

相互作用する回転棒磁石の非線形ダイナミクス

小川 祐里奈* 宮川 貴彦**

* 卒業生

** 理科教育講座

Nonlinear Dynamics of Interacting Rotatable Bar Magnets

Yurina OGAWA* and Takahiko MIYAKAWA**

*Graduate, Aichi University of Education

**Department of Science Education, Aichi University of Education, Kariya 448-8542, Japan

I. 研究の背景と目的

自然科学の広範な分野において、分岐現象、同期現象、カオス現象などの動的非線形現象の重要性は高まっている^{1) 2)}。こうした動的非線形現象を身近に実感できる教材として、同期現象を示す複数台のメトロノーム^{3) 4)}やカオス現象を示す二重振り子^{5) 6)}などが知られている。これらの装置は、比較的容易に製作できるため、演習実験などによって高校生や大学生に興味を抱かせる教材として有用であるのみならず、自然科学への探究心を育成する実験教材としても価値が高い。

非線形動力学の入門書として定評のあるStrogatzの“*Nonlinear Dynamics and Chaos*”には、非線形現象を示す具体例が豊富に提示されている⁷⁾。その中に、図1のような外部磁石による磁場中におかれ、共通する固定軸の周りを回転できる2本の棒磁石の物理系が例示されており、その挙動を表す理論モデルとして次の微分方程式が与えられている。

$$\dot{\theta}_1 = K \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 \quad (1)$$

$$\dot{\theta}_2 = K \sin(\theta_2 - \theta_1) - \sin \theta_2 \quad (2)$$

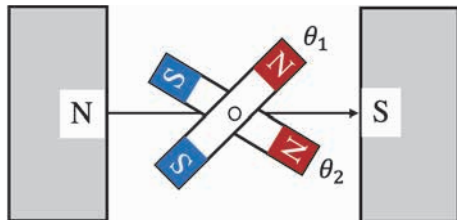


図1 外磁場中におかれた相互作用する回転棒磁石

ここで、 θ_1 と θ_2 は2つの外部磁石の中心を結ぶ直線に対する棒磁石1と棒磁石2のN極の角度をそれぞれ表している。式(1)、(2)中の $\sin(\theta_1 - \theta_2)$ に比例する項は2本の棒磁石のN極同士を斥ける磁力を表し、

$\sin\theta$ の項は外部磁石のS極が棒磁石のN極を引きつける磁力を表している。また、正定数のパラメータ K は実質的には棒磁石間の磁力と外部磁石と棒磁石間の磁力の相互作用係数の競合によって決まるパラメータである。

式(1)、(2)の方程式は、パラメータ K が0.5となる点を境に安定点が質的に変化するという分岐現象を含んでいる。分岐点の前後で力学系の状態は質的に変化することから、安定点の性質のみならず、動力学的な性質も変化することが予想される。しかしながら、図1のような相互作用する回転棒磁石の動力学に関する議論は文献7)には与えられておらず、また実際の装置に基づく実験研究も管見の限り見当たらない。そこで、本研究は、相互作用する回転棒磁石の実験装置を開発して、動画解析の方法を用いて、分岐現象と関わる動力学の性質を明らかにすることを目的とする。

本論文は次のように構成されている。II章では、式(1)、(2)を参考にして、相互作用する回転棒磁石の動力学を記述する理論モデルを立て、分岐現象の発生と分岐点前後の安定点近傍における線形振動を理論的に解析する。III章では、開発した実験装置の概要と動画解析の方法について概括する。IV章では、実験で得られた結果に基づき考察を行う。まず、理論モデルで予測される分岐と同種の現象が実験においても生じることを示す。次に、実験で得られた分岐点をまたがる安定点近傍の線形振動の固有振動数の結果を、II章で与えられた理論モデルの結果と比較する。更に、高いエネルギーを持つ状態を初期状態としたときの非線形運動に注目して、多様な運動の形態を分類し、II章の理論モデルには含まれない開発された実験系特有の新たな分岐現象の存在を明らかにする。最後に、V章に本研究のまとめと今後の展望を示す。

II. 相互作用する回転棒磁石の理論

1. 動力学を表す理論モデル

文献7) には、図1のような相互作用する棒磁石の理論モデルとして微分方程式 (1), (2) が与えられている。これらの方程式は、棒磁石の回転運動による慣性項が粘性減衰項と比較して無視できる場合のみに適用できるものである。そのため、式 (1), (2) は力学状態の安定性の解析から分岐現象の存在を示すには十分ではあっても、動力学を議論するには不十分である。そこで、相互作用する回転棒磁石の動力学の性質を記述するために、式 (1), (2) で慣性項を無視して粘性減衰項を残したのとは反対に、慣性項を残して粘性減衰項を無視する次の理論モデルを採用する。

$$\ddot{\theta}_1 = K_r \sin(\theta_1 - \theta_2) - K_{ex} \sin \theta_1 \quad (3)$$

$$\ddot{\theta}_2 = K_r \sin(\theta_2 - \theta_1) - K_{ex} \sin \theta_2 \quad (4)$$

