イプシロン　2021. Vol.63, 129 - 136

図形指導における反例を利用した授業に関する研究

＜修士論文要旨＞

川　口　輝　正

論文構成

第１章　本研究の目的

1.1 近年の社会で求められていること

国際教育到達度評価（IEA）が行う国際数学・理科教育調査（TIMSS2015）では，数学を学ぶ楽しさや，実社会との関連に対し肯定的な回答をする割合に改善が見られているが，諸外国と比べて低い状況にあり，学習意欲面で課題がある。この結果等から，平成29年告示の中学校指導要領の解説では，数学の楽しさについて，『単にでき上がった数学を知るだけでなく，事象を理想化したり抽象化したりして数学の舞台にのせ，事象に潜む法則を見つけたり，観察や操作，実験などによって数や図形の性質などを見いだし，見いだした性質を発展させたりする活動などを通して数学を学ぶことを重視することが大切である。さらに，自立的，協働的な活動を通して数学を学ぶことを体験する機会を設け，その過程で様々な工夫，驚き，感動を味わい，数学を学ぶことの面白さ，考えることの楽しさを味わえるようにすることが大切である』と述べられている。

また，平成 29 年告示の中学校指導要領にて，第２学年へ用語として新たに「反例」を取り入れられることになると示されている。単純に推測の証明を演繹的に行うだけではなく，反例を用いるこ

とで，推測の真偽の判定や推測の修正に取り組む活動が求められている。これを受けて，反例について調べていく中で，I. ラカトシュ（1980）では，証明と論駁の大切さについて書かれていた。その中では，反例を利用して論駁を行うことで，証明に値する命題に修正していき，よりよい命題を構築することができると示している。

1.2　反例を利用した学習指導の現状と課題

まず，2020 年に日本で使用されている教科書に記載されている反例の扱いについて，調べて比較して現状について考察する。

表１　各教科書会社の反例に関する記述の比較

	反例の用語	命題の逆について	命題を修正させていく題材
啓林館	○	○	×
学校図書	△	○	×
教育出版	○	○	×
数研出版	△	○	×
大日本図書	△	○	×
東京書籍	○	○	×
日本文教出版	○	○	×

○：紹介している　△：紹介しているが，発展としての扱い　×：紹介していない

表１のように，中学校の教科書では，現行の学習指導要領でも命題の逆に関する記述が全教科書会社にあり，その中で半分程度が反例の用語の紹介をしている。ただ，用語として紹介していない教科書会社も発展的に扱い，紹介し，反例という言葉は使わずに偽であることを証明するためには成り立たない例を一つ提示すればよいという記述はある。また，反例という言葉は出てきていないが，三角形の合同条件や平行四辺形になる条件のところで，反例を利用する考えをもとに条件についての吟味をしている。しかし，反例をもとに命題を修正させていく活動や数学的発見のための反例の使用という場面は，教科書では取り上げられていない。

1.3　本論文の研究課題と論文構成

現在，中学校での学習では，反例を利用した命題の修正に関する図形指導はあまり提案をされておらず，研究が不十分であると言える。そこで，以下のことを研究課題とし，研究を進めていくことにした。

1. 反例を利用した図形指導の先行研究をまとめ，問題点を明らかにする。
2. 反例を利用した授業の問題点を踏まえ，その問題点を克服する方法を提案し，その授業を考察する。そして，授業実践でその効果を明らかにする。

第２章　反例利用について

2.1　反例とは

反例の定義として，平成 29 年告示の中学校指導要領の解説では，『反例は，命題の仮定を満たしているが，結論を満たしていない例である。』と記述されている。反例の役割として，『証明の指導においては，命題が常に成り立つことを示すばかりでなく，常に成り立つとは限らないことも示すことができるようにすることが必要である。・・・(中略)・・・もとの命題が常に成り立っていても，その逆の命題が常に成り立つとは限らないことを確かめ，理解できるようにする』と記述されている。

