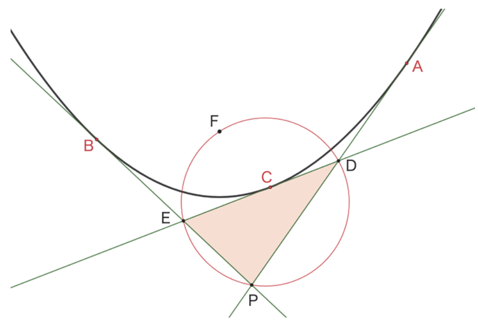

図2 △PDEの外接円は焦点Fを通る。また，PD：DA＝BE：EP＝EC：CDである。

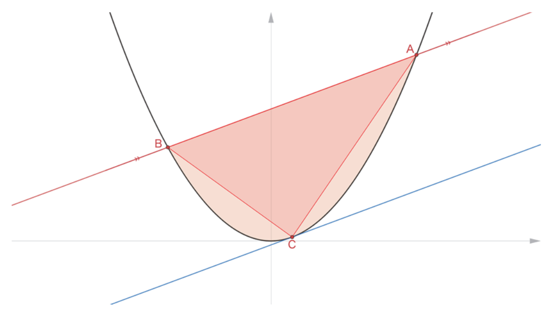

図3 放物線上の異なる点A，Bを結ぶ直線が切り取る部分を放物線の直線ABによる切片と呼ぶ。直線ABに平行で放物線に接する直線と放物線の接点をCとする。

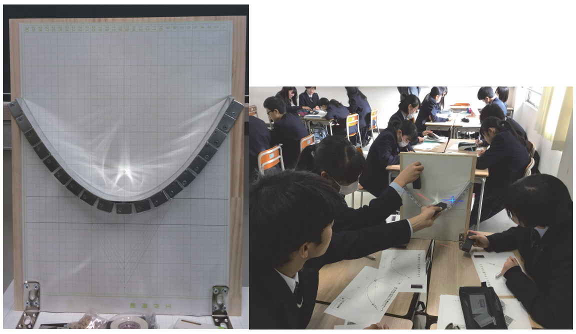

図４　焦点観察装置。Ｌ字金具により放物面を作製し，その上にミラーシートが貼ってある。焦点は原点から 4cm になるように調整している。これは昼間に撮った写真だが，研究室の蛍光灯の光を焦点に集めているのが分かる（左）。活動の様子（右）。

４．授業概要

（1）授業環境

日時：令和２年１月22日６限，１月23日６限，
　　　１月24日２，３限（計50分×４回 200分）

対象：愛知教育大学附属高校１年３クラス（36名）

準備：Macbook air，プロジェクタ，Powerpoint資料，焦点観察装置（自作品），3Dホログラムメーカー（別名マジックミラー，市販品），Geogebra教材，大判折り紙，定規，コンパス，ワークシートWS，リアクションペーパー，事前・事後アンケート

愛知教育大学附属高校では，「物理基礎」は１年生では履修しない。２年生になると文理のコースに分かれる。授業を実施した時期にはすでに進路調査がされており，36名のうち，文系24名，理系12名であった。理系科目に苦手意識をもつ生徒が一定数いることが想定され，導入や展開には特に工夫が必要と考えられた。

（2）授業展開

《1時間目》

目標：放物線の背後に特別な点と特別な直線が存在することに気づく。この点と直線から放物線への無数の接線を引くことができ，接線の集まりが放物線を浮かび上がらせることに興味をもつ。

授業構成：放物線の幾何学への導入部であり，数学の楽しさも実感して欲しいため，折り紙を用いた活動主体の内容とする。授業の流れを下に記す。

【1】何についての授業をするかは伏せ，折り紙を配布，折り方を示し「何ができるでしょうか」と問題提起を行った。（図5，図6上）

【2】活動のあと，「何に見えますか」と問いかけをし，「２次関数」という答えを引き出す。

【3】折れ線が線分 FP_n の垂直二等分線になっていることに目を向けさせる。（図5）

【4】点Ｆと直線があれば放物線を浮かび上がらせることができることを印象に残すため，Geogebraによるアニメーションを見せる。（図7上）点Ｆ，直線をそれぞれ放物線の焦点，準線と呼ぶことを伝える。続く３時間で放物線とその周辺について学んでいくことを告げて授業終了。

《2時間目》

目標：古代ギリシアまで遡る放物線とその数学的探求の歴史にふれ，文化としての数学を楽しむ。放物線と自然科学，身の回りの科学技術との関わりについて知る。

授業構成：スライドメインで古代ギリシアからの放物線探求の歴史，自然科学の中の放物線について紹介する。放物面が光を焦点に集める性質については，自分の目で観察・再発見してもらい，仕上げにデジタル教材により概念の補強を行う。

【1】放物線は円錐曲線の１つで，円錐を母線に平行な平面で切断したときに断面に現れる曲線として，古代ギリシア時代に導入されたが，その正確な起源については分かっていないことを紹介した。この定義を利用したレオナルド・ダ・ヴィンチの放物線コンパスについてもふれた。