ここで、 K_r は棒磁石間の磁力の強さを特徴づけるパラメータ、 K_{ex} は棒磁石と外部磁場間の磁力の強さを特徴づけるパラメータである。これらのパラメータは慣性項にかかる係数を基準にしている。図1のような実験系に対応させると、 K_r は同じ種類の棒磁石の磁気モーメントの大きさと慣性モーメントに依存する。また、現実には K_r は2本の棒磁石の角度 θ_1 と θ_2 にも依存する。一方、 K_{ex} は棒磁石の性質（磁気モーメント大きさと慣性モーメント）に加えて外部磁場の強さにも依存する。このとき、外部磁場が均一であれば K_{ex} は θ_1 と θ_2 に依存せず正定数となる。しかし現実には、外部磁場は不均一となるので、 K_{ex} もまた角度 θ_1 と θ_2 に依存する。こうした事情はあるものの、本章では理論解析を簡単化するために、 K_r と K_{ex} をともに正定数とした式 (3), (4) を理論モデルとして採用する。また、式 (1), (2) のパラメータ K は $K=K_r/K_{ex}$ で与えられる。

2. 安定点と分岐現象

前節で導入した式 (3), (4) の理論モデルは、ポテンシャルエネルギー

$$V(\theta_1, \theta_2) = K_r \cos(\theta_1 - \theta_2) - K_{ex}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \quad (5)$$
の作用の下に運動をする二重振り子と見なすことができる。このときの力学的状態の安定点はポテンシャルエネルギー $V(\theta_1, \theta_2)$ の極小点に等しい。 $(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1^{st}, \theta_2^{st})$ を停留点とすると、 $\partial V/\partial \theta_1(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = 0$ 、 $\partial V/\partial \theta_2(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = 0$ の関係から、次の4通りの停留点の存在が確認される。(A) $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (0, \pi), (\pi, 0)$ (B) $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (\pi, -\pi)$ (C) $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (0, 0)$ (D) $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (\pm \cos^{-1}(K_{ex}/2K_r), \mp \cos^{-1}(K_{ex}/2K_r))$ 、ただし (D) は $K_{ex} < 2K_r$ のときのみ現れる。これら4種の停留点に対して、 $\partial^2 V/\partial \theta_1^2 > 0$ かつ $(\partial^2 V/\partial \theta_1^2) \cdot (\partial^2 V/\partial \theta_2^2) > (\partial^2 V/\partial \theta_1 \partial \theta_2)^2$ という極小点の判定条件を課すと、 $K_{ex} > 2K_r$ のときは (C) のみが極小点となり、 $K_{ex} < 2K_r$ のときは (D) のみが極小点となることが示

される。図2は、パラメータ $K=K_r/K_{ex}$ の関数としての棒磁石の安定角を示している。図2から、 $K < 0.5$ のとき安定角はゼロとなり、 $K > 0.5$ のとき安定角は同じ大きさと正負の異なる2つの値を持つ。これは、外部磁場による磁力が相対的に強い場合には外部磁石のS極に2本の棒磁石のN極がともに引きつけられて角度が揃うこと、外部磁場による磁力が相対的に弱い場合には2本の棒磁石が互いに斥け合うために角度が開くことを表す。このように式 (3), (4) の理論モデルは $K=0.5$ を分岐点とするピッチフォーク分岐を示す。

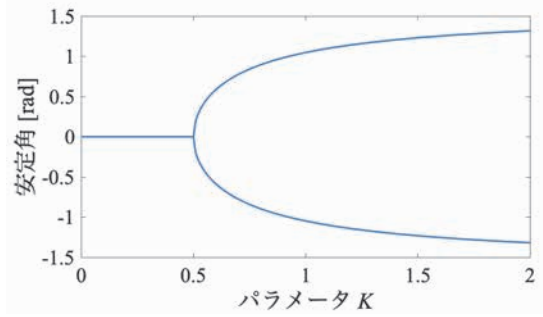


図2 K の関数としての棒磁石の安定角

3. 安定角まわりの線形振動と固有振動数

それでは次に図2に示されている安定角まわりでの微小揺らぎが生じたときの線形振動について検討する。

(1) $0 \leq K < 0.5$ のとき

このパラメータ領域の安定角は $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (0, 0)$ であるため、棒磁石1と棒磁石2の微小角をそれぞれ $\delta\theta_1$ 、 $\delta\theta_2$ とすると、式 (3), (4) は次のようになる。

$$\delta\ddot{\theta}_1 = K_r(\delta\theta_1 - \delta\theta_2) - K_{ex}\delta\theta_1 \quad (6)$$

$$\delta\ddot{\theta}_2 = -K_r(\delta\theta_1 - \delta\theta_2) - K_{ex}\delta\theta_2 \quad (7)$$

ここで、微小角近似 $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$ を用いた。更に、重心角 $\delta\theta_c = (\delta\theta_1 + \delta\theta_2)/2$ と相対角 $\delta\theta_r = \delta\theta_1 - \delta\theta_2$ を導入すると、重心運動と相対運動は分離されて、式 (6), (7) は次の独立した単振動の方程式に書き換えられる。

$$\delta\ddot{\theta}_c = -K_{ex}\delta\theta_c \quad (8)$$

$$\delta\ddot{\theta}_r = -(K_{ex} - 2K_r)\delta\theta_r \quad (9)$$

重心運動と相対運動の単振動の固有振動数をそれぞれ ω_c 、 ω_r とすると、 $\omega_c = \sqrt{K_{ex}}$ と $\omega_r = \sqrt{K_{ex} - 2K_r}$ となる。相対運動の固有振動数の表式に見られるように、 $K_{ex} < 2K_r$ となるとき（つまり K が0.5を超えると）固有振動数は純虚数となる。このことは $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (0, 0)$ の停留点が鞍点となり、この点で表される力学状態が微小揺らぎに対して不安定となることを意味する。

(2) $0.5 < K$ のとき

このパラメータ領域の安定角は $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (\pm \cos^{-1}(K_{ex}/2K_r), \mp \cos^{-1}(K_{ex}/2K_r))$ であり、棒磁石の角度を $\theta_1 = \theta_1^{st} + \delta\theta_1$ 、 $\theta_2 = \theta_2^{st} + \delta\theta_2$ として、式 (3), (4) を線形化したのちに、角度を重心角 $\delta\theta_c$ と相対角 $\delta\theta_r$ へ