I. ラカトシュ（1980）では，証明と反例の扱い方に関する事例研究について述べられている。その中で，研究の目的について『このケーススタディの核心は数学的形式主義に挑戦することにあるが，直接数学的独断論の究極的立場に挑戦しようとするものではない。非形式的・準経験的数学が議論の余地なく確立された定理の数的な単調増加によって成長するのではなく，思索と批判，証明と論駁による推量の不断の改良を経て成長するという点を練り上げることがささやかな目的である』と述べられており，反例の扱い方としてただ単純に命題を棄却するものとしてではなく，定理を洗練させるための扱い方を大切にする必要性を主張している。

このように，反例の定義としては，命題の否定

ということが強調されているが，役割としては否定するだけ以上のものがあると考えられる。そこで，次節からは反例を否定するだけのものとして扱っていない，反例を利用した学習指導についての先行研究についてまとめる。

2.2　反例を利用した学習指導に関する先行研究

2.2.1　大場史也(2014)による反例活用の分類

大場史也(2014)では，反例の活用方法として，これまでの先行研究を概観すると，

１．推測の真偽の判断とその説明に活用

２．学習の動機づけとして活用

３．推測や証明を再考・洗練する指針として活用

の３つに分類できるとしている。その中で，1点目と2点目については学校教育現場において浸透しているが，3点目に関してはうまく浸透していないと指摘している。しかし，数学的発見を伴い，主体的に問題を解決していく姿勢や命題を修正していくという活動は数学の活動として教育的意義は大きいと述べている。

2.2.2　小松孝太郎(2011)による演繹的推量による内容の増加の見解

小松孝太郎(2011)では，ラカトシュの考えをもとに論駁についての数学的探究とその教育的意義がまとめられている。これまでの先行研究では，ラカトシュ(1980)で述べられている“補題組み込み法”が強調されていると示している。

しかし，これだけでは他者の批判を受け止めて，自信の主張を制限する活動になっても，よりよい主張を打ち出す原動力にはつながらないとしていて，ラカトシュ(1980)の続きにも書いてある“演繹的推量による内容の増加”を加えることの意義について考察し，示している。

2.2.3　徳江政輝(2013)による反例利用の特徴からみた学習指導の枠組み

徳江政輝(2013)では，これまで行われてきた反例の学習指導についてまとめ，反例利用の段階を設定している。また，反例利用の特徴から見た学習指導の枠組みを設定し，数学的発見のための反例活用が学校数学においてどのように位置付けられるかについて考察している。

数学的発見の過程に着目すると，数学的知識を発見し証明されるまでの間に，反例による反駁が行われ，反例の特徴などから原推測を修正することにより新たな数学の知識が創造されることが多い。そこで，生徒の数学観の変容が期待し，このような数学的発見の過程を学校数学の中で取り入れることは有効であるかについて考察している。

そこで，数学的発見のための反例利用の学習指導についての以下のような授業実践を行った。

１．主問題を提示し，予想させる。

「平面Pについて，P上の点Aを通り，P上にない直線ℓについて，P上の点Aを通る直線mがℓと垂直であれば，Pとℓは垂直である。」これは正しいか。

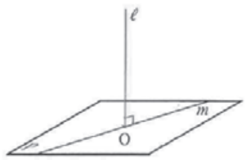


図１　主問題の図

２．予想を聞き，お互いの理由を説明させる。

３．主問題が正しくないというのが統一できたところで，主問題の性質は棄却するか確認をし，条件を変えることで正しくできないかを考えさせる。

４．修正すべき言葉について議論させ，その修正で本当に正しいか確認をさせる。

５．まとめ

最初の予想では多くの子が正しいとしていたが，より強い信念で正しいと思った生徒は少なかった。しかし，議論の中で予想何度か聞くことで，反例の提示につながった。また，主問題が正しくないという意見に固まってきたときに，「せっかく正しい場合があったのに・・・」ということを強調することで，生徒の「何か条件をつけたらうまくいくんじゃないか？」という修正に向かう場面を取り上げることができ，さらに，生徒の感想から，生徒の多くに数学観の変容を促す授業となったものと

捉えることができると述べている。

2.3　反例を利用した学習指導における課題

ここまでの先行研究において，反例を利用した学習指導の可能性や必要性が述べられている。しかし，これまでの先行研究を踏まえると，反例を利用した学習指導の課題として以下の 3 点が挙げられる。