【2】古代ギリシアでは，全ての数が定規とコンパス

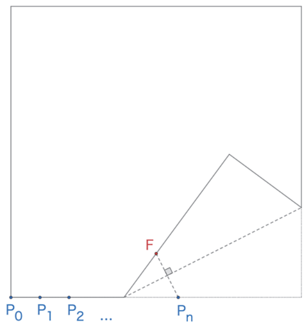

図５　折り紙の教材。折り紙の底辺の中央から垂直に少し離れた場所に，点Ｆをマークする。次に，底辺に点列 $\{P_n\}$ を等間隔にとりマークする。P_n が点Ｆに重なるように折り目をつけていく。

図６　折り紙の活動（上）。グループ活動の風景（下）。活動の合間に興味深そうにマジックミラーを覗き込んでいる。

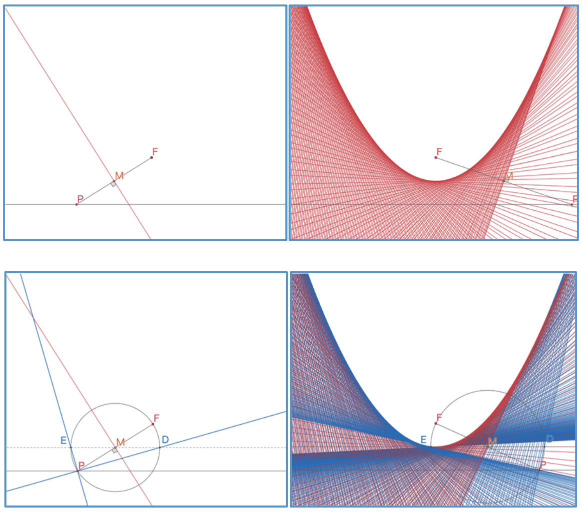

図7 Geogebraによるデジタル教材。準線上の点Pと焦点Fの垂直二等分線を，点Pのx座標をスライダー変数としてアニメーション表示すると，放物線が包絡線として浮かび上がる（上）。準線上の点Pから合計3本の接線が引ける（下）。

のみ用いた作図により線分比として具現化できると信じられていたことを紹介する。その上で「ギリシア3大作図問題」にふれる。特に倍積問題にスポットライトを当て，問題は3乗根（立方根）の作図と等価であり，2乗根（平方根）の作図が容易であるから可能に見えるが，これが難問であったことを伝えた。倍積問題にまつわる伝説「デロスの問題」も紹介した。紀元前4世紀頃，ギリシアデロス島で内政問題が起こった際，[4] デルフォイ神殿からの「立方体の形状のアポローン祭壇を2倍にせよ」という神託があったため，市民たちはこの数学的問題に熱中したというものだ。

【3】メナイクモス（380–320 BC）は2つの放物線を用いることで立方根の作図が可能になることを示したことを紹介した。残念ながら放物線の作図には無数の接線が必要であり，定規とコンパスの有限回の使用しか認めないギリシア数学の要請を満たすものではない。その後，ペルガのアポロニウス（262–190 BC頃）は“application of area”と呼ばれる，座標の使用に類似した概念を創出し，円錐曲線は平面に内在する量のみを用いて定式化された。これにより放物線の多くの性質が証明されたこと，命名“Parabola”は彼によるもので“application of area”を意味することなどを紹介した。メナイクモス，アポロニウスによる探求は，デカルトによる解析幾何学の起こりと考えられている。

【4】3大作図問題については，数々の数学者により探求が続けられ，19世紀末までに定規とコンパスのみでの作図が不可能であり，定規とコンパスで作図できる線分比は2次方程式と1次方程式の有限回の組み合わせで生成できる数に限られることが示されていることを紹介した。[5]

【5】シラクサ（ギリシア植民市シュラクサイ）のアルキメデス（287–212 BC）は放物線の切片の面積を求めたことを紹介し，これについては4時間目に授業で取り上げると予告した。さらに，彼の業績は，数学，科学，工学に至るまで幅広く，工学者としては，ローマのカルタゴ侵攻の際のシラクサ防衛戦では数々の兵器を発明・導入，ローマ軍を悩ませたというエピソードを紹介した。その兵器の1つとして，アルキメデスの熱光線（集光発火器）の伝説にふれ，[6] 光を1点に集める放物面の性質についての焦点観察装置（図4）による実演をスライド上で上映した。[7] 図8は実際の映像の静止画である。光を焦点に集めるという放物線の物理的性質は，1時間目の折り紙の内容とリンクすること，次回これらを証明すると予告した。

【6】自然科学で現れる放物線の別の例としてガリレイの発見「斜方投射での物体の軌跡」を挙げた。放物線の科学技術への応用としては，ニュートン式反射望遠鏡等の光学装置，BSパラボラアンテナ，電波望遠鏡などの電波収束（送信）装置，パラボラ式集音マイク，パラボラ電話等の音響装置などを紹介した。また2枚の放物面を組み合わせ，物体の実像を浮かび上がらせる科学玩具「3Dホログラムメーカー」を見せ，原理を説明した。

