イプシロン　2021. Vol.63, 1 － 10

数学的探究のサイクルと「データ」の役割について
- 統計と図形に関するケーススタディを基にして -

愛知教育大学数学教育講座　**飯　島　康　之**

1.　はじめに

GIGA スクール構想により，小中学校ではタブレットや WiFi などの ICT 環境の最低基準が大きく改善されることになった。高校に関してもタブレットの導入の模索が本格化しつつあり，数年後には, タブレットや WiFi, クラウド環境は当たり前のものに変わっていくことが想定される。数学教育での ICT 利用に関する新たな研究・実践が可能な時代に入ったといえる。

「学びの個別最適化」という名前の元で，旧来的な学力を確実に身につけるための ICT 利用なども求められていくであろうが，学びの道具，特に探究の道具として ICT を使うことを前提としたときに，学校教育で扱える数学的探究をどのように変えていけるかも，重要な課題である。

中学校学習指導要領数学編解説の中で,「また，急速に発展しつつある情報化社会においては，多くの人が，様々なデータを手にすることができるようになってきており，データを用いて問題解決する場面も多くみられるようになってきている。そこで，データを用いて問題解決するために必要な基本的な方法を理解し，これを用いてデータの傾向を捉え説明することを通して，問題解決する力を養うことができるようにする必要がある。」と記述されている。この文そのものは主として統計領域としての「データの活用」を想定して記述されていると思われるが，動的幾何ソフト，関数グラフ描画ソフト，プログラミングなどによって，ICT は豊富な数学的現象を観察可能にしてくれる。

「データを適切なソフトに読み込ませてボタンを押せば最適な解決が得られる」というような使い方は，社会的には「便利な使い方」として歓迎されるかもしれないが，数学教育の中で重視すべき使い方ではない。そこで得られた結果を解釈・吟味し，それで適切かどうかを判断して，新しい問題を設定したり，次に求めるべきデータを決定し，さらに探究を進めることを数回繰り返すような,「探究のサイクル」を知的に行っていくような使い方であろう。

本稿では，現実のデータを使った問題と，動的幾何から数学的現象に関わるデータを扱った問題についてケーススタディを行い, それらを元に数理的な探究と数学的な探究において,「データ」に関わる探究のサイクルにはどのような類似点な相違点があるかについて考察したい。

2.　「野球の打球を最も遠く飛ばすのに適した角度」に関連した探究のサイクルの例

2.1 出発点

この話題は，ある学生が卒業研究に関連して探究したいこととして提案したことに始まる。

「物理の授業では，空気抵抗がなければ，45°になるというけれども，実際には 40°くらいだと思うんです。それを明らかにしたいと思います。」

「なるほど。それで，何をしたいの?」

「自分が実際にボールを打つ様子を分析したいのでハイスピード撮影可能なビデオカメラを使わせてください。」

「今あるビデオカメラでは，せいぜい 120fps くらい(通常の倍の速度)しか撮影できないし，デジカメで 1000fps の撮影ができるものもあるけれど，記録できる解像度が低いから現実的じゃないよ。」

「スポーツ科学で使う，こんなシステムがあるらしいです。」

「いくらするの?」

「300 万円」

「無理でしょ。最初からそんなのを買ってデータを集めて取り組むなんて。現実的に考えようよ。そういう打球の角度と飛距離の現実のデータって，どこかで公開されているものってないのかな。まずそれを使って分析する方が適切じゃないかな。」

「は，はい」(ちょっと不満)

「MLB のテレビ映像なんかでは，ホームランの直後の映像でも，いろいろなデータが表示されたりしているし，サイトにもいろいろ情報があったりするよね。そういうの，使えないかな。」

一緒に web 検索などをしてみると，大谷選手のホームランに関する情報をいろいろなサイトでまとめられているのがわかった。そこで， 2021 年のシーズンに大谷選手が打ったホームランのデータをもとに分析することを最初の課題とした。

2.2 大谷選手の 46 本のホームランのデータの分析(1)