変換すると、次の単振動の方程式が得られる。

$$\delta\ddot{\theta}_c = -\frac{K_{ex}^2}{K_r} \delta\theta_c \quad (8)$$

$$\delta\ddot{\theta}_r = -\left(2K_r - \frac{K_{ex}^2}{2K_r}\right) \delta\theta_r \quad (9)$$

このとき、重心運動と相対運動の固有振動数は、それぞれ

$$\omega_c = \sqrt{\frac{K_{ex}^2}{K_r}} \text{ や } \omega_r = \sqrt{2K_r - \frac{K_{ex}^2}{2K_r}} \text{ となる。}$$

(3) 分岐現象と固有振動数

上述のように、分岐点の前後での安定角の質的变化を反映して、重心振動と相対振動の固有振動数の表式は共に変化する。図3は、 K_r を固定して、パラメータ $K=K_r/K_{ex}$ を変数としたときの、相対運動の固有振動数を示している。図3から、分岐前では K が増すと固有振動数は軟化してゼロに近づき、分岐点を超えると今度は K とともに固有振動数は増加し一定値に近づく。この結果の概要は、重心角をゼロとして相対角を変数としたときの式(5)のポテンシャルエネルギー $V(\theta_r)$ の形状変化から理解することができる。まず、線形振動の固有振動数はポテンシャルエネルギーの極小点近傍の曲率に比例することに注目する。 $K < 0.5$ のとき、図4(a)のように $V(\theta_r)$ は $\theta_r=0$ の極小点を持つ。 K が増加するにつれて極小点近傍の曲率は小さくなり、 $K=0.5$ のとき図4(b)のように $V(\theta_r)$ は平坦となるため(線形近似の範囲で)固有振動数はゼロとなる。 $K > 0.5$ のとき図4(c)のように $V(\theta_r)$ には2つの極小点が現れて、どちらの極小点近傍でも曲率は有限となるため固有振動数は増加する。

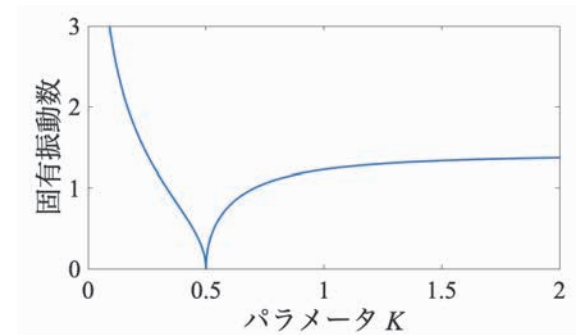


図3 K を変数とした相対運動の固有振動数 $\omega_r/\sqrt{K_r}$

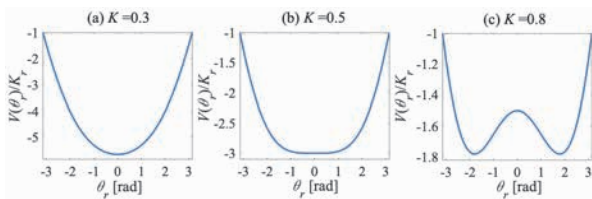


図4 ポテンシャルエネルギー

III. 実験方法

本章では、開発した実験装置の概要を示した上で動画解析の方法について概括する。

1. 実験装置

本研究では、図5に示されているような実験装置を開発した。図1の棒磁石については、4個のボタン型ネオジム磁石を重ねた小棒磁石を2組用意し、小棒磁石の磁極の向きを揃えて発泡スチロール製カラーボードの両端にそれぞれ取り付けて代用する。この磁石付きボードの中心部にボールベアリングの外輪を固定して、回転軸となるボルトをボールベアリングの内輪に通して、2枚の磁石付きボードが上下に位置するようにナットで固定する。更に、装置の土台として利用するパンチングボードの穴に回転軸のボルトを入れてナットで固定する。また、パンチングボードに吸盤を取り付けて装置全体の土台となる工作マットに吸着させて強度を高めて、磁石付きボードが回転しても土台がずれないように固定する。このようにして、図1に示されるような共通する固定軸の周りを回転する2本の棒磁石の装置を製作する。この回転可能な磁石付きボード(棒磁石の代替物)のことを、以下では回転磁石と呼ぶことにする。

一方、図1の外部磁石については、図5(a)に示されているように、円柱形のネオジム磁石2組(1組あたり2個)を用いて回転軸と一直線上になるように固定する。このとき、2つの回転磁石の高さの中間に外部磁石を位置付けるために、適切にカットされたカラーボードを重ねて土台とし、工作マットに接着する。また、工作マットに直線を引き、それに沿って外部磁石・回転軸・メジャーを置くことで回転軸から回転軸に近い外部磁石の端までの距離 L (図5(b)を参照)を計測できるようにする。表1に開発した実験装置の材料一覧が与えられている。