【7】最後にGeogebraで作成したデジタル教材を用いて，平行光線の光の粒に見立てたいくつかの点の動きのシミュレーションデモを行い，全ての点が同時に焦点に集まる様子を観察してもらった。（図9）そして，次回これを証明するために必要になる未習事項「点と点の距離」,「点と点の中点の座標」について説明を行った。[8]

《3時間目》

<u>目標</u>：1時間目に見た放物線と接線の関係，2時間目に紹介した放物面の物理的性質に数学的な証明を与える。座標の使用を最低限にとどめ，図形的に考え

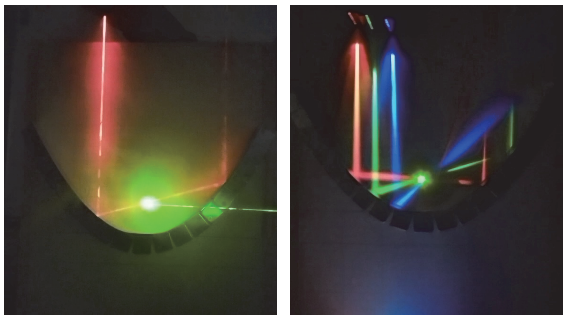

図8 焦点観察装置（図4）の実演映像から切り抜いた静止画。スモークの中のレーザー光線編（左）と高輝度LED光源装置編（右）。焦点の位置を分かりやすくするため，緑色のレーザーポインタで指し示している。

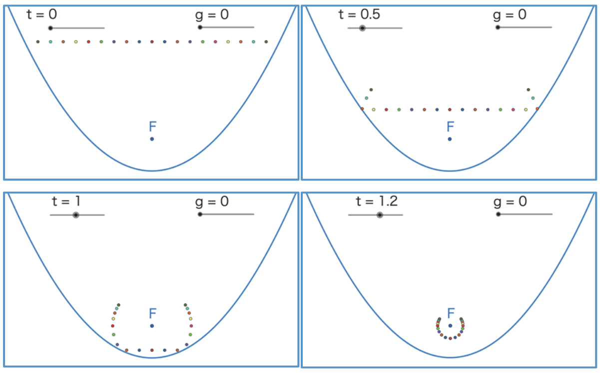

図9　Geogebraで作成したデジタル教材によるデモ。時間tをスライダー変数とし，19個の質点を平行光線の光の粒に見立て，同じ初速度で放物面に入射した後の様子。$t=0$，0.5，1.0，1.2（任意単位）でのスナップショット。$t=1.3$で全ての質点が焦点に集まり，やがて反対側の面で再び反射し平行光線に戻る様子が見られる。重力加速度もスライダー変数にしており，重力をオンにすると，各軌道が焦点を外れる様子が見られる。

る。さらに，放物線の面白い幾何学的性質のいくつかを示す。数学I，数学A，さらには物理基礎や物理で扱う内容が互いに関係している＝「学問は繋がっている」という感覚を醸成する。

<u>**授業構成**</u>：「証明」はまず何を示すべきなのかを考えさせた後に，順を追って説明する。

【1】図1で標準形$y=x^2$を考える。準線lを$y=-1/4$，焦点Fを（0,1/4）とする。放物線上の任意の点Aの座標を（m，m^2）とし，この点Aに垂直入射した光がFに向かうことを証明したい。そのためには「点Aでの入射角と反射角が等しい」すなわち放物線の点Aでの接線をt_Aとすると，入射光線とt_Aの角度＝反射光線とt_Aの角度が等しいことを言えば良い。これにはAF＝FGを示せば十分であると伝え，その理由を考えさせる。【平行線について同位角と錯角は等しいから図中の▲で示した角度は全て等しい。AF＝FGなら△FAGは二等辺三角形で，底角は等しいから●＝▲である。】

【2】AF＝FGを示す。前回予習した点と点の距離の公式から，AF＝$m^2+1/4$である。FGを求めるには直線t_Aを求め切片を求めれば良い。接線の一般的な求め方は数学Iの範囲には入っていないが，放物線と1点を共有する直線を接線と呼ぶことや，その求め方については学習事項に入っている。放物線と1点Aを共有する直線の方程式を$y=ax+b$とすると，条件は，$x^2-(ax+b)=(x-m)^2$である。これよりFG＝$m^2+1/4$＝FAが言える。

【3】点Aで反射した光が焦点Fに向かうことは言えたが，まだ2つ問題が残っている。なぜ光（等速運動する質点）が同時に焦点Fに到達するかという問題と，なぜ折り紙で放物線が浮かび上がったのか，つまり準線上の任意の点をQとしてFQの垂直二等分線が放物線の接線になるのかということだ。これらはAF＝AQが言えれば解決することを伝え，理由について考えさせる。【同時性については，光路長がmの値に依らず準線までの距離と等しいことから言える。また，△AFQは二等辺三角形であり，頂角を二等分する接線t_Aは底辺FQを垂直二等分する。】理由を確認した後，AF＝AQを点と点の距離の公式により確認する。

