

# 英語でやったら見えてきた「数学的な表現力」の一考察

## －対角線が通るマスの数の規則性は？－

数学科 増田 朋美

現在、高等学校の数学教育には、根拠を明らかにし、筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりする学習活動を充実し、数学的な思考力・判断力・表現力の育成を目指すことが求められている。

本稿では、これらの力の育成のため、昨年度に実施した教材とその実践をまとめる。英語で与えられた問題を協働で解決する今回の実践の中で、生徒の「数学的な表現力」の課題は、アウトプットする段階のみならず、問題を理解する段階にもあることがわかった。

<キーワード> 数学的な表現力 問題解決学習 英語で学ぶ数学

### 1. はじめに

現在、高等学校の数学教育には「根拠を明らかにし、筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実」し、数学的な思考力・判断力・表現力を育成することが求められている。特に、新学習指導要

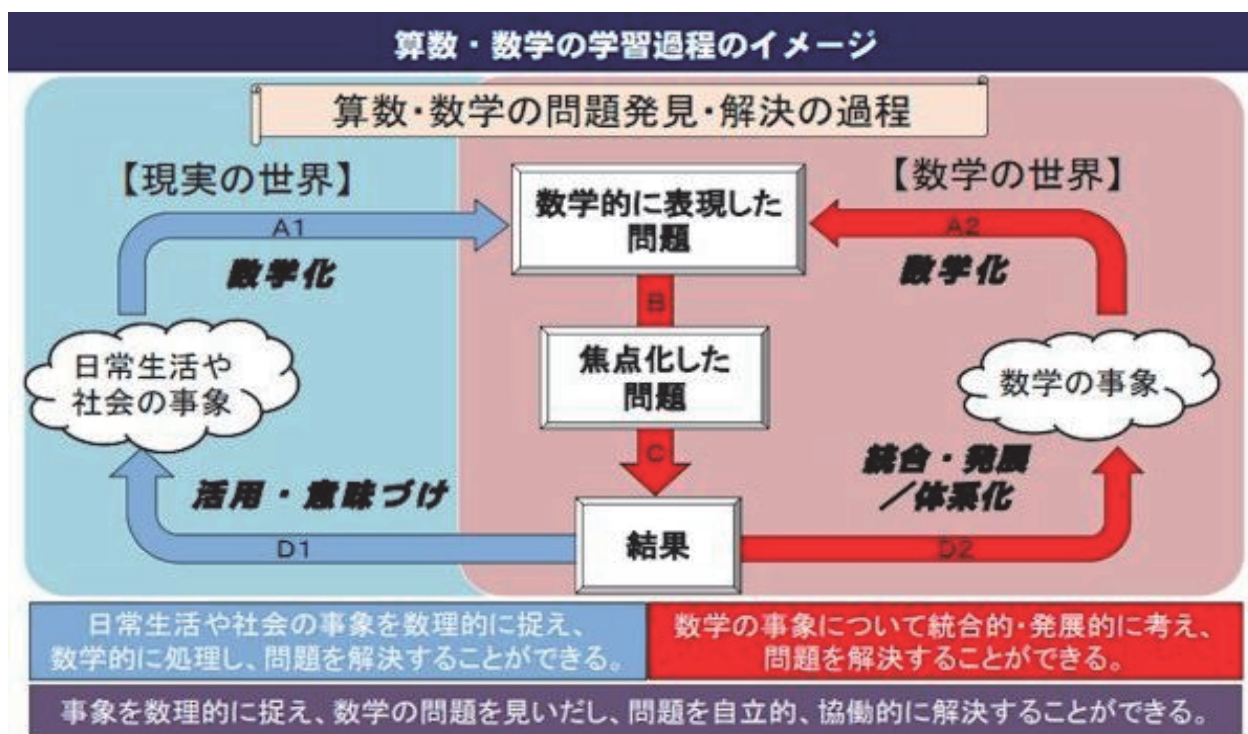


図 1 算数・数学の学習過程のイメージ

領には、図 1 のように算数・数学の学習過程をイメージし、「日常生活や社会の事象、数学の事象から問題を見出し、数学的に表現・処理して問題を解決するなどの数学的活動を充実（文部科学省、2018）」することが明記されている。

筆者は、これらの学習活動を充実し、数学的な思考力・判断力・表現力を育成するため、これまでプロジェクトベースの問題解決をするコンテストを活用したり、独自教材を開発したりして実践を重ねた。確かにその意義を目の当たりにしたが、同時に生徒の「数学的な表現力」には課題があると問題意識を持った（増田、2020）。本研究は、問題解決を通して、数学的な思考の過程や判断の根拠を表現する力をつける教材開発を目的としており、本稿では昨年度に実施した教材とその実践の概要を発表する。