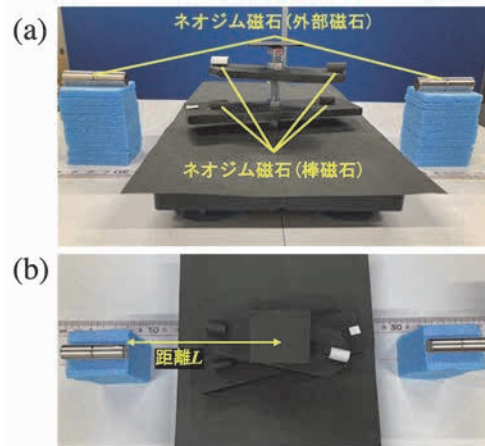


図5 開発した実験装置

(a) 横から見た装置 (b) 上から見た装置

表1 開発した実験装置の材料一覧

材料名	サイズ・個数	用途
円柱形ネオジウム磁石	直径 1cm 長さ 2cm ・ 4 個	外部磁石
ボタン型ネオジウム磁石	直径 5mm 厚さ 3mm ・ 16 個	回転磁石の磁石
発泡スチロール製カラーボード	1 枚	回転磁石の板, 外部磁石の土台
NSK マイクロフラットベアリング	サイズ C ・ 2 個	回転磁石の回転物
W1/4 ボルト	65cm ・ 1 個	回転軸
W1/4 ナット	6 個	回転軸の固定
工作マット	21cm×30cm ・ 2 枚	実験装置全体の土台
メジャー	1 台	回転軸と外部磁石間の測定
パンチングボード	6mm 穴 ・ 1 個	回転磁石の実験装置の土台
パンチングボード用吸盤	4 個	工作マットとパンチングボードの固定
強力両面テープ	1 個	磁石とカラーボードの固定を含む装置の固定
スマートフォン	1 台	動画撮影の器具
スマホアームスタンド	1 台	動画撮影の補助
黒画用紙と白画用紙	各 1 枚	動画解析の補助

回転磁石の運動の軌跡を読み取るために、回転磁石の周辺を黒画用紙で覆い、回転磁石ボード上のネオジウム磁石のN極側に白画用紙を貼り付けてマーカーとする。スマートフォンを用いてマーカーの位置を真上から撮影する際に、上下に位置する回転磁石1と回転磁石2のマーカーが重なって測定できなくなることを防ぐために、下側の回転磁石2についてはボードを少し長くして磁石の外側のボードの端に白画用紙を貼り付けてマーカーとする。また、測定されたデータから回転軸とマーカーの距離を識別することで、どちらの回転磁石のマーカーであるのかを特定する。

2. 動画解析の方法

スマートフォンで撮影した動画から回転磁石の運動に関するデータを処理するために動画解析ソフトのImageJを利用する。以下に具体的な手順を示していく。

(1) 動画ファイルの非圧縮AVI形式への変換

ImageJで動画解析を行うためには非圧縮AVI形式の動画ファイルを準備する必要がある。そのため、動画変換ソフトであるXMedia Record（無料ダウンロード可能）を利用する。スマートフォンで撮影して保存される動画ファイルを読み込み、音声データを消去して動画形式をAVIに選択し、コーデックをRawVideo

に選択して動画ファイルを非圧縮AVI形式へ変換する。

(2) 動画の加工

非圧縮AVI形式に変換された動画ファイル(ImageJ)で読み込み、回転磁石の運動に関わる画像範囲のみを取り出してそれ以外の領域は消去する。また、この段階で回転軸の座標を測定しておく。予め回転軸の位置に鉛筆で印をつけておき、その点を測定して回転軸の座標とする。次に、回転磁石の白画用紙の領域のみが表示されるように輝度の設定を行い、回転磁石のマーカーの座標データを追跡する。

(3) マーカーの座標データの抽出

回転磁石のマーカーの座標データを取得するために、マーカーの領域の面積（ピクセル数）と重心を選択する。解析する画像の中にはマーカー以外にも小さなドットなど不要な部分も含まれることがあるため、解析する対象から面積の小さなものを排除して、マーカーの運動の座標データのみを取得する。

(4) 座標データの変換

ImageJで取得されたデータには、回転磁石1と回転磁石2のマーカーの座標データが混在している。そこで、回転軸を原点とした座標 (x, y) に変換して、回転軸とマーカーの距離の長短を識別してそれぞれの回転磁石のデータに振り分けたのちに、再び時間順に

データを並べ変える。そして最後にマーカーの座標 (x, y) を角度変数 (θ_1, θ_2) へ変換する。

IV. 結果と考察

本章では、開発された装置によって調べられた実験結果を示して考察を与える。

1. 分岐現象

II章で与えられた理論モデルでは、パラメータ $K=K_r/K_{ex}$ の変化とともに分岐現象が生じる。本実験系では同パラメータを正確に制御することはできないものの、回転軸と回転軸に近い外部磁石の端までの距離 L を変化させることで、質的に同じ変化をもたらすことが期待できる。

図6は、距離 L を変えて測定された2つの回転磁石の安定角を示している。図6から、距離 L が小さいときには安定角はともにほぼゼロであるが、距離 L が8.5cmを超えると安定角は正值と負値にはっきりと分かれる。この結果から、理論モデルが示すピッチフォーク分岐が本実験系においても実現することが明らかにされる。なお、ここで測定された安定角は2つの回転磁石に小さな揺らぎを与え、しばらく時間が経過した後にはマーカーの位置がほぼ一定となったと見なされる時間帯の角度の測定値を平均している。加えて、実験装置の2つの回転磁石が厳密には対称でないことを考慮して、 $L=8.75\text{cm}$ 以上では回転磁石1と回転磁石2の安定角の正負が異なる場合の測定値についても平均化している。