【4】何が言えたのかをまとめる。幾何光学の性質と折り紙でなぜ放物線が浮かび上がったのかを同時に説明できたことを再度強調する。明らかになった事実として，準線と焦点から放物線が生成（定義）できるということを挙げる。AF＝AQとなる点Aの集合が放物線になるという定義は，解析幾何的には十分だが，点A を作図により見つけるには，FQの垂直二等分線を描き，それが点Qでの準線の垂線と交わる点を見つければ良い。

【5】続いて放物線の幾何学に目を向ける。まず，(1)準線上の任意の点Pから放物線に引いた2つの接線が直角に交わること，(2) このとき2つの接点を結ぶ直線は焦点Fを通ること，(3)$y=0$という接線も含めた3つの接線がつくる三角形の外接円が焦点を通ること，の3つを取り上げる（図10）。楽しみながらこれらの性質を見つけてもらうため，図11のWS1を用意し，4名グループで取り組んでもらった。点Pを準線上の任意の点とし，そこから接線を2本引き，図のように角度●と○を置く。できるだけ多くの●と○に等しい角度を見つけようという課題である。いくつかの班は12個ずつ同じ角度を見つけ，シートに書き込んでいた。（図6下）図には相似な直角三角形がたくさん潜んでおり，どれだけ見つけられるかが鍵となる。その過程で●＋○＝90°→∠AFB＝180°すなわち3点AFBは一直線上にあること，PDFEは長方形であり△PDEの外接円が焦点Fを通ることも分かる。

【6】活動【5】の副産物として，放物線への接線の引

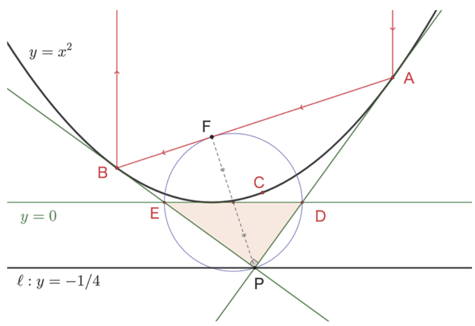

図10　準線lに垂直に入射した光が点Aで反射，焦点を通り，反対側の面の点Bで再び反射し，平行光線に戻る。点Aでの接線と点Bでの接線は準線上の1点で直角に交わる。

き方が得られたことに目を向ける。線分FPの中点を中心とし，焦点Fを通る円を描いたとき，円と直線$y=0$の交点が2つあり，これらの交点と点Pを結ぶ直線は直交し，共に放物線の接線になる。FPの垂直二等分線も接線になるから，準線上の1点から3本の接線が定規とコンパスで描けることになる。これを実際の目で確認させるためにGeogebra教材によるデモを行った。生徒の中からは「おーっ」という感嘆の声が漏れていた。

【7】次に対称性を少し緩め，$y<0$の領域に任意の点Pをとり，Pから放物線に2本の接線を引いた場合について考える（図12）。直線$y=0$と合わせて3本の接線がつくる三角形の外接円は焦点Fを通る。逆に，点Pを適当にとったとき，FPの中点を中心とし焦点Fを通る円が直線$y=0$と異なる2点で交わるならば，その2点と点Pを結ぶ2直線は共に放物線の接線になる。また，3つの接線の交点と接点がつくる線分の比について，$\frac{AD}{DP}=\frac{PE}{EB}=\frac{CD}{EC}$が成立する。これらの命題を証明するための部品探しも，図11のWS2によるグループ活動で行なった。点Pをとり，そこから放物線に2本接線を引く。接点をそれぞれA，Bとする。△AQFと△BRFは共に二等辺三角形で，接線は底辺を垂直二等分するから，図のように角度●と○を置く。●と○に等しい角度を見つけましょうという課題である。生徒らは熱心に取り組んでいた。3つの接線がつくる△PDEの外接円が焦点Fを通ることは，PDFEの1組の対角の和が180°であり同一円周上にのることから分かる。逆に，FPの中点を中心としFを通る円が$y=0$と交わる2点とPを結べば接線になる。●＋○＝90°はもはや成り立たず，図中の直角三角形は2種類に分裂する。△FDE，△QAP，△RPBは相似であり，それぞれが2種類の直角三角形を内包している。これよりAD：DP＝PE：FB＝DC：CEが言える。

授業では時間の制約上取り上げることができなかったが，さらに対称性を崩し放物線上の任意の異なる3点A，B，Cをとってそれらに接する3本の接線を考えた場合も接線がつくる三角形の外接円は焦点を通る（図13）。まず，∠PDE＝●，∠PFQ＝○と置く。△KM_1Dと△KM_3Fは相似なので，∠KFM_3＝●である。次に四角形FM_1PM_2は1つの円に内接するから，円周角の定理より∠PM_2M_1＝●＋○である。四角形FM_2EM_3は1つの円に内接するから円周角の定理より∠PM_2M_1＝∠EFM_3＝●＋○である。ゆえに∠PFE＝●でなければならない。△PDEと△PFEは底辺を共有し頂角が等しいから円周角の定理より同じ円の円周上にある。つまり△PDEの外接円は焦点Fを通る。

《4時間目》

目標：アルキメデスが如何に放物線の切片の面積を求めたか，その自由なアイデアにふれ，紀元前の数学文化に思いを馳せる。等比級数の和の公式も，図形的な考え方で解釈できること，公式を機械的に当てはめるだけだと考えがちな代数にも幾何学の考え方を適用できることを知る。

