Bulletin of Aichi Univ. of Education, 71（Educational Sciences）, pp. 163 － 165, March, 2022

先人の数学教育観とレッドモンドグラフ

金光 三男

名誉教授

Views of Leaders on Mathematical Educations and Redmond Graphs

Mitsuo KANEMITSU

Professor Emeritus of Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

Ⅰ　はじめに

学校教育での教え方で，ブルーナーの［B2］を参考に住田幸次郎［S, p.52］は，「『手の届かないところにある物を取ろうとするときに，土台を固めその上に箱を順序良く積み上げていく』というような『系統的な知識の積み上げは必要であり無視することはできないが，生徒にとって，課題を自ら考えること，創造的に課題を解くことの訓練にはならない』と述べ，『自分の方から解き方を考えるように生徒にしむける』必要性」を主張している。生徒・学生（この論文では学生も含める）が自分で課題を見つけ解決に向かいながら（追体験も含めて）内容の学習をすることは，学習意欲の喚起が期待される。このような数学の教材としては，グラフ理論が比較的適切な内容だと思われる。このためレッドモンドグラフ［R］を扱う。その前に，大切な2点を引用する。これらを全体的に意識して考察する。

第一点：平林一栄の「外在的数学観」（数学教育は既成の学問的体系として，人間の外から交渉をもつとする，数学が個人とは独立して存在する完成されたものとみなす考え方）に関し，過度になると，数学教育は詰め込みや意味理解を伴わない形式的な教授・学習につながる危険性をはらむ。これに反し，数学を人間の内にある，子どもの内部での再生産という形で数学教育を考える数学観は「内在的数学観」と言われてこの観点が数学教育には必要であると平林一栄は述べている。同じことを［K3］でも引用し掲載している。更に平林一栄は受験の弊害は，他人の作った問題を手際よく解くことに慣れて，真の数学の体系を考察することを忘れていることであると述べている（［Z］)。
第二点：黒木哲徳の「ややもすると獲得される算数・数学が生活体験的な概念から這い出すことができず，問題の解法術的な考えに支配されたり解答が○○術的になったり，機械的な暗記をせざるを得なくなる場合がある。科学的概念にまで止揚され，概念の体系化まで指導することや，科学的概念から生活的概念に降りて道筋をつなぐ役割や生活概念的なものから数学的構造を引き上げ認識させることが重要な教師の役割となる」（［K_u］)。上でも述べたが，レッドモンドグラフは余り授業などで接することが少ないのでこれら第1点・第2点と関連させて考察することに意味があると思われる。

Ⅱ　レッドモンドグラフからの課題

1）数学では，定義の内容の理解が必要である。定義からグラフの内容を描いてみよう。

剰余環Z_{40}とは，$Z_{40}=\{0, 1, 2, 3, \cdots, 39\}$ で加法などの演算の結果は40で割った余りに置き換えるものとする。小学校では，2で割り切れるかどうかで偶数と奇数を考えるときのように，整数の分類を粗く考えるときに使用する。

剰余環Z_{40}のイデアル（4）＝ $\{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36\}$ によるレッドモンドグラフ$G=(V, E)$の定義は，グラフGの頂点集合Vが

$$V=\{a \in Z_{40}-(4) \mid \text{ある} Z_{40}-(4) \text{の元} b \text{が存在して} ab \in (4)\}$$

であるとする。この定義内の$Z_{40}-(4)$の－は差集合を表す。異なる2つの頂点a，bが辺（隣接している）をなすとは，$ab \in (4)$のときをいい，このときaとbのなす辺を［a, b］と記す。このレッドモンドグラフを簡単に$\Gamma_{(4)}(Z_{40})$と記す。まとめると，

$\Gamma_{(4)}(Z_{40})=(V, E)$ において，$V=\{a \in Z_{40}-(4) \mid ab \in (4) \text{ for } \exists b \in Z_{40}-(4)\}$，$E=\{[x, y] \mid xy \in (4), x, y \in V, x \neq y\}$。
頂点集合はVは，$\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15,$

17, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 33, 34, 35, 37, 38, 39｝から2つの頂点を表す数字の積が（4）に属する ｛2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38｝の10個である。即ち，$V=\{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38\}$。

辺の集合は$E=\{[x, y] \mid xy \in (4), x, y \in V, x \neq y\}$ であり，どの頂点も偶数だから二つの積は4の倍数となり，すべての頂点が隣接している（このようなグラフを10個の頂点を持つ完全グラフといい，K_{10}と記す）。

2）課題を自分で多く見つける。大学ではあまり扱わない内容なので，ほぼ白紙の状態で学習者の内部での再生産と考えることができ（1. はじめに）に述べた第一点に適している。そして第二点の科学的概念と生活的概念の様子を試みるのに良いと思われるグラフと高校数学の順列組み合わせの内容との関係を観る。

n個の頂点$a_1, a_2, \cdots, a_n$を持つグラフGの隣接行列とは，次のようにして決まるn次正方行列$A=(a_{ij})$のことである。$a_{ij}=$(2つの頂点a_iとa_jが隣接していると1でそうでないとき0)。このn次の正方行列Aの固有多項式$|\lambda E-A|$をグラフGの固有多項式という。ここでEは単位行列とする。

$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+C_1\lambda^{n-1}+C_2\lambda^{n-2}+C_3\lambda^{n-3}+C_4\lambda^{n-4}+\cdots+C_n.$

n次の完全グラフK_nは，$f(\lambda)=(\lambda-(n-1))(\lambda+1)^{n-1}$。（[NN, 第8章p.163]）。例えば，[T, p.89]や[K, p.64］などより，Aは対称行列で対角線上の成分はすべて0だから，$C_1=0$，また$-C_2=$(辺の個数)，$-C_3=$(三角形の個数の2倍)，$C_4=n_M-2n_C$（[K, pp.63－64]）。

レッドモンドグラフ$\Gamma_{(4)}(\mathbb{Z}_{40})=(V, E)$ に戻って，辺の総数は，頂点2個で一つの辺ができるから高校数学の順列・組み合わせで${}_{10}C_2=45$。三角形の個数は，10個の頂点から3つを選べば一つの三角形（詳しくは3－サイクル）が出来るから，これも順列・組み合わせから${}_{10}C_3=120$で求まる。四辺形（4－サイクル）は一組の四辺形$abcd$から，凸四辺形（$[a, b]-[b, c]-[c, d]-[d, a]$）なる1個と，2つの蝶型四辺形（$[a, b]-[b, d]-[d, c])-[c, a]$）及び（$[a, c]-[c, b]-[b, d]-[d, a]$）の合計3個出来る。従って，$3\times{}_{10}C_4=630$の四辺形（4－サイクル）を持つ。2辺の4つの頂点がどれも異なるとき1個の2－マッチングという。完全グラフK_{10}の次数列は｛9, 9, ・・・, 9｝なる10個9を並べた列だから，2－マッチングの個数は$n_M=1/8\times10\times9\times8\times7=630$。よって［B］より$C_4=n_M-2n_C=630-2\times630=-630$。よって，$\Gamma_{(4)}(\mathbb{Z}_{40})$の固有多項式$f(\lambda)$は，$f(\lambda)=(\lambda-9)(\lambda+1)^9=\lambda^{10}-45\lambda^8-240\lambda^7-630\lambda^6-1008\lambda^5-1050\lambda^4-720\lambda^3-315\lambda^2-80\lambda-9$。$f(-1)=0$, $f(9)=0$などを調べて因数定理から展開式が正しいか検算できる。