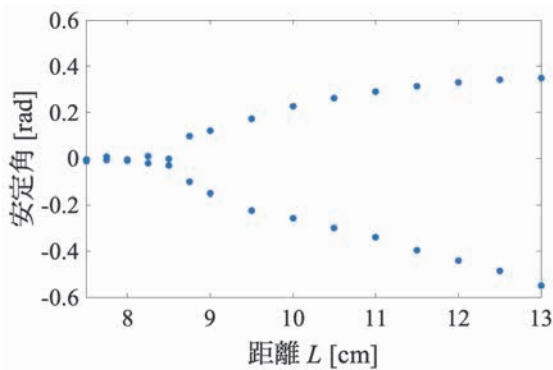


図6 距離 L を変えて測定された回転磁石の安定角

2. 安定点近傍の線形振動

図6に示された距離 L ごとの安定角について、その近傍の相対運動の線形振動に注目して、分岐点をまたがる線形振動の固有振動数の特徴を示す。

(1) 固有振動数の測定

はじめに、安定角とは異なる角度に2つの回転磁石を保ち、その後静かに手を放して回転磁石の運動を計測する。図7は、動画解析の方法によって得られた、

距離 $L=9.5\text{cm}$ に対する2つの回転磁石の相対角 θ_r の時間変化を示している。図7に見られるように、実際には初期時刻に小さくない振幅を与えたとしても、主としてボールベアリングの摩擦によるエネルギーの散逸効果のために、しばらく時間が経過した後では、小振幅の(減衰)振動が生じる。線形振動の固有振動数を求めるために、MicrosoftのExcelのフーリエ変換(高速フーリエ変換)を用いて、相対角の時間変化の一部のデータ(図7の場合は $t=2.13\text{s}$ から 6.40s までの間のデータ)から図8のようなパワースペクトルを得る。そして、パワースペクトルが最大値となる振動数を対応する線形振動の固有振動数と見なす。図7の線形振動の場合には、固有振動数は $f=3.52\text{Hz}$ と求められる。

図9は、距離 L を変えて測定された線形振動の固有振動数を示している。ここでも、実験装置の非対称性を考慮して、 $L=8.75\text{cm}$ 以上では回転磁石1と回転磁石2の正負が異なる安定角まわりの固有振動の測定値

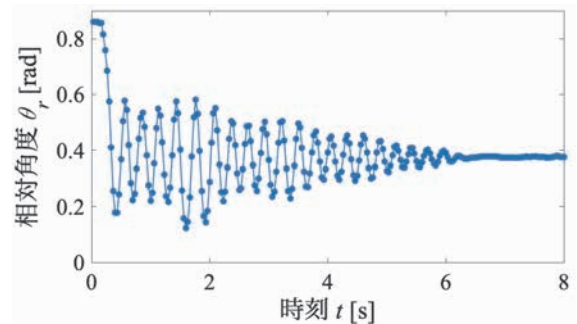


図7 相対運動の時間変化 ($L=9.5\text{cm}$)

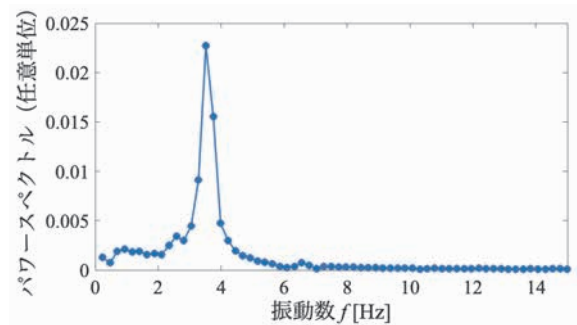


図8 相対運動のパワースペクトル

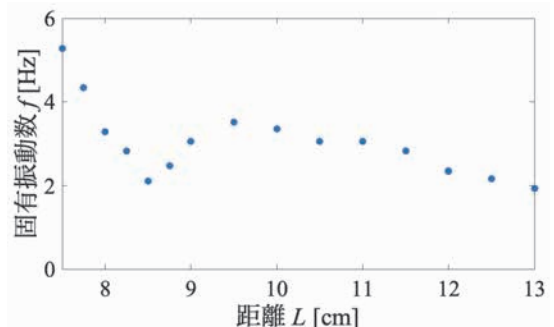


図9 距離 L を変えて測定された線形振動の固有振動数

について平均化している。図9から、本実験系の分岐点 ($L=8.5\text{cm}$ 近傍) の付近で固有振動数が小さくなるという軟化現象が生じている。このように、分岐現象が関わる動力学の特徴が実験で見出される。一方、理論モデルの結果である図3のような固有振動数の劇的な減少は見られていない。分岐点の近傍では回転磁石の運動はパラメータの変化に敏感に反応することから、固有振動数が極端に小さい線形振動を見出すためには、分岐前後においてより細かい距離変化をとともなう実験が必要とされる。また、固有振動数が小さく長い周期の振動になると、理論モデルで無視した減衰の効果が目立ってくる。そのため、分岐点に極めて近い運動については、ボールベアリングの摩擦による減衰効果の役割についても検討しなければならない。

図9に示された固有振動数のもう一つの特徴は、距離 L が 10.0cm を超えると、再び固有振動数が L とともに減少する点にある。理論モデルから説明できない上述の固有振動数の特徴は、2本の回転磁石間の磁力の強さを特徴づけるパラメータ K_r が実際には定数ではなく相対角 θ_r に依存することに起因すると考えられる。そこで、一方の回転磁石のボード上の2組の小棒磁石がつくる磁場を双極子磁場で近似して、他方の回転磁石に与える磁力のモーメントを求めると、相対角が小さい間は、相対角が増加するにつれてパラメータ K_r は小さくなる。これが分岐点後に固有振動数が減少に転じる原因であると解釈される。

なお、II章で議論した固有振動数は厳密に言うと固有角振動数であり、本節の固有振動数とは 2π だけ数値が異なる。しかしながら、理論モデルと実験の結果の比較は定性的な側面のみを取り上げているため、これらを特に区別することなくどちらも固有振動数という用語を使用している。