その次のゼミのとき，彼が報告した結果は驚くべきものだった。

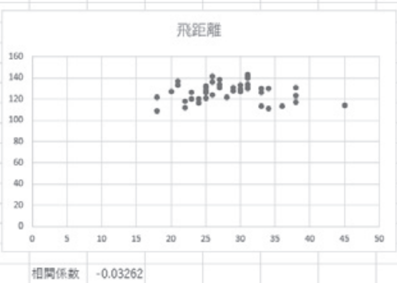
「先生，打球の角度と飛距離は無関係だということがわかりました。」

「え? どういうこと?」

「相関係数を求めてみたら，ほとんど 0 なんです」

Excel で分析した結果を図 1 にまとめてみた。

No.	速度(m/s)	角度	飛距離
1	47.5	29	128
2	51.38889	21	137
3	48.33333	30	129
4	48.61111	29	131
5	48.05556	38	123
6	48.33333	33	126
7	47.77778	27	134
8	43.33333	34	111
9	49.44444	34	130
10	48.05556	33	130
11	45.55556	33	113
12	43.05556	36	113
13	47.22222	27	131
14	50	31	134



相関係数 -0.03262

図-1 大谷選手の 46 本のホームランの角度と飛距離

たしかに，相関係数は-0.033 なので，ほぼ 0 といえるし，この分布もほぼ「平ら」。

でも，これにだまされてはいけない。

「どう思うの?」「次に何をしたいと思うの?」「そもそも，無関係なはず，ないでしょ。」

そう発言しながら，思った。「角度と飛距離の関係を調べたい」と思ったとすると，web や書籍で集めやすいデータとして,「大谷選手の 2021 年度のホームラン」というのは, 思いつきやすく, 探しやすいデータである。それを使って散布図や相関係数を求めると，図-1 のようになる。「これをどう解釈し，次に何をしようと思うのか」リアルなデータを元にした問いとして，いい問題になるのではないかと思った。

「いい問題」というだけでなく，複数の解決策を模索しておきたいと思った。最初に思ったのは,「これはホームランしか扱っていない」という意味で，偏ったデータだという点である。より適切なデータを収集するのが，一つの方向性である。一方,「このデータをうまく分析する」ことで，適切な解を得ることはできないのだろうかとも考えた。それも一つの方向性である。まず，後者から取り組んでみることにした。

2.3 大谷選手の 46 本のホームランのデータの分析(2)

図-1 では，角度と飛距離のみを散布図にしているけれども，実際の MLB の実況中継などで気になるのは，大谷選手の打球の速さである。「こんなに低くてもホームランになった」とか「こんなに高い角度でホームランにできるのは大谷選手だからだ」というような実況をよく耳にした。かといって，すべての打球の速さが速いとは限らない。打球の速さを反映した分析ができないだろうかと考えた。

また，空気抵抗を考えると，打球が速い方が影響を受けることが推定される。速さに比例するのかその 2 乗に比例するのかは分からない。きっとそのような理論的なモデルもあるのだろうが, データだけから，何か傾向を求めることはできないだろうかと考えた。

そこで，いわゆる物理の問題として扱う「空気抵抗がない場合の理想値」を使ってみることにした。初速度が V_0, 打ち上げる角度が水平からみて θ をなす場合，時刻 t の水平方向の速さ V_x, 垂直方向の速さ V_y と高さ y と水平距離 x は，次の式で得られる。

$$V_x = V_0 \cos\theta$$

$$V_y = V_0 \sin\theta - gt$$

$$x = V_0 \cos\theta t$$

$$y = V_0 \sin\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

そのため，地上に落ちてくる時刻は， y=0 から t=2 $V_0 \sin\theta / g$ となり，空気抵抗がないときの飛距離の予想値は 次の式で得られる。

$$x = 2V_0^2 cos\theta \cdot sin\theta/g = V_0^2 sin2\theta/g$$

実際の飛距離と，無抵抗時の飛距離との比を求め，初速度と比，角度と比の散布図をつくった。

No.	速度(m/s)	角度	飛距離	飛距離/無抵抗時飛距離
1	47.5	29	128	0.655584
2	51.38889	21	137	0.759797
3	48.33333	30	129	0.624873
4	48.61111	29	131	0.640628
5	48.05556	38	123	0.537947
6	48.33333	33	126	0.578593
7	47.77778	27	134	0.711085
8	43.33333	34	111	0.624797
9	49.44444	34	130	0.562042
10	48.05556	33	130	0.603882
11	45.55556	33	113	0.584106
12	43.05556	36	113	0.628116