授業構成：スライドベースでアルキメデスについて紹介し，彼が放物線切片の面積をどのように求めたかを説明する。その際に用いる無限級数の和をどのように求めたのかについて考えてもらう。

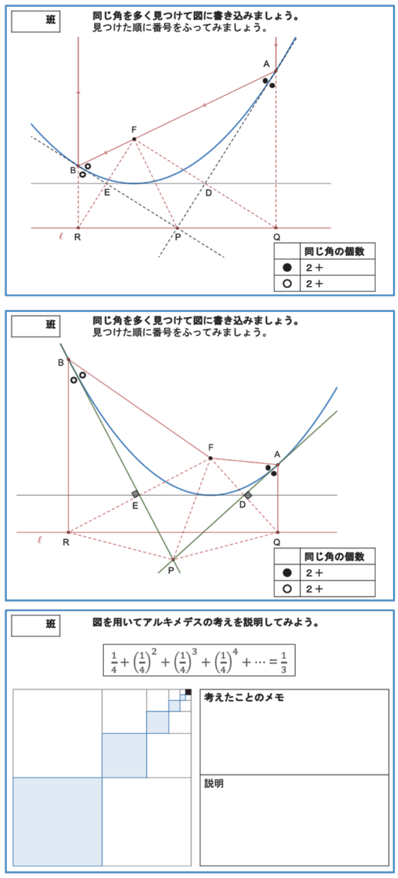

図11　ワークシート。上からWS1，WS2，WS3。

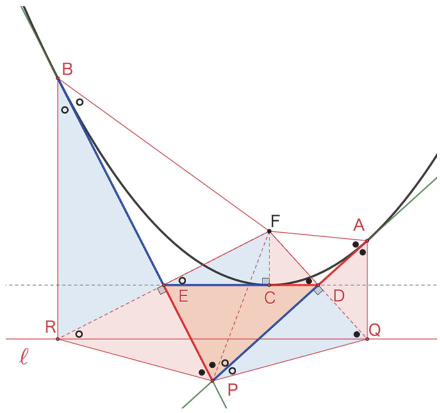

図12　準線上にない点Pから放物線に2本接線を引く。PDFEは同一円周上にあり，2本の接線と接線$y=0$がつくる三角形△PDFの外接円は焦点Fを通る。△FDE，△QAP，△RPBは相似でありPD：AD＝BE：EP＝DC：CEである。

【1】アルキメデスの数学，自然科学，工学分野における数々の業績を伝説・エピソードを交えて紹介した。数学者としては面積，体積の達人であり円周率の有理数による制限 $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ を導出していること，シラクサにある彼の墓には，球とそれに外接する円柱を象ったモニュメントがあり，その正確な体積比3：2が刻まれていることにもふれた。続いて本題「放物線の求積」に入った。図3のように，放物線$y = x^2$上の異なる2点AとB（x座標をそれぞれx_2，x_1とする）を通る直線を引く。この直線により切り取られる部分を，「放物線の直線ABによる切片」と呼び，その面積をSと書く。直線ABに平行で，放物線と接する直線を引き，接点をCとする。△ABCを第一世代の三角形呼び，その面積をS（△ABC）$= S_1$と表す。アルキメデスの主張は$S{:}S_1 = 4{:}3$になるということだ。

【2】△ABCの面積はどのように求められるだろうかと問題提起し，図14（上）を用いて答えに誘導した。ガヴァリエリの原理により，△MCAは△MCA′に，△MCBは△MCB′に等積変形できる。△ABCの面積は△A′B′Cの面積に等しいから，$S = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \times \overline{\mathrm{MC}}$である。$\overline{\mathrm{A'B'}}$は切片の水平幅であり座標で表現すれば，$\overline{\mathrm{A'B'}} = |x_2 - x_1|$である。$\overline{\mathrm{MC}}$は接点Cから測った点Mの高さ＝鉛直距離である。これを座標で表現するため，2次関数についての性質のうち，先の議論展開にも必要になる次の2つをまとめておく。

- 直線ABに平行な接線が放物線と共有する点をCとし，Cを通る鉛直線とABが交わる点をMとするとMはABの中点となる。
- 接線から鉛直方向に測った放物線までの距離＝鉛直距離（$d(x)$と置く）は，点Cからの水平距離の2乗に比例する。

2番目の性質は，Cのx座標をx_0とすると，鉛直距離が$d(x) = (x - x_0)^2$となることから言える。これより1番目の性質は明らかである。1番目の性質より，$x_0 = \frac{1}{2}(x_2 + x_1)$であり，$\overline{\mathrm{MC}}$は2つの平行線の鉛直距離であるから$\overline{\mathrm{MC}} = d(x_1) = d(x_2) = \frac{1}{4}(x_2 - x_1)^2$という座標表現が得られる。従って第一世代の三角形の面積は次のようにかける。

$$S_1 = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{A'B'}} \times \overline{\mathrm{MC}} = \frac{1}{8}\left(\overline{\mathrm{A'B'}}\right)^3 = \frac{|x_2 - x_1|^3}{8}$$