3. 非線形運動

回転磁石の初期エネルギーが高い場合には、2つの回転磁石の運動は重心運動と相対運動に分離することはできず結合する。また、振動の他に回転運動が生じるなど多様な運動形態が現れ、2つの磁力による非線形効果のために、それらが互いに絡み合った複雑な運動の様相を呈する。本実験系の非線形運動の特徴を調べるために、2つの回転磁石のN極をともに外部磁石のN極に近づけて、静かに手を放したときの回転磁石の運動を調べる。このとき、初期状態は高いポテンシャルエネルギーを持つために、運動において磁力による非線形効果が現れる。

図10は、初期状態から運動が静止するまでの間の2つの回転磁石の運動について、 θ_1 - θ_2 空間における運動の軌跡を示している。図10の(a)-(f)はそれぞれ距離 L が 8.0cm , 8.75cm , 10.0cm , 11.0cm , 12.0cm , 13.0cm の場合の運動の軌跡である。これらの軌跡か

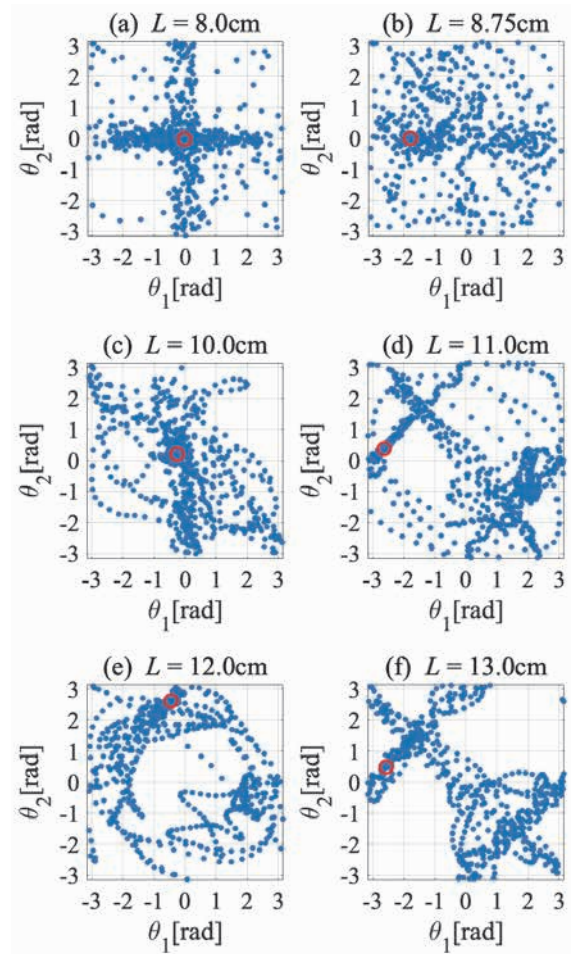


図10 非線形運動の軌跡

黒丸(青): 運動の軌跡, 白丸(赤): 静止点を含む領域

ら、距離 L が 10.0cm 以下の場合 [図10 (a)-(c)] と 11.0cm 以上の場合 [図10 (d)-(f)] で運動の軌跡の特徴を2つに大別できる。

(1) 距離 L が 10.0cm 以下の場合

この場合、図10 (a)-(c) から、運動の軌跡は $\theta_1=0$ と $\theta_2=0$ の直線上付近に集中している。この軌跡の集中は、安定角まわりの(大振幅を含む)振動と一つの回転磁石が外部磁石に捉えられたままだまう一つの回転磁石が回転する運動によってもたらされている。図10 (a)-(c) に示されている白丸(赤)の領域内には最終的に運動が静止する点が含まれている。 $L=8.0\text{cm}$ と $L=10.0\text{cm}$ の場合の静止点は図6に示されている安定角と同じである。一方、 $L=8.75\text{cm}$ の場合の静止点は図6に示されている安定角とは明らかに異なっている。図10 (b) の静止点の結果は、本実験系には理論モデルには含まれない新たな安定角が存在することを示している。この新たな安定角の性質については次節で改めて議論する。

(2) 距離 L が 11.0cm 以上の場合

この場合、運動の軌跡は $\theta_1=0$ と $\theta_2=0$ の直線上付近には集中しない。代わりに、(i) $\theta_2=-\theta_1$ の対角線上、(ii)

$\theta_2 - \theta_1 = \pm\pi$ を保つ直線上, (iii) $\theta_1 = \theta_2 = 0$ の原点を中心とした円周上に軌跡が集中している。これらの3つの軌跡の集中は, それぞれ (i) 2つの回転磁石による逆位相の大振幅振動, (ii) 相対角が $\pm\pi$ に固定された2つの回転磁石が同じ方向へ回転する運動, (iii) 2つの回転磁石による反対向きの回転運動によってもたらされている。上記のような運動形態は, 距離 L が大きく外部磁場による作用が弱まり, 回転磁石間の磁力が支配的になると頻繁に見られるようになる。また, 異なる形態の運動が互いに絡み合い, 時間と共に入れ替わり出現するといった点に非線形運動特有の特徴が見られる。

図10 (d)-(f) の白丸 (赤) の領域内には各運動の最終的な運動の静止点が含まれている。これらの静止点はどれも相対角がほぼ $\pm\pi$ に固定された角度である。これらは理論モデルで鞍点となっている $(\theta_1^{st}, \theta_2^{st}) = (0, \pi), (\pi, 0)$ が, 本実験の外部磁場の不均一性や軸対称性の破れなどによって安定化された結果だと解釈される。また, 複数の安定角がある場合には, 実験で得られる最終的な静止点は, 実験条件の違いによって変化する。特に高エネルギー状態を初期状態にする場合には静止点を正確に予測することは難しい。