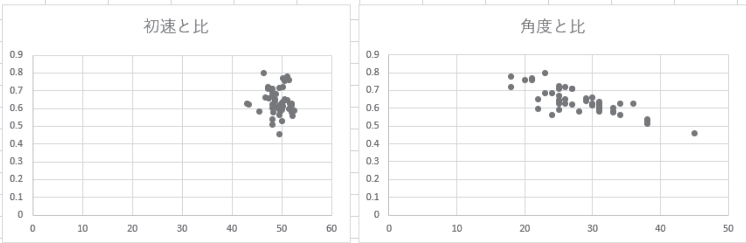


図-2 初速度と比(実際の飛距離/無抵抗時の飛距離)，角度と比の散布図

初速度によって影響されると思っていたが，実際には角度との関係がかなり直線的なものとして得られることが分かった。おそらく，時間あたりの空気抵抗は速度に依存するとしても，滞空時間の方がより大きな要因になるということなのではないだろうか。角度の比はかなり直線的な関係になっているので，回帰直線を Excel の近似直線の機能を使って求めてみた。

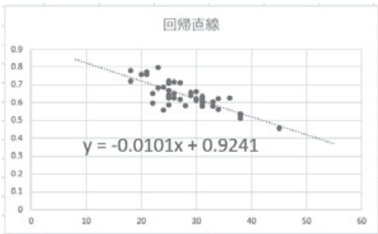


図-3 回帰直線の数式を Excel で求める

この回帰直線を使って，たとえば，大谷選手のホームランの平均初速度 49m/s において，打球の角度を 0°から 90°まで計算し，打球の角度と，無抵抗の場合と抵抗ありの場合のそれぞれの飛距離との散布図を描くと，図-4 のようになり，飛距離が最大値になるのは角度が 32°の場合になった。初速度を変えてもグラフの概形も変わらず飛距離が最大となる角度は 32°だった。

	初速度	49	m/s
角度	抵抗なし	k	抵抗あり
0	0	0.9241	0
1	8.550377	0.914	7.815044
2	17.09034	0.9039	15.44795
3	25.60947	0.8938	22.88975
4	34.09741	0.8837	30.13188
5	42.5438	0.8736	37.16627
6	50.93836	0.8635	43.98528
7	59.27086	0.8534	50.58176
8	67.53115	0.8433	56.94902
9	75.70916	0.8332	63.08088
10	83.79494	0.8231	68.97161
11	91.77862	0.813	74.61601
12	99.65048	0.8029	80.00937

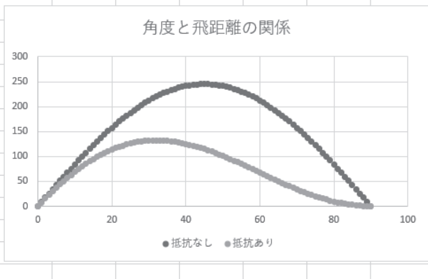


図-4 初速度を大谷選手のホームランの平均値(49m/s)とした場合の角度と飛距離の関係

普通の数学の問題とちがって，上記の解決に関しては，それが「正しい」かどうかを厳密に評価することはできない。しかし，図-1 からは，「ホームランのデータだけでは答えの出しようがない」ように思えるけれども，少なくともほぼ適切と思えるような答え(32° が最適)を導く方法もありうることは示されたと言える。

2.4 大谷選手のすべての打席のデータを利用した分析

図-1 に描かれているのは，ホームランのデータである。図-6 の「?」で示したエリアにあるはずのデータは，フェンスを越えなかったという理由で削除されている。より正確な分析をするためには，この「?」に該当するデータを補完するという方法が考えられる。