## 2. 実践とその分析

本教材「Diagonals of a Rectangle」は、2020 年 2 月に 2 年と 3 年の文系クラスで実践した。これは、「Thinking Mathematically (2<sup>nd</sup> ed.)」の一題であり、問題は英語のまま、アレンジして提示した。

実施日時：2020 年 2 月（2 時間）

実施クラス：2 年文系 2 クラス，3 年文系 2 クラス

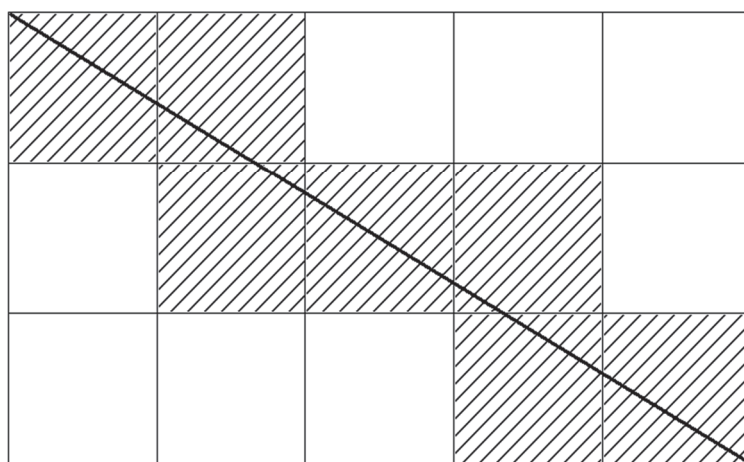
出典：Mason, J. 「Thinking Mathematically (Second Edition)」 Pearson Education Limited

使用可：辞書・電子辞書

### (1) 課題と学習活動の概要

#### 課題 1

On squared paper, draw a rectangle 3 squares by 5 squares, and draw in a diagonal. How many grid squares are touched by the diagonal?



## 課題 2

### 【Entry】

What is meant by touched? You decide!

Specialize. Be systematic.

### 【Attack】

Obviously, you can do it by counting, so generalize!

Focus on just the horizontal grid lines. Make a table.

Look for a pattern. Check it!

### 【Extend】

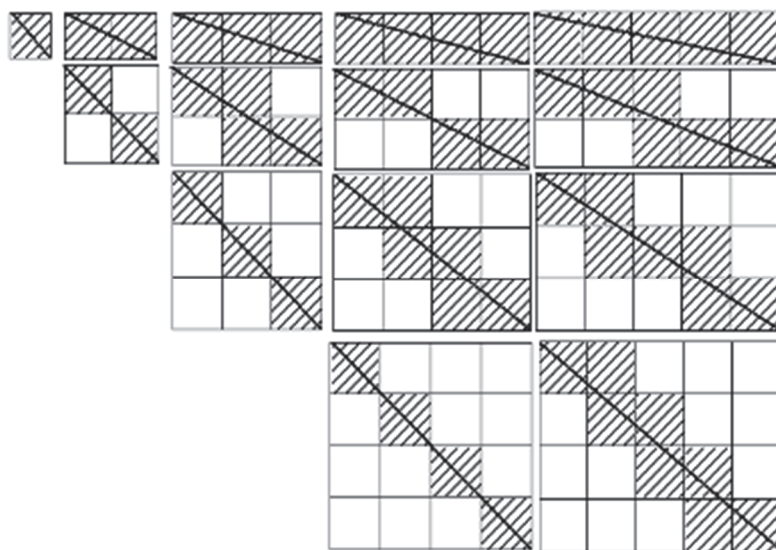
What if the rectangle is divided into rectangles?

What about three dimensions?

What if the grid lines are not equally spaced?

## 課題 3

通るブロックの個数の規則性を考えよ。



### (2) 授業展開 (50 分授業 \* 2 時間)

課題 1 の内容理解 (個人) : 5 分

全体で共有 : 5 分

課題 2 の内容理解 (ペアワーク) : 15 分

全体で共有 : 15 分

課題 3 【課題 1 を一般化】 の解決 (個人→ペアワーク→全体) : 60 分

授業では、まず課題 1 の問題の内容を理解させ、本時の目標を確認した。次に、時間制限を設け、ペアで協働して課題 2 の内容把握をするように伝えた。ここでは数学的な問題解決の手法や取組み方 (Entry→Attack→Extend) を共有した。この後、個人→ペアで考える時間を持ち、縦横のマスの数



が異なる様々な図を使って、通るマスの個数の規則性を考えた。結論にいたらないペアが多かったの  
でヒントを与えながら全体で共有し、クラスの協働でなんとか問題解決できた。