4. 第二の分岐現象

図11は, 図10 (b) の運動の静止点の状態を示している。この状態では, 外部磁石に捉えられた回転磁石2の角度はほぼゼロとなり, 回転磁石1のN極は回転磁石2のS極側にやや傾いている。このときの安定角は, 図6で示された安定角とは異なる上に, 理論モデルの停留点とも関係づけることはできない。そこで, 図6の安定角を得たのと同様の方法で, この新たな安定角の距離 L の依存性を調べた結果が図12である。図12には新たな安定角に加えて, 図6の安定角の結果が示されている。実験系の軸対称性から, 角度の正負を入れ替えた安定角が同時に存在するため, 四角 (緑) の安定角のペアと菱形 (赤) の安定角のペアが存在する。この新たな安定角の顕著な特徴は, 距離 L が11.0cmを超えたところで安定角が突然消失する点にある。これは一種の分岐ではあるが, その特徴はピッチフォーク分岐とは異なっている。つまり, 図12の結果から, 本実験系にはII章の理論モデルには含まれ

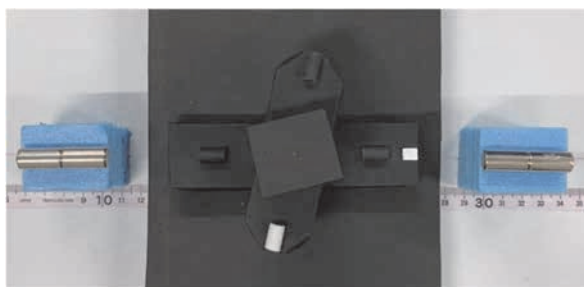


図11 図10 (b) の運動の安定角

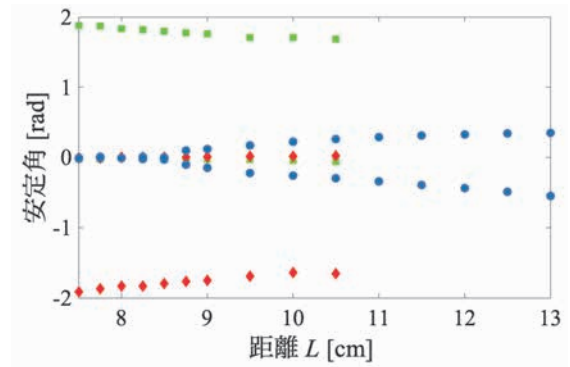


図12 安定角の距離 L 依存性
四角 (緑) と菱形 (赤) : 新たな安定角のペア
丸 (青) : 図6の安定角

ない第二の分岐が存在することが発見される。

本実験系で生じる第二の分岐の発生の仕組みについて磁気エネルギーの観点から検討する。そこで次のような状況を設定する。まず, 図11のように, 外部磁石によって回転磁石2は角度 $\theta_2 = 0$ で固定されるとした上で, 回転磁石1の角度は自由に変動できるとする。次に, 2つの外部磁石と回転磁石2のボード上の2組の小棒磁石がつくる磁場をそれぞれ双極子磁場で近似する⁸⁾。そうして得られた合成磁場 \mathbf{B} と回転磁石1のボード上の2組の小棒磁石の磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}(\theta_1)$ の内積の和から磁気エネルギー $U_B(\theta_1)$ を求める。以下に最終的な表式を与える。

$$U_B(\theta_1) = -2 \frac{\mu_0 \mu \mu_{ex}}{4\pi} \frac{2 \cos \theta_1 + \frac{3L_{ex} l \sin^2 \theta_1}{L_{ex}^2 + l^2 + 2L_{ex} l \cos \theta_1}}{(L_{ex}^2 + l^2 + 2L_{ex} l \cos \theta_1)^{3/2}} - 2 \frac{\mu_0 \mu \mu_{ex}}{4\pi} \frac{2 \cos \theta_1 - \frac{3L_{ex} l \sin^2 \theta_1}{L_{ex}^2 + l^2 - 2L_{ex} l \cos \theta_1}}{(L_{ex}^2 + l^2 - 2L_{ex} l \cos \theta_1)^{3/2}} + \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \frac{3 - \cos \theta_1}{\{2l^2(1 - \cos \theta_1) + d^2\}^{3/2}} - \frac{\mu_0 \mu^2}{4\pi} \frac{3 + \cos \theta_1}{\{2l^2(1 + \cos \theta_1) + d^2\}^{3/2}}$$

ここで, μ_0 は真空の透磁率, μ は回転磁石のボード上の小棒磁石の磁気モーメントの大きさ, μ_{ex} は外部磁石の磁気モーメントの大きさを表す。また, l と L_{ex} は, それぞれ回転軸から回転磁石ボード上の小棒磁石の中心までの距離と回転軸から外部の棒磁石の中心までの距離である。上記の表式の右辺第1, 2項目は外部磁石を起源とする磁気エネルギーであり, 右辺第3, 4項目は回転磁石2を起源とする磁気エネルギーである。後者については, 回転磁石の座標を2次元平面に限ると, $\theta_1 = 0, \pm\pi$ のときに分母がゼロとなり発散する。これは, 2つの回転ボード上の小棒磁石が重なることに起因する発散であるが, 2枚の回転磁石ボード間には高さの間隔 d があるので実際には重ならない。