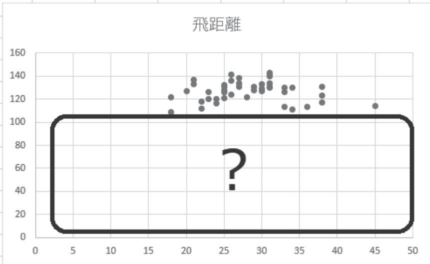


図-6 補完すべきデータ

そのようなデータは入手可能な場所にあるのだろうか。MLB のテレビ放送を見ていると，ホームラン直後に初速度や角度などさまざまな情報が提示され，statcast の文字が表示されている。また，mlb.com には，たとえばイチローが活躍した時代でも，ヒットの打球の分布などを調べることができた。きっと，mlb.com のサイトを探せば該当するデータ，つまり大谷選手のすべての打席の初速度，角度，飛距離などのデータを見つけることができるのではないだろうか。そう思って調べてみた。

決して簡単ではなかった。mlb.com からほしいデータにたどり着くまでの概略をまとめておく。

・まず，mlb.com にいく。

・メニューの「STATS」の中にある「Baseball servant」を選択する。(サイトが変わる)

・「Statistics」を選択する。

・「Player Batting 」で，2021 を選択する。

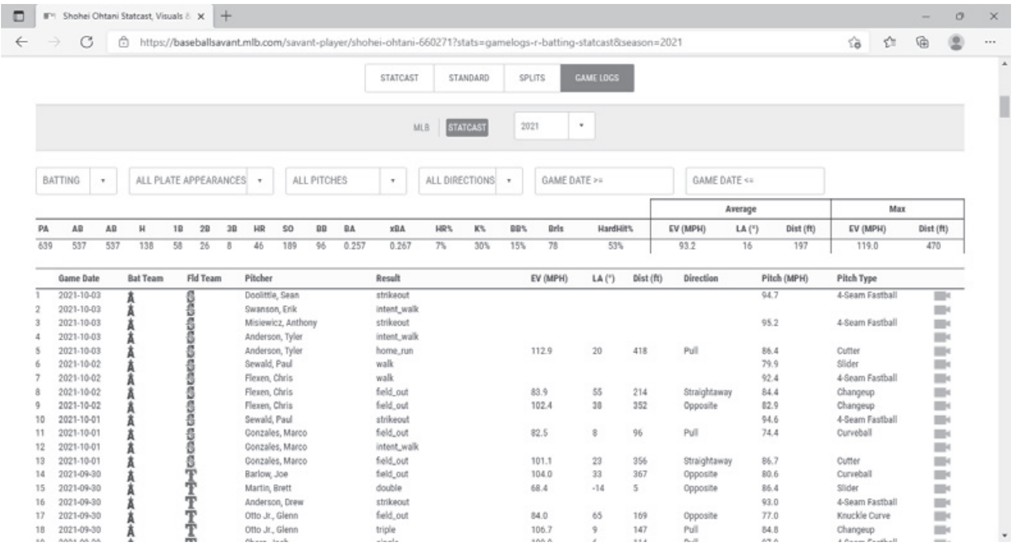
・選手リストが出てくるので，大谷選手を選択する。

・「Batting」のリストを選択したのに,「投手大谷」のデータが出ているので, 少し下げて「Batting」の方を選択する。

・まとめのチャートが表示されるようになるが，少しさ背手「Game Log」を選択する。

・それぞれの打席での結果が表示されるが，そこでさらに「STATCAST」を選択する。

紆余曲折を経て，ここまでくると，図-のような画面に到着する。



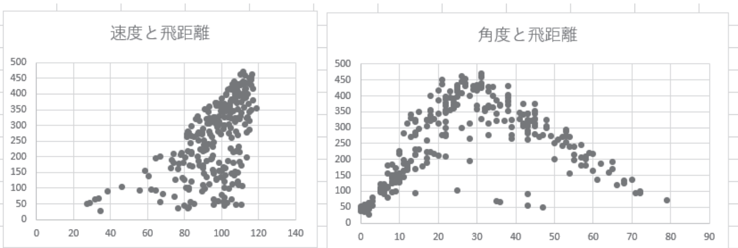
PA	AB	AB	H	1B	2B	3B	HR	SO	BB	BA	xBA	HR%	K%	BB%	Brls	HardHit%	Average EV (MPH)	Average LA (°)	Average Dist (ft)	Max EV (MPH)	Max Dist (ft)
639	537	537	138	58	26	8	46	189	96	0.257	0.267	7%	30%	15%	78	53%	93.2	16	197	119.0	470

	Game Date	Bat Team	Fld Team	Pitcher	Result	EV (MPH)	LA (°)	Dist (ft)	Direction	Pitch (MPH)	Pitch Type
1	2021-10-03			Doolittle, Sean	strikeout					94.7	4-Seam Fastball
2	2021-10-03			Swanson, Erik	intent_walk						
3	2021-10-03			Misiewicz, Anthony	strikeout					95.2	4-Seam Fastball
4	2021-10-03			Anderson, Tyler	intent_walk						
5	2021-10-03			Anderson, Tyler	home_run	112.9	20	418	Pull	86.4	Cutter