## (2) 実践と考察

### 考察①「生徒の課題解決（表の作成→一般化）」

多くの生徒が、**課題2**の【Attack】“Obviously, you can do it by counting, so generalize! Focus on just the horizontal grid lines. Make a table. Look for a pattern. Check it!” を実践できた。

図2-1は、縦横のマスの数で表を作り、図2-2は場合分けをして一般化を目指している。図2-3は縦横のマスの数の和から引く数の一覧を作成した。図2-4は、数の変化から規則性を探している。図2-5は、（縦のマスの数）+（横のマスの数）-（最大公約数）=（通るマスの個数）の正解に至った。

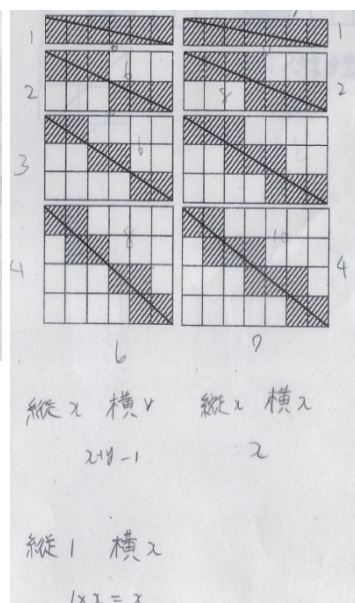


図 2-1

図 2-2

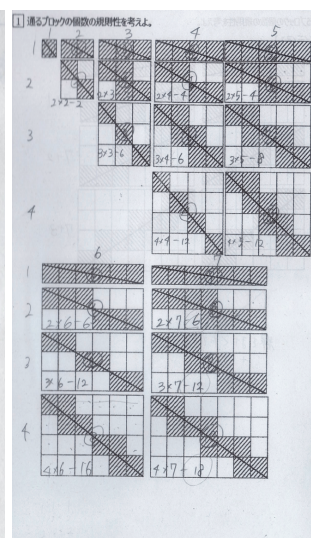


図 2-3

図 2-4

図 2-5

### 本問の解答

縦のマスの数を  $m$

横のマスの数を  $n$  とすると

$$m + n - \gcd(m, n)$$

(gcd : 最大公約数)

## 考察②「訳から見える数学的表現」

授業での発表やワークシートからは、生徒が数学の事象や用語の定義を曖昧にしたまま問題を讀んだり、表現したりする実態が見えた。例えば、「四角形のなかに  $3 \times 5$  の正方形に線を引いて。いくつの正方形にふれていますか？（図3）」のような表現である。生徒は、言葉だけでなく、図を手掛かりに理解し考えているので、使っている言葉（訳語）に対して違和感を覚えていないかもしれないが、本来「四角形」は「長方形」、「線」は「対角線」のように、表現すべきであった。生徒は、「定義された数学の用語を正しく使えば、問題や事象が一意に定まる」といった意識が低いことが実態として明らかになった。なお、方眼紙（squared paper）は、縦横に直行した直線によってマス目が作られた用紙であり、今回この実践ではこの正方形を「マス」と呼ぶ。

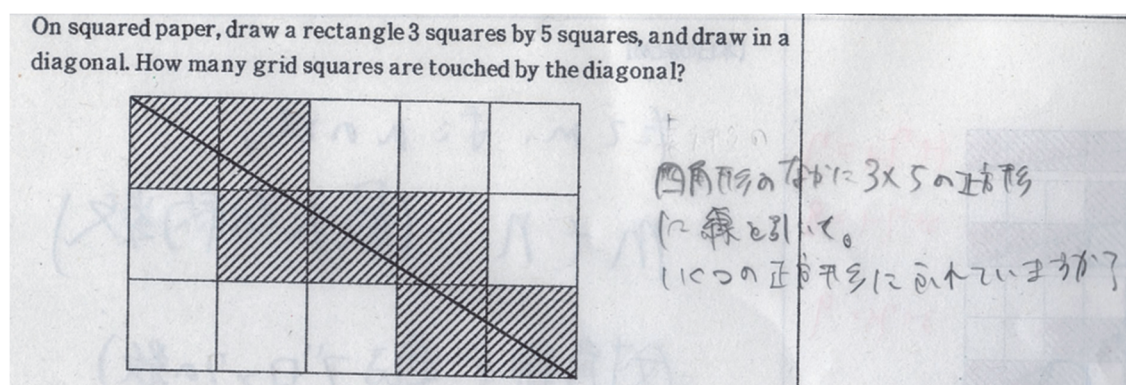


図3 生徒の数学的表現

他にも、次のような訳で、生徒の数学の用語を使って表現する意識の低さが見て取れた。

- Diagonals of a Rectangle（長方形の対角線）≠ 斜めの四角形
- Make a table（表を作れ）≠ テーブル（または目録）を作れ
- three dimensions（3次元）≠ 寸法 大きさ 範囲 面積
- horizontal grid lines（水平の格子線）≠ 対等なライン
- Attack（始めよう、とりかかろう）≠ 攻撃
- Be systematic（体系的に）≠ 組織的な
- Specialize（特殊化する、研究する）≠ 専攻する
- Obviously you can do it by counting, so generalize！（一般化する）≠ 引き出す 概括する