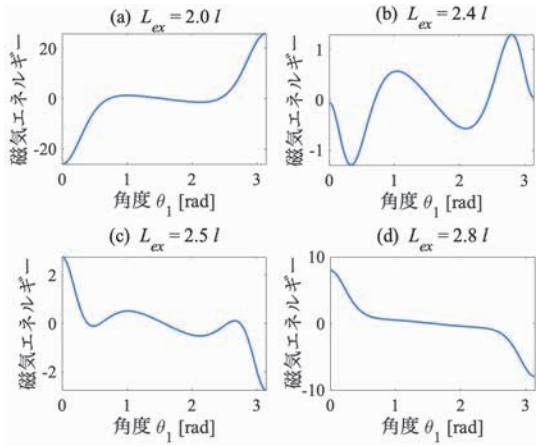


図 13 角度 θ_1 の関数としての磁気エネルギー

そこで、磁気エネルギーの表式の第3, 4項の分母には間隔 d の寄与を加えてある。図13は、 $\mu_{ex}=10\mu$, $d=0.5l$ としたときの、角度 θ_1 の関数としての磁気エネルギーを示している ($\mu_0 \mu^2 / 4\pi l^3$ を単位とする)。図13 (a)-(c) から、外部磁石の距離 L_{ex} が比較的小さいとき、 $\theta_1=0$ または有限微小角の極小点の他に、 $\theta_1=2.0$ radを少し超えたところにも別の極小点が存在する。これが図12に示された新たな安定角に対応する極小点である。更に図13 (d) に見られるように、距離が L_{ex} が大きくなると、 $\theta_1=2.0$ rad 近くの極小点は消失する。このようにして、実験系で得られた第二の分岐の発生機構を説明することができる。また、 $U_b(\theta_1)$ に含まれる回転磁石間の磁気エネルギーをII章で与えた棒磁石間のポテンシャルエネルギー $K_r \cos\theta_1$ (ここで $\theta_2=0$ としている) で置き換えたとしても同種の分岐が生じる。このことから、図12に示された本実験系特有の第二の分岐は主に外部磁石による双極子磁場によって生じることが明らかとなる。

V. 本研究の成果と今後の展望

本研究では、文献7) に提示されている相互作用する回転棒磁石の実験装置を開発して、動画解析の方法を用いて、分岐現象と関わる動力学的性質について調べた。そして、本実験系において、理論モデルで予測されているようなピッチフォーク分岐が実現することを明らかにした。次に、分岐点をまたがる安定角近傍の線形振動を調べることで、固有振動数の軟化現象という分岐現象と関連する動力学的特徴を実験的に見出した。更に、高いエネルギーを持つ状態を初期状態としたときの非線形運動に注目して、多様な運動の形態を分類し、本実験系特有の第二の分岐現象が存在することを発見した。また、磁気エネルギーの極小点の考察から、第二の分岐の発生は外部磁石による双極子磁場の存在が主要因であることが明らかになった。このように、実験研究に基づいて、相互作用をする回転

棒磁石の動力学的性質について複数の新たな知見を得ることができたことは本研究の成果である。

一方、次のような課題も残された。まず、II章で導入された理論モデルに代わる修正された理論モデルの導入が求められる。この修正モデルには、棒磁石間の磁力の角度依存性や外部磁石の不均一性の効果が考慮された上で、第二の分岐を導くことが要求される。そして、本研究で得られたピッチフォーク分岐や線形振動の固有振動数の実験結果の詳細について、修正モデルに基づいて再検証することが求められる。また、IV章4節に導入された磁気エネルギーは、より一般には回転磁石1に加えて回転磁石2の回転自由度を含みつつ計算されるものである。そうした2つの回転自由度を含む磁気エネルギーの分析から、第二の分岐の詳細な性質と相対角 π の状態の安定化機構が解明されることが期待される。

最後に、本研究で開発された実験装置は容易に改変することができる。例えば、2つの回転磁石の回転軸を共通にするのではなく、回転磁石ごとに変えることもできる。そうした装置は文献5) と6) の二重振り子の実験装置との類似性を持つことから、回転棒磁石の運動のカオス現象に焦点をあてる研究は有望である。このように、相互作用する回転棒磁石の実験系にはまだまだ発展の余地があり、かつ比較的容易に装置を開発できることから、高校生や大学生が動的な非線形現象に触れて探究する実験教材として恰好の題材であるといえる。

文献

- 1) 蔵本由紀, 『非線形科学』集英社新書, 2007.
- 2) 郡宏, 『力学系におけるアプローチ: 振動現象を具体例として』サイエンス社「数理科学」, No.572, pp.33-38, 2011.
- 3) 佐藤勇一, 中野健, 長嶺拓夫, 布施誠, 『振動系の同期現象 (2台のメトロノームを対象とした実験と解析)』日本機学会論文集 (C編), 66巻, 642号, pp.363-369, 2000.
- 4) 泉晋作, 鴻上凌也, 忻欣, 山崎大河, 『吊台上的メトロノームの同期現象 - モデルパラメータの同定と実験検証』システム制御情報学会誌, Vol.31, No.11, pp.400-402, 2018.
- 5) 小室元政, 『二重振り子とカオス』日本ロボット学会誌, Vol.15, No.8, pp.1104-1109, 1997.
- 6) 鈴木三男, 増田健二, 『二重振り子におけるカオスの振舞』物理教育, 第48巻, 第1号, pp.1-5, 2000.
- 7) S. H. Strogatz, “Nonlinear Dynamics and Chaos” Westview, 1994.
- 8) D. J. Griffiths, “Introduction to Electrodynamics” 3rd ed., Prentice Hall, 1999.

(2021年9月24日受理)