6	2021-10-02			Sewald, Paul	walk					79.9	Slider
7	2021-10-02			Flexen, Chris	walk					92.4	4-Seam Fastball
8	2021-10-02			Flexen, Chris	field_out	83.9	55	214	Straightaway	84.4	Changeup
9	2021-10-02			Flexen, Chris	field_out	102.4	38	352	Opposite	82.9	Changeup
10	2021-10-01			Sewald, Paul	strikeout					94.6	4-Seam Fastball
11	2021-10-01			Gonzales, Marco	field_out	82.5	8	96	Pull	74.4	Curveball
12	2021-10-01			Gonzales, Marco	intent_walk						
13	2021-10-01			Gonzales, Marco	field_out	101.1	23	356	Straightaway	86.7	Cutter
14	2021-09-30			Barlow, Joe	field_out	104.0	33	367	Opposite	80.6	Curveball
15	2021-09-30			Martin, Brett	double	68.4	-14	5	Opposite	86.4	Slider
16	2021-09-30			Anderson, Drew	strikeout					93.0	4-Seam Fastball
17	2021-09-30			Otto Jr., Glenn	field_out	84.0	65	169	Opposite	77.0	Knuckle Curve
18	2021-09-30			Otto Jr., Glenn	triple	106.7	9	147	Pull	84.8	Changeup

図–7 MLB での大谷選手のすべての打席での詳しいデータ

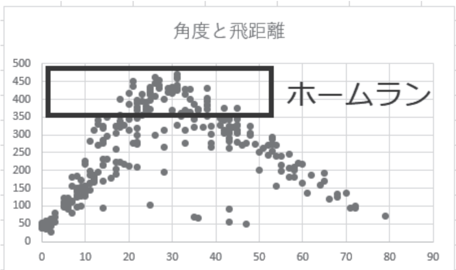
ここにあるデータを Excel に取り込み，必要なデータのみを残し，初速度と飛距離，角度と飛距離の散布図をつくると，図-8 のようになった。

結果	速度	角度	飛距離
field_out	82	0	37
grounded_	82.3	0	39
field_error	101.5	0	52
field_out	101.6	0	43
triple	108	0	48
grounded_	110.5	0	47
field_out	76.3	1	36
grounded_	95.9	1	46
double	98.2	1	59
field_out	101.2	1	55
field_out	103.1	1	54



図–8 大谷選手の全打席のデータを元にした，二つの散布図

特に角度と飛距離の散布図において，350 フィート以上の部分をホームランとして四角で囲むと，図-9 のようになるが，この部分のデータのみを抽出しているのが，図-1 として理解することができ，逆に，図-6 の「?」の部分を補完したものが，図-9 といえる。