- 高等学校での事例が多く，中学校数学での事例が少ない。
- 偽命題をつくることが難しい。
- 反例をあげる難易度が，証明をすることと難易度が変わらない。

第 3 章　動的幾何環境における反例利用について

3.1　動的幾何環境で可能になる学習

飯島康之(1997)では,「教科書の中で『動かすことを意図的に明示している問題』は少ないが,動かして調べる価値のある問題はかなり多い。つまり,静的か動的かというのは,図形の見方・考え方で変わり,多くの問題は動的に考えることが可能である」(p.33)と述べている。そこで,図形に対して 1 つのことを示して終わりではなく,動的に図形を見ることで様々な活動をすることができるのではないかと考える。

3.2　いろいろな観察を通した図形指導の効果

飯島康之(2018)は,学び合いに焦点を当てて,生徒に「大発見をしてほしい」ということ投げかけ,いろいろな発見の中から価値のあるものを見つけていくという愛知教育大学附属名古屋中学校での授業実践に向けた題材について述べている。

問題としては,3 点 A,B,C を動かしながら,「△ABC がこんなときにこんな関係がある」という大発見をしてほしいというものである。

①△ABC がある。

②3 つの辺のそれぞれを一辺とする正方形を△ABC の外側につくる。

③最後に隣の正方形の点同士を結ぶ(3 か所)。

そして,測定機能を利用するか,「二等辺三角形でないのに三角形の面積が等しくなる場合ってあるかな」と発問をするかを通して,「ここにある 4 つの三角形すべての面積が等しい」という大発見につなげていくとしている。

この活動により,特殊な状態での性質について考え,さらに一般に成り立つことへと自然と移行することが想定でき,学力が高い生徒が発見しやすいということではなく,柔軟な発想で動かすことが重要なため,多くの生徒に手がかりを見つける機会があると述べられている。また,自分たちで見つけた命題によって,真偽があいまいではあるが,証明をしたいという原動力になることが期待できるとしている。

3.3　動的幾何環境での反例利用の学習指導の有用性について

これまでの先行研究で述べられているように,動的幾何環境においては様々な活動をすることが期待できるが,その中でも,「多くの観察をする中で,いろいろな発見をすることができる」ことが可能になることがわかった。そのうえで,反例利用での授業実践での 3 つの課題をクリアする可能性があると感じる。

1 つ目の課題である「高等学校での事例が多く,中学校数学での事例が少ない。」については,中学校の教科書に載っている静的にしか見ていない図について動的に見ることによって,様々な発見をすることができると考えられる。

また,2 つ目の課題である「偽命題をつくることが難しい。」については,動的幾何環境においていろいろな発見をする中で,個人で棄却できる下位の偽命題,班で棄却できる中位の偽命題,クラス全体で棄却できる上位の偽命題が考えることができる。

3 つ目の課題である「反例をあげる難易度が，証明をすることと難易度が変わらない。」については,静的幾何環境とは違い，動的幾何環境においては感覚的に反例を探すことができるので，反例を見つける難易度はかなり下がると考えられる。

第 4 章　動的幾何環境における反例を利用した学習指導の授業構成

4.1　反例を利用した学習の提案

動的幾何環境における活動での良いところは，命題を発見するという活動が簡単になることと反例を発見するという活動が簡単になることがある。そのため，たくさんの命題を発見でき，その真偽判定のために反例や命題にあてはまる例をたくさん見つけることができる。そこで，そのたくさん発見することができる命題について，どのように反例が使われるのかについて，分類をする。

命題に対してどのように反例を利用しているのかについて，次節のように反例を再分類した。

4.1.1　命題の棄却あるいは制限のための反例

命題の棄却あるいは制限のための反例では，命題（仮定 P⇒結論 Q）があるときに，仮定 P を満たしているが結論 Q を満たしていない反例を見つけ，命題を棄却して新しい命題を見つけるあるいは命題の範囲を狭めるために反例を利用している。

命題に対しての反例の利用の仕方として，一番多いものである。予想した命題について，反例が見つかりその命題を棄却する。そして，その反例をたくさん並べることによって，新しい命題を発見することができる。