3）情報伝達問題（生活的概念）とレッドモンドグラフを関連付ける。一般のグラフで定義を述べる（[KO, 2013年]）。これは「はじめに」の第2点と関係する。

情報伝達問題：クラスの生徒を頂点で表し，アドレスを知っている人同士を辺で結ぶとする。このようなグラフを$G=(V, E)$とする。ここで$V=$｛クラスの生徒｝，$E=\{e \mid e=[a, b]$ はaとbがお互いのアドレスを知っている$\}$とする。クラス内の誰かがある情報を知った時，メールで情報を伝えるのに1分かかるとする。（アドレスを知っている人には同時に送信できるものとする）全員にその情報が伝わるのに何分かかるか。それは，情報を最初に知ったのが誰であったかに依る。どの生徒が最初に情報を知った場合でも，何分あれが全員に伝わるか。その最大の時間を$time(G)$分で表す。

頂点uとvの距離とは，uとvを結ぶ最短の道の長さの個数をいう。グラフのすべての2頂点間の距離の最大値をそのグラフの直径という。

少し考えれば，グラフの直径$=time(G)$が分かる。従って$time(\Gamma_{(4)}(\mathbb{Z}_{40}))=1$がいえる。このグラフには切断点（グラフのあるある頂点を取り去るとグラフの連結成分が増える頂点）も橋（グラフから辺を取り去ると連結成分の個数が増えるような辺）も存在しない安全な情報網である。

III まとめ

高校数学の順列・組み合わせと関連させて，K_{10}の辺の個数，三角形の個数，四辺形の個数を使用して求めてみる（この内容は，情報伝達も含めて生活的概念と考えることができる）。更に線形代数で扱う固有多項式を求め，その式が正しいかを，検算として固有多項式に因数定理を適用して確認を行うなどレッドモンドグラフから多くの課題を学習者が見つけることができる。

記憶を主体とした学業試験の成績優秀さと高創造性は殆ど関係が薄く（[I]）教育方法と評価の在り方が問われる。もし低創造で高知能，高創造で低知能，両方とも高い場合や両方とも低い場合があるとすると，高度に発達した数学に対して研究・教育など，学習者に適した対応の仕方が望まれる。

引用文献

[B] *N.Biggs, Algebraic Graph Theory*（*second edition*）. *Cambridge University Press*, 1993

[B2] ブルーナー（佐藤三郎訳），教育の過程，1963年，岩波書店

[I] 市川亀久弥，創造性の科学―図解・等価変換理

論入門―，日本放送出版協会1970年．

［K］ *M.Kanemitsu, The number of distinct* 4―*cycles and* 2―*matchings of some zero―divisor graphs.*（*In Edited by M.Ito, Y.Kobayashi and K.Shoji, Automata, Formal Languages and Algebraic Systems, World Scientific* 2010 pp.63-70.

［K2］ 金光三男，ある剰余環のレッドモンドグラフと完全二部グラフ ―教育系教科専門科目の教材の素材―，数理解析研究所講究録2072（2018），pp.176-180

［K3］ 金光三男，算数・数学教育の方法と教材研究―分数・素数・対称性などの教材化―（於いて：中部児童教育研究会編，教職教育の新展開 2012年，学術図書出版社）pp.7-16.

［K_o］ 小林みどり，あたらしいグラフ理論入門，2013年

［K_u］ 黒木哲徳，教育実践の観点から見た教科内容とその課題，数理解析研究所講究録1657，pp.94-104 2009年．

［NN］ 仁平政一・西尾義典，グラフ理論序説，2005年，プレアデス出版

［R］ *S.P.Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, Commnications Algebra*, 31 (2003), 4425-4443.

［S］ 住田幸次郎，創造力を育てる1985年，有斐閣

［T］ 竹中淑子，線形代数的グラフ理論，1989年，培風館

［Z］ 全国数学教育学会，全国数学教育学会誌　数学教育学研究　第18巻 特別号 2012　＜平林一栄先生 追悼号＞

（2021年9月15日受理）