図–9 ホームランのデータとそれ以外のデータ

図-8 を眺めるだけでも，飛距離が最も長くなるのは，角度が 32° くらいであることが分かるけれども，両方ともデータの全体の傾向を読み取ることは難しい。そこで，角度を 10° ずつの分割してみたデータに関して，速度と飛距離に関する散布図と，速度を 10 マイル/h ずつに分割してみたデータに関して，角度と飛距離に関する散布図を図-10, 11 のようにつくってみた。

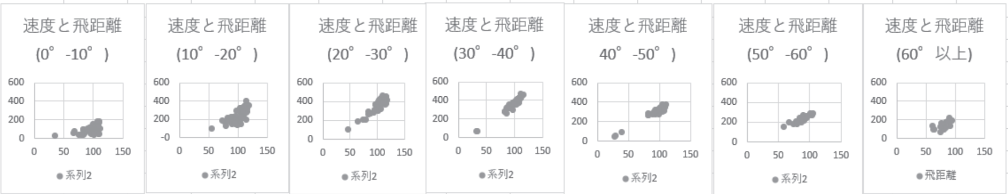


図-10 角度の大きさごとの速度と飛距離の関係

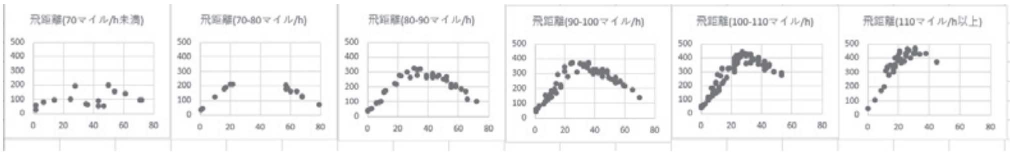


図-11 速度の大きさごとの角度と飛距離の関係

図-8 と比較すると，それぞれのデータの中での関係はかなり明確になった。角度が一定ならば，速度と飛距離にはかなり直線的な関係がみられ，速度が一定ならば，グラフの形は似たような形を描いていることがわかった。また，どの角度においても，最大値は 32° あたりのところに見いだせることもわかった。

2.5 数理的探究のサイクルを進める原動力

この問題のように，現実の問題を解決する探究を，数学内部の問題を解決する探究(数学的探究)と区別するために，数理的探究という言葉を使うことにする。

(1) 数学的処理の解釈・吟味そして違和感

図-1 の結果は間違っているわけではない。正しいデータを正しい手続きで処理している。それを元に「打球の角度と飛距離は無関係」と結論づけてもおかしくない。それでおしまいにせず，さらに探究を進めていく原動力は，「無関係なはず，ないでしょ」と解釈の結果を吟味し，「だまされてはいけない」と思わざるを得ない「違和感の存在」ではないだろうか。

(2) データも処理も解釈も，すべて「暫定的」という認識

「違和感を感じるような結果」に対して，改善可能なこととしては何があるのか。数学的探究の場合，まず疑うのは計算や証明のプロセスだ。逆にすべてのプロセスが正しいなら，その結果は受け入れざるを得ない立場に切り換えるのが，数学的探究での潔さと言ってもいいだろう。しかし，対象が数学でなく，「現実」である以上，そこから得ているデータが適切とは限らないし，その処理も解釈も適切とは限らない。極端にいえば，そこに，十分性とか必然性などないと思った方がいい。暫定的に，この程度のデータを集めてみて，暫定的に，この方法を使ってみて，こ

んな結果が得られたが，その結果にどの程度の満足を得て納得し，探究を終えるべきと考えるのか，それらを見直して，もう少しよい結果に到達すべきと考えるのかというのが，数理的探究の基本とも言える。

(3) 多様な改善の選択肢

そのため，改善の方法は多様だ。今回も，データは変えずに処理の方法を変えるものと，データを補完するものの2通りを例示したが，他の選手も含めた多くのデータを使う選択肢もあれば，データを取る方法などを変える選択肢もありうる。球場を固定し，環境を整える方法もありうる。また，今回は両方とも，32°あたりという結果で探究を終えたが，さらに精密な結果を求めて探究を進めていく選択肢もあっておかしくない。