そのため，この反例の利用は，個人の思考する中でたくさん表れ，敷居が低い活動といえる。たくさんの命題を発見できる動的幾何環境での学習の中では，生徒の活動がしやすいと言える。しかし，動的幾何環境の場合，反例を見れば命題の棄却は明らかであるため，班や教室全体で議論する必要はなくなる。

4.1.2　命題の証明への反例

命題の証明への反例では，命題（仮定 P⇒結論 Q）があるときに，それを正しいとする証明を否定する例を見つけ，証明を修正していくために反例を利用している。

命題について反例が上がらないので，真であるとして証明をしているが，その証明についてはある特定の図でしか言えない場合の証明になっているときに，その証明への反例をあげて，その証明を棄却したり，修正したりする。中学生にとって，証明について場合分けをする必要性だったり，特定の図だけでなく一般的な図での証明の必要性だったりは感じづらいので，この活動を通して，必要性を実感させることができる。また，証明の場合分けではなく，どんな状況でも真であると言える証明を考える原動力にもなると考える。動的幾何環境での活動によって，特定の図だけで見るという固定観念も崩すことができると考える。この活動は，個人では反例を見つけようとしないので，班や教室全体で扱って考えていくのに適していると考える。しかし，証明を理解しないとそのあとの証明への反例を見つけるという活動に参加できないことは課題である。

4.1.3　命題そのものへの反例

命題そのものへの反例では，命題（仮定 P⇒結論 Q）があるときに，仮定 P を満たしているが結論 Q を満たしていない反例を見つけ，命題を修正していくために反例を利用している。

命題を発見した中で，いつも成り立つ命題と特別な場合に成り立つ命題に分類する。その特別な場合に成り立つ命題について，反例をあげる中で，命題の仮定の修正をしたり，命題の結論を修正したりすることで，数学を創り上げる体験をすることができる。

反例の活動としては，個人で考える中で利用するというよりは，班で言語活動をする中で議論するべき内容である。教室全体での議論にも値する内容になっている。課題としては，命題の修正する部分が，考えるハードルが高いところである。ただ，動的幾何環境で扱っているため，命題の発見や反例の発見はしやすいので，活動への取り組みはしやすいと感じる。

4.1.4　逆も成り立つ命題に拡張する反例

逆も成り立つ命題に拡張する反例では，命題（仮定 P⇒結論 Q）があるときに，仮定 P 以外の仮定 R

の時に結論 Q を満たしている例を見つけ,命題を修正していくために反例を利用している。

命題として，いろいろなものを発見して，その真偽について考える。その中で，逆の関係について注目して，逆も成り立つ命題に修正する活動を通し，本質的な関係性について考えさせることができる。命題の逆について自然と触れることができる題材は，中学校の教科書では三角形の合同条件と平行四辺形になる条件に限られているため，この事例のように動的幾何環境かで見ていく中で，自然と逆の必要性を感じることができることはよい点である。また，反例を発見することも動的幾何環境かのため簡単になるので，その後の証明への原動力とすることもできると考える。

4.2 「逆も成り立つ命題に拡張する反例」の利用に関する授業構成

反例を利用したそれぞれの活動が，授業を行っていく中で個人活動，班活動，教室全体で行われている。そして，一つずつの活動を通して，反例の必要性を感じることができる。その中で，中学生が証明することへの原動力とするためと多くの生徒が活動に参加できるようにするための反例の活動が最も重要と考える。

そこで，証明をするための原動力になるためには，命題や反例が見つけやすいだけでなく，驚きのある命題や反例である必要があると感じる。「命題の棄却あるいは制限のための反例」と「命題の証明への反例」は，命題や反例は見つけやすいが，驚きには欠けてしまう。「命題そのものへの反例」と「逆も成り立つ命題に拡張する反例」は，条件を満たしている。多くの生徒が活動に参加しやすいのは，反例が示しやすかったり，反例によって修正がしやすかったりする必要がある。「命題そのものへの反例」は，内容として驚きがあるが，命題への修正のところでは，反例から導くときに難易度が高いと考える。「逆も成り立つ命題に拡張する反例」の場合は，反例を列挙する中で共通点が見つけやすく，逆を考えているため，命題の修正がしやすいと考える。