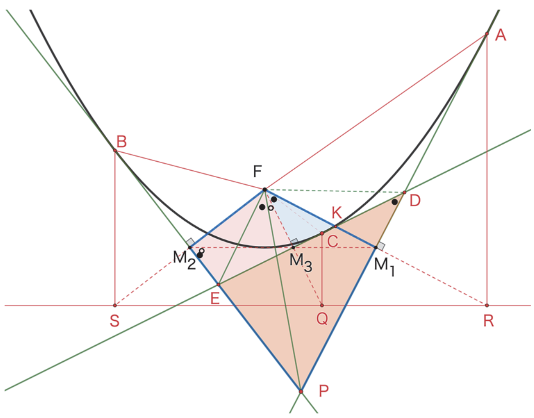

図13　接線がつくる三角形PDEの外接円は焦点Fを通る。

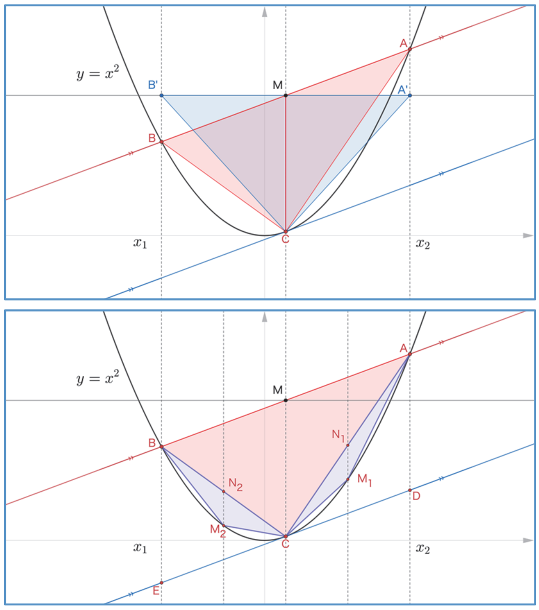

図14 三角形の等積変形（上）と，2つの第二世代の三角形（下）。

【3】切片の面積の勘定で，第一世代の三角形だけでは取りこぼしている部分に注目すると，2つの新しい切片が生まれていることに気づく。これらを第二世代の切片と呼ぶことにする。第二世代の切片から第二世代の三角形を，同じようにして構成できる（図14（下））。[9]これらの三角形の面積はどうなるか。切片の水平幅（AC間の水平距離）は第一世代の1/2になっている。高さは$\overline{\mathrm{N_1M_1}}$であり，これは，$\mathrm{N_1}$，$\mathrm{M_1}$の接線からの鉛直距離の差に等しい。前者は中点連結定理から$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AD}}$，後者はCからの距離の2乗に比例するから$\left(\frac{1}{2}\right)^2\overline{\mathrm{AD}}$である。従って$\overline{\mathrm{N_1M_1}} = \frac{1}{4}\overline{\mathrm{MC}}$である。第二世代の三角形1つの面積は，幅が1/2，高さが1/4になるため，第一世代の三角形の面積の1/8になる。2つの第二世代の三角形の面積の合計をS_2と書くと，$S_2 = \frac{1}{4}S_1$となる。第三世代の三角形の数は第二世代のさらに2倍，面積は第二世代の1/8であるから，第三世代の三角形の面積の合計をS_3と書けば，$S_3 = \frac{1}{4}S_2 = \frac{1}{16}S_1$である。世代を1つ重ねるごとに追加される面積は前世代の1/4倍となる。これを限りなく続け全てを足し合わせれば，放物線の切片の面積になる。これがアルキメデスの取り尽くし法である。

$$S = S_1 + S_2 + \cdots \ = \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots\right) S_1$$

等級数の和の公式によれば括弧内は4/3に等しい。

【4】「アルキメデスになったつもりで，上の公式の秘密を解き明かして欲しい」ということで，グループ課題として図11のWS3に取り組んでもらった。生徒たちは議論を楽しんでいた。答えがすぐに見つからない問題でも，じっくり考えて欲しいと考え，答えは明かさないことにした。最後に上の公式は，等比級数に関係しており，数学B「数列」で代数的に取り扱うこと，数学IIの「微分法と積分法」では，積分という（少々味気のない）機械的操作で放物線の切片の面積を計算できることを学ぶだろうと予告して授業を終えた。

5. 考察

事前・事後アンケートの結果をもとに授業実践の成果および今後の課題について整理したい。アンケート設問項目は，自由記述を別として下記の通りである。

---

[1] 数学 I（2 次関数）と数学 A（図形の性質）の内容には関係があると思いますか？

[2] ガリレオ・ガリレイは「自然」という書物は数学という言語で書かれており，その言語を構成する文字は三角形や円などの幾何学的図形なのだと言いました．どう思いますか？

[3] 身の回りの人工物（科学技術や芸術作品）の中に数学図形，数学曲線があると思いますか？

[4] 数学をもっと深く勉強してみたいと思いますか？

[5] 物理（自然科学）をもっと深く勉強してみたいですか？

（回答選択肢）【レベル 1】大いにそう思う．【レベル 2】少しそう思う　【レベル 3】どちらとも言えない．【レベル 4】　あまりそう思わない．【レベル 5】　全くそう思わない．