(4) 数理的探究に対するICTの影響

今回の事例から示唆される第一の点は，「数学的処理」を行うためのツールとしてのICTの利用である。Excelにデータを取り込み，散布図の作成，回帰直線や相関係数の計算，数式の計算などを行っている。Excelなしに取り組むことなどほぼ想定できない。

第二の点は，データがweb上にあり，それを探したりダウンロードするための手段としてのICTである。単にweb上に膨大なデータが存在するというだけでは利用は難しく，それを見つける上では一定のスキルが必要になるが。今回はwebページからのコピー&ペーストだったが，さらに膨大であれば，スクレイピングなどを行うこともありうるし，センサ等を設置して，リアルタイムでそこからデータを集める方法などもありうるが，どのような種類のデータをどこから収集するかという手段として，ICTが大きな役割を果たすことには注目しておきたい。

3. 作図ツールを使った数学的探究と数理的探究におけるデータの役割について

3.1 データや観察の「暫定性」

「2021年度の大谷選手のホームラン」は，46本であり，そのデータは改変することも，追加・削減することもできない。今回，「2021年度の大谷選手のすべての打撃」にデータを広げることをしたが，同じ種類のデータを任意に増やすことができるわけではない。それと比較すると，作図ツールで観察している現象は，根本的に違う。より多く調べたいと思えば，いくらでも多く，詳しく観察することができる。自然現象や社会現象は「分布」であり，作図ツールなどで接する数学的現象とは違う。

では，作図ツールで行う観察は，最初に計画をしっかり決めていれば，「やりなおし」など必要ないのかというと，少し違った意味で，データや観察に「暫定的な性格」があり，それが探究のサイクルを生み出す原動力の一つになっていることに注目しておきたい。

まず，作図ツールで観察している世界は，「格子点」の世界のような，限られた有限の世界でしかない。2点A(0,0)，B(10,0)に対して，P(x,y)を画面の中で自由に動かしたとき，厳密な意味で∠APBが直角になる場所など，ほとんどない。2つの円の位置関係などを調べる場合でも，厳密な意味で2円が接するような場合は，ほとんどない。

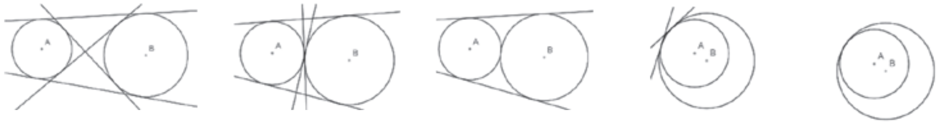


図-12 2 円とその共通接線の変化の様子

2 円とその共通接線の変化の様子を，特に意図的な動かし方をしないで観察すると，図-12 のような結果を得る。「4 本」の次が「2 本」,「0 本」という変化を，そのまま受け入れるのか,「なんで 3 とか 1 がないの? あるはずじゃないか?」と思うかによって，探究そのものが大きく変わる。

四角形(ABCD)の 4 つの角の二等分線でつくられる四角形(EFGH)の問題について調べると，多くの場合，表-1 のような結果になる。

表-1 四角形の 4 つの角の二等分線でつくられる四角形の対応表

ABCD	EFGH
正方形	一点
長方形	正方形
ひし形	一点
平行四辺形	長方形
台形	四角形
たこ形	一点
四角形	四角形

一通りの観察と記録が終われば「おしまい」と思うかもしれないが，実はここからが重要である。上記の観察結果は，いろいろな意味で「暫定的」である。たとえば,「台形」というのは，無限個の要素から成り立っているが，ここで観察しているのはその中の数個であり，スケッチなどを残しているのは一つの場合にすぎない。また，表の中では,「四角形」とのみ記述しているけれども，それは観察者の解釈が入っているわけで，何かを見落としている可能性もある。