そこで，反例の利用の活動の中で，中学生が取り組みやすく，証明するための原動力になる活動として，4つ目の分類である「逆も成り立つ命題に拡張する反例」についての授業構成について考え，その実践について考察していく。

第5章　反例を利用した学習の授業実践について

5.1　教材と指導計画

○単元：啓林館　中学3年生　5章　図形と相似

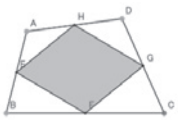
○本授業のねらい

図形を調べて分類をさせていく中で，仮命題を生徒がつくり，その命題について検証をさせる。その後，その命題の逆を考える状況を与え，その命題の逆が成り立たない例（反例）に気付かせる。そこで，形での分類ではなく，本質的には図形の性質による分類が必要だと感じさせたい。また，性質でみるという視点の大切さを理解させ，自分で見いだした性質を反例によって，一般性の高い命題に洗練させる力をつけさせたい。

○授業の流れ

1．提示課題の図形を各自書き,提示課題の結果を予想する。

四角形ABCDの4つの辺の中点を E,F,G,H とし,それらを結んで四角形 EFGH をつくった図である。このとき,四角形 ABCD の4つの頂点を動かしたときに,四角形 EFGH がどう変化するか考えよう。



◇めあて「2つの四角形の関係性を探ろう」

2．四角形 ABCD と四角形 EFGH の関係性を探る。

3．わかったことを全体で共有する。

◎　対応表

四角形 ABCD	四角形 EFGH
正方形	正方形
長方形	ひし形
ひし形	長方形
平行四辺形	平行四辺形
台形	平行四辺形, ひし形
一般四角形	平行四辺形

４．四角形ＥＦＧＨが正方形の場合に注目して，四角形ＡＢＣＤが正方形のとき以外に，正方形ＥＦＧＨが正方形になるときはないのか考える。
５．四角形 EFGH が正方形になる条件について考えさせる。
６．反例をもとに，「正方形」になるときの共通点を考える。

5.2　考察

(1)動的幾何環境における観察による推測の発見について

授業の導入では，紙とペンを使用して，実際の図を描く中で問題設定を理解させた。その後，今描いた図の特徴を考え，全体で共有をさせた。このときに描いた図は，それぞれ異なっていたが，長方形や台形などの名前をつけることができる特殊な状態の四角形ばかりだった。その後，名前をつけることができる図以外も含めたいろいろな図を比べることで，今回図の特徴を推測するために，動的幾何環境でこの図を見ることにした。

今回は 1 班 3 人にして，班に 1 台タブレットを渡し，活動をさせた。今回は，人数が少なく 2 班しかつくることができなかったが，その 2 班とも違った活動をしていた。

1 つ目の班は，外側の四角形の形と内側の形の対応について考えていた。そこで，外側を正方形や長方形などの名前の付けることができる四角形に対応して，内側がどのように変化するのか実際に図を動かしながら，推測していた。その中で，外側が名前のつかない四角形の場合については，内側は特に名前がつかないと推測していた。

2 つ目の班は，長さについて調べたり，外側が特殊な図形ではなく一般的な四角形の場合にどんな特徴があるのか調べたりしていた。まずは，内側にできる四角形は外側にできる四角形の対角線の半分の長さになることを図を動かすたびに定規で長さを測ることで観察することで，推測をしていた。また，外側の図形を自由に動かしていく中で，内側の図形の特徴を観察し，内側が必ず平行四辺形になるのではないかと推測した。

今回の動的幾何環境における観察により，多くの推測を見つけることができた。また，観察すれば当たり前の推測や逆が成り立たない推測，一般性のある推測など重みの違う推測をいくつも発見することができた。

(2)予想を取り入れた真偽判断

各班で動的幾何環境における観察をすることで見つけた推測に対して，図を動かすことで真偽判断をしていた。しかし，両班ともに偽となる命題がなかったため，特にこの活動によって変化はなかった。

動的幾何環境によって，観察を通しての真偽判断はしやすかった。その反面，推測をする中で反例も見つけやすくなったため，偽になりそうな推測も観察の中で棄却されてしまった。