以下では，レベル1と2をまとめて “Favorable”，レベル3を “Marginal”，レベル4と5をまとめて，“Unfavorable”と3段階に粗視化分類する。回答結果を，図15に掲載する。項目1では事前・事後の顕著な変化が読み取れる。すなわちFavorableの層が有意に増えている。このことから，数学Iと数学Aの関連性に目を向けさせ，教科の中での各学習事項に繋がりがあることに気づかせるという目標はある程度達成できたと考えて良いだろう。項目2の結果についても同様である。自然科学を記述する言語としての数学という数学観の醸成にも一定の成果があったと考える。項目3は事前の段階でFavorableが多いため，事前・事後で有意な変化は見られなかった。人工物の中の放物線については反射式望遠鏡やパラボラアンテナ等に軽くふれただけだが，そういった知識はすでにもっていた可能性が高い。項目4についても事前の段階からFavorableが圧倒的に多いが，事後ではさらに少し改善している。項目5は少し残念な結果であった。もともと数学に苦手意識をもつ層の意識はほとんど変わらず，FavorableからMarginalへの流出も見られる。ただ，個々の回答を見ると必ずしも流出ばかりではなく層間の入れ替わりも見られた。つまりUnfavorableやMarginalからFavorableへの流入もあった。項目6についても同様である。はじめから数学への拒否反応が深刻な生徒の数学観や自然観の変容を促し，自然科学への興味を喚起することは難しいという事実が見えてくる。

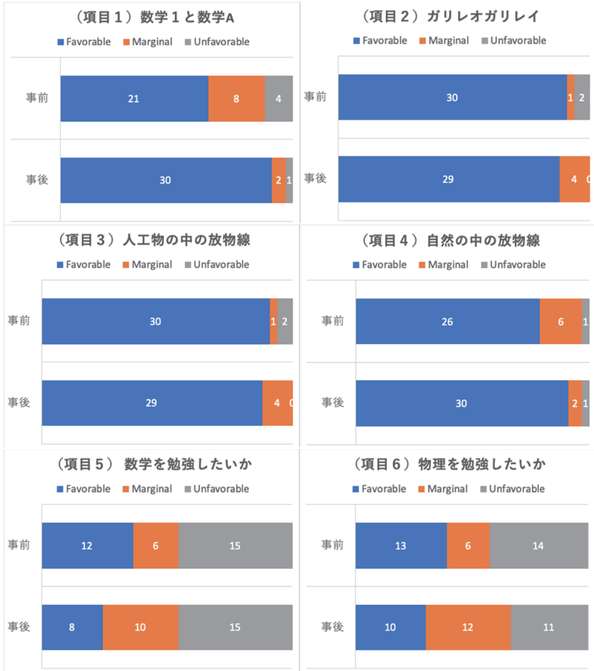

図 15　事前・事後アンケート結果。（有効票 33/36）

アンケート・リアクションペーパーの自由記述からいくつかピックアップして下に掲載する。自作の焦点観測装置より既製品のマジックミラーの方が好評であったことは些か残念であるが，放物面の物理的性質に実際に触れて楽しんでもらえたことは成果であろう。また，数学の歴史にふれることは数学観の変容を促すのに有用であると結論できる。文化としての数学のよさを知るという目標についても一定の成果があったと考えて良いだろう。

6. まとめ

2次関数を題材とし，高校1年生のクラスを対象に全4時間の授業計画，教材開発・授業実践を行った。数学Iと数学Aの融合的な内容とし，自然科学との関連も盛り込み教科横断的な授業設計とした。古代ギリシアの数学の作法，歴史等も盛り込み，文化としての数学を楽しめる内容にした。教材開発では，生徒が実際に目で見たり触ったりしながら学べるよう焦点観測器具を自作，デジタルデモ教材を作成した。また，折り紙やグループワークなど活動メニューを組み込み，

【事前アンケートから】(原文のまま)
- 数学の面白いところが知れたらいいなと思っています.
- 楽しいことがしたいです.
- 高校数学の範囲を超えた数学の知識などを知りたい.

【事後アンケート・リアクションペーパーから】(原文のまま)
- アルキメデスのところです.(印象に残ったこと)
- 折り紙で放物線!(印象に残ったこと)
- 動画や画像で例があったので理解しやすかった.
- 物理や数学は関わりがあることが分かりました.
- 数学の歴史についてたくさん知れておもしろかったです.
- マジックミラーのつくりがすごいなと思った.
- マジックミラーすごかった.
- アルキメデスのひらめきが,答えが気になるので,家に帰って調べようと思った.
- 実践しながら授業が進んでいくので,わかりやすかった.ありがとうございました.
- 歴史がおもしろかったです.いろんなとき方があって勉強になりました.
- プリント1の角度を見つける問題が,1つ見つけるとその周りも一気に見つかって,接線との関係性が面白かった.
- 数学の楽しさがわかってきました.