実際，この対応表を検討する中で，たとえば,「EFGH の種類がとても少ない」ことに注目すると,「この表の中に平行四辺形，ひし形，台形がない」のは,「ありえない」ことを意味するのか,「探せば見つかるはず」なのかを考えながら次にすべきことを考えることになる。そして，ここでは，台形の場合について精査することが示唆される。

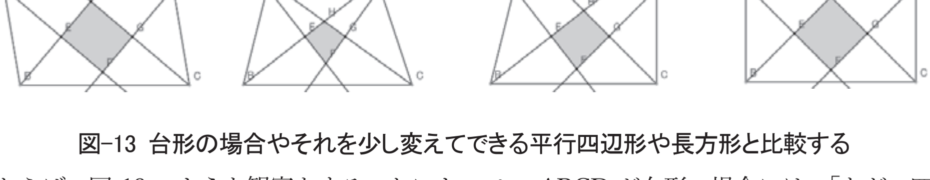


図-13 台形の場合やそれを少し変えてできる平行四辺形や長方形と比較する

たとえば，図-13 のような観察をすることによって， ABCD が台形の場合には,「ただの四角形」ではなく，一組の対角が直角になっていることを見いだし，それをきっかけに，ABCD が一

般の四角形の場合にも，EFGHは「円に内接する四角形」であることを見いだしたり，「EFGHが台形になることはありうるが，その場合には等脚台形になる」ことを見いだしたりする。

3.2 図形のデータの場合に見られる「さまざまな変数の存在」

今回の冒頭で扱ったデータが，野球の打球というシンプルなデータであったせいことも起因するかもしれないが,「どのような変数について検討するか」を考えたとき，当初から測定対象となっていた, 初速度, 角度, 飛距離などに加えてさらに増やしていくことは難しかった。STASCASTでは球種など他の要因についても測定しているのでそれらを対象にすることは可能かもれないけれども，かなり限定されているし，さらに変数を増やすとしたら，新しい測定することが必要になってくる。これと対照的に，図形に関しては，シンプルな図であっても，かなり豊富な対象が内在している。たとえば，図-13で扱っている図の場合，最も基本的なのは，ABCDとEFGHの形だが，8個の点，8本の線分あるいは半直線，20個くらいの角，4個以上の三角形などがあり，それらの位置，長さ，面積なども，それらの関係なども豊富にある。「くらい」という記述は曖昧だが，半直線を延長するとか，二つの半直線の交点を考えるなど，隠れている幾何的対象に注目することが，実は意味があることなどもあるからだ。

このように考えると，図形の探究のサイクルでは,「これまでも観察していたはずの図形の中に,注目していなかったという意味で，観察していなかった幾何的対象や関係を見いだす」ことも含まれている。そのような意味では,「データは変わらない」のではなく,「注目すべきデータが新たに生み出す」行為として，探究のサイクルを位置づけることもできるといえる。

4.　おわりに

本稿では現実のデータを使った問題として，野球の飛距離を大きくするのに最適な打ち上げ角度を扱う上で，大谷選手のホームランのデータを出発点とする探究を扱った。これらはさまざまな意味で「暫定的」であることは明らかであり,「納得できない結果(違和感)」はさらに探究を進めていくための原動力になるとともに，その選択肢は多様であり，またそこにICTの存在も大きく関わっていることを指摘した。

一方，そのようなことは,「現実のデータ」だからだけではないことを，作図ツールを使った数学的探究の場合を元に例示した。しかし，図形の場合の探究の多様性には，注目可能な変数が豊富でなることなど，別の側面があることも指摘したが，それらに関してさらに明確にしていくことなどは，今後の課題として残っている。

参考文献

飯島康之(2021) ICTで変わる数学的探究，明治図書

飯島康之(2015) 作図ツールを用いた数学的探究における「暫定的な解説と問題の再設定」-インターラクティブな利用からの「思考力・判断力・表現力」に向けて-，日本数学教育学会，数学教育学論究臨時増刊, pp.9-16

謝辞 本研究は，ＪＳＰＳ科学研究費補助金基盤研究(C)20K03206 の助成を受けたものである。