(3)反例による命題の棄却について

(2)と同様に偽となる推測がなかったため，班の中では推測の棄却は起きなかった。そこで，教師からゆさぶりをかけた。各班の観察から見つけた推測を全体で共有して，その一つ一つについて考えた。その中で，外側と内側の図形の関係性に注目させ，外側が正方形と内側が正方形について取り上げ，「内側が正方形になったとき，外側は必ず正方形になった？」と生徒役に投げかけた。そして，反例を見つけさせて，この関係性について深めていく予定だった。しかし，実際に反例を見つける活動の中で，反例を見つけることができなかった。そこで，反例を全体に提示して，反例を実感させ，その図以外の反例を見つけさせた。そこで，たくさんの反例があることを見つけて，内側が正方形のときに，外側が正方形になるという推測は棄却された。

(4)反例をあげることによる規則の発見と命題の逆もなりたつ命題への修正について

反例をみつける活動に時間がかかってしまい，この以下の活動を行うことができなかった。実際

の授業であれば，次時に続きを行い，反例をあげていく中で推測の修正をさせたが，今回は行うことができなかった。

第6章　まとめと今後の課題

6.1　研究のまとめ

〇研究課題1について

第2章で，大場史也，小松孝太郎，徳江政輝の研究を基に，反例を利用した図形指導の先行研究をまとめた。

大場史也(2014)が述べている「推測や証明を再考・洗練する指針としての活用」を研究しているものは多くあるが，その多くは高等学校の事例ばかりで，中学校の内容のケーススタディが少ないということを述べた。

また，徳江政輝(2013)が述べている授業過程は大場の3点目に関して具体化していると考えられるが，以下のような課題があることを述べた。

・中学校数学において数学的発見の過程を取り入れた授業を行うに適した教材がなかなか存在しない

・生徒の理解しうる定理や性質の一部を変えて偽命題化する工夫は，非常に困難である

〇研究課題2について

第4章と第5章では，反例を利用した授業を動的幾何環境の中で行う授業過程を考え，その授業過程を踏まえて教材開発を行った。コロナ禍のため中学生相手の授業実践を行うことができなかったが，数学以外の教科の教師を対象とした実践を通して，動的幾何環境で実践を行うことにより，多くの観察を通して推測を容易に見つけることができ，その中で自然と反例を利用することができることが明らかになった。

6.2　今後の課題

1　反例を利用した命題の修正から証明までの授業の構成について

今回の実践では，反例を見つけて推測を棄却するところまでしかできなかったそのため，その反例の中から規則性を見つけることができることを実践で考察することができなかった。

2　複数の学年・単元に応じた教材化の具現化

今回の扱った教材は，中学3年生で扱う内容であった。しかし，反例は中学2年生で導入する内容となるので，中学2年生でも扱える教材の具現化が課題である。

＜参考・引用文献一覧＞

I.ラカトシュ著　佐々木力訳(1980).数学的発見の論理―証明と論駁―.共立出版.

飯島康之(1997).『GCを活用した図形の指導』.明治図書

飯島康之(2018).GCを使った「学び合い」の授業のための教材研究の一例－12/6のGC活用研究会(松元実践)に向けてー.イプシロン60,pp.7-16.

大場史也(2014).反例を活用した問題解決活動に関する一考察―「ビリヤードの問題」を事例として―,日本数学教育学会　第47回秋期研究大会発表集録,pp.85-88.

岡部恒治他(1985).『反例からみた数学』.遊星社

川崎市総合教育センター(1995).『算数・数学コンピュータ教育利用研究会議　発表資料』.川崎市総合教育センター

国立教育政策研究所教育課程研究センター(2019).『平成31年度全国学力・学習状況調査解説資料中学校数学』.国立教育政策研究所

小松孝太郎(2011).ラカトシュの可謬主義から見た数学的探究とその教育的意義 : 証明に焦点を当てて,科学教育研究 35(3),pp.272-286.

徳江政輝(2013).中学校数学における反例の学習指導に関する研究,奈良教育大学大学院教育学研究科平成24年度修士論文.

藤岡祐紀(2012).作図ツールをグループ活動に利用した授業に関する研究―Geometric Constructorを利用した授業を中心に―,愛知教育大学大学院平成23年度修士論文.

文部科学省(2018).『中学校学習指導要領解説数学編』.日本文教出版