楽しみながら発見ができるよう工夫した。その結果,課題に対して主体的に取り組み自ら考える態度も見られた。数学の各科目間の繋がりや数学と理科との関連に目を向けさせるという目標は概ね達成された。また,アンケート等でのいくつかの記述から,数学に親しみを感じてもらうという目標についても一定の成果が見られた。一方,はじめから数学に対する拒否反応が深刻な生徒の数学観を変容させることはできなかった。

学校現場でのはじめての実践であったこともあり,課題も浮き彫りになった。対象が高校1年生で物理基礎を学んでいないということもあるが,内容を盛り込みすぎてしまった感が否めない。また,いくつかの事項の証明にあたっては,未習の数学IIの内容を説明する必要があった。この意味では,2年生を対象とした方が高い効果が期待できたかもしれない。活動後に生徒の考え方を吸い上げ,そこから発展させていく授業展開力についても力不足を痛感する場面があった。今後,試行錯誤しながら有効な方法を模索していきたい。

謝辞 愛知教育大学附属高校での研修中,教材開発・授業計画立案にあたって,神谷良明先生から数々のご指導ご助言をいただきました。感謝いたします。

文末脚注

1 「自然という書物は数学の言葉で書かれている」はガリレオ・ガリレイの名言として有名だ。19世紀の最も偉大な科学者の一人であるウィラード・ギブスは端的に「数学は言語である」と言っている。

2 子ども向けの科学本やTV番組等で,パラボラにいくつかのボールを同じ高度から同時に落とすと,同時に焦点に集まると紹介されることがあるが[4],厳密には正しくない。軸に近い軌道は焦点近傍を通るので,大きなパラボラでは焦点に集まるように見える。これには,軸上での面の曲率半径をR(焦点距離の2倍),初速度をv_0,落下高度をhとして$R \gg h$,$(v_0)^2/R \gg g$(重力加速度)であれば良い。

3 一般の放物線$Y = aX^2+b$はスケール変換$(x, y) = a(X, Y)$と平行移動によって得られる。前者は物理的には量x, yの単位(ものさしの尺度)をa倍したものを新しい単位として採用することに対応する。平面内の角度・相似関係は保たれるから,標準形について成立する図形的性質のうちアスペクト比1の拡大・縮小で損なわれないものは一般形でも成立する。スケール変換は教科書の課題学習2で取り上げられているが,抽象的な内容の記述にとどまっている[7]。

4 伝染病が流行したとするバージョンもある。いずれにせよ,市民たちが数学的問題に熱中している間に問題は解決したそうだ。

5 数学A図形の性質「作図」では,定規とコンパスによる作図を取り上げているが,全ての数を作図で表現できるはずだとする古代ギリシア時代の数学観や探求の歴史についてふれられていない。

6 教科書の章末コラムでは「パラボラアンテナとアルキメデス」と題してこの性質が紹介されている[7]。アルキメデスが放物面型の鏡による集光発火装置を利用してローマの軍艦を焼き払ったことも紹介されている。アルキメデスが偉大であることは間違いないが,この類の伝説・伝承の真偽については批判的な見地からも検証がされるべきである。MITの学生グループは2005年にオーストラリアのTV番組MythBusters(邦題:怪しい伝説)と共同し大掛かりな実験を行ったが,木製の船に対し多少の焦げとわずかな炎を発生させることしかできなかった。大量の鏡が必要で,有効射程も短いことから,火矢と比べて実用的な兵器とは言えないという結論であった[8]。

7 教室で実演することも考えたが,レーザー光を可視化するために,スモークインフューザーを使用する必要があり,煙アレルギーや火災報知器反応のリスクを考慮した。焦点観察装置とLED光源は教室に置いておき,休み時間に生徒が触って遊べるよう配慮した。

8 数学IIの教科書第2章「図形と方程式」で取り上げられている[9]。

9 放物線の性質により,平行な接線を描く操作は省略できる。三角形の頂点は水平方向にちょうど中間になるように配置すれば良い。

参考文献

[1] 文部科学省,「高等学校学習指導要領(平成30年告示)」,東山書房,2018;「高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編」,学校図書,2018
[2] 常國敬太郎,「放物線の定義の指導に関する授業研究 – ユークリッド原論と折り紙を題材にして –」,筑波大学,2005.
[3] 岡田真子,愛木豊彦,「高校生を対象とした2次曲線を題材とする教材の開発と実践」,岐阜数学教育研究 7,2008.
[4] 例えば,NHK for School,大科学実験「みんなここに集まってくる」(実験22).
[5] R. Honsberger, "*Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*", Math. Assoc. Amer., pp. 47-48, 1995.
[6] D. Wells, "*The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*", Penguin, pp. 169-172, 1991.
[7] 岡部恒治,ほか17名,「改訂版 高等学校 数学I」,数研出版,2017;「改訂版 高等学校 数学A」,数研出版,2017.
[8] "Archimedes" (Sep. 28, 2020, 12:06 UTC) in Wikipedia (English).
[9] 岡部恒治,ほか17名,「改訂版 高等学校 数学II」,数研出版,2018;「改訂版 高等学校 数学B」,数研出版,2018.

(2020年9月24日受理)