## 考察③「Extend するなら？」

課題2のステップの通り、最後は生徒に「【Extend】するなら何を考えるか。」を問い、ワークシートに記入させた。下記は回答の一部である。

- 正方形を平行四辺形にする。
- 大きさがバラバラのブロックでも一般化できるか。
- 立体で考える。
- 対角線を2次関数などの曲線にしてみると通るブロックの数は？
- 色がついた部分の面積は？
- 対角線が通っていないマスの数を一般化せよ。
- 対角線で区切られた片方の三角形内にある点の数→2次関数になる？

このような数学らしい発展・応用の例の他に、次のような日常生活に応用するアイデアもあがり、興味深かった。

- 電柱から電線を斜めに各家に引くとき、どれだけの家に電気を通せるか。
- 板チョコを対角線で切ったら何枚割れるか？
- 長方形の会場でコードを使うとき、いくつ座席を外さなければいけないか計算できそう。
- いくつ小さなマットがあったら安全か。(図4)

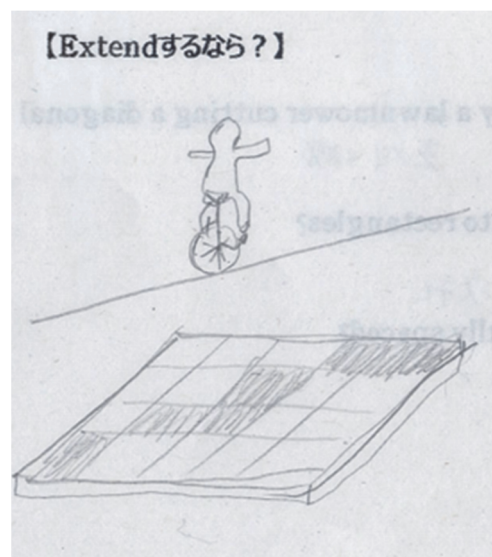


図4 生徒がワークシートに書いた挿絵

### (3) 生徒の感想の一部

- 規則性を見つけることは難しかったです。友達と表を描いてみたけどわからずでした。塗り分けで“最大公約数”という数字を使うことがわかったとき、とてもスッキリしました。知識はあるものの使いどころが謎なものもよくあるので使えるところを探してみるの面白かったです。
- 数学の問題というよりは、数学の知識を使って解く思考力や発想力の問題だと思いました。
- 難しかったけど、わかったときは面白いと思った。英文の解釈も難しかったけど、単に英語を学ぶより、はるかに意欲的に学べた気がした。
- いつもとは違った感じの授業で周りの人と協力しながら解いていくことが新鮮でよかった。
- 身近なところにも数学を使った面白いカラクリが隠されているのだなと感じた。

## 3. まとめと今後の課題

今回の実践では、生徒たちはクラスメートとの協働や英語で問題を与えられることの新しさに楽しんで問題に取り組んでいた。特に、受験真只中(2月)の3年文系のクラスでの実践は、意外とよい雰囲気での実践ができたと感じている。確かに昨年は、コロナの感染拡大の影響もあって、「協働的」な学びには制約があった。学校生活そのものが不自由に制限される中で、友達と言葉を交わしながら試行錯誤する学習は楽しかったのだろう。特に、問題を英語で与えたので、生徒はいつも以上に丁寧に問題を読んだし、丁寧に読んだその過程を生徒と共有できた。また、生徒は、今回の授業を通して、探究活動や問題解決の数学的な思考の仕方の一つである【Entry】→【Attack】→【Extend】を理解した。特に、【Attack】で、表をつくることやパターンを見つけることを具体的に示したことで、普段、難しい問題は眺めるだけで終わってしまう生徒も手が動いたと感じる。また、【Extend】では、日常生活に応用する面白いアイデアが出た。

一方、この実践の中で、筆者は、数学の定義に基づいて問題を理解することや表現することに意識が不十分な生徒が多いことに驚いた。今回、辞書(電子辞書)の使用を認めていたので、単語を調べれば、対訳のひとつとして、数学的な表現・用語もあるはずである。筆者は、普段、定義や一般化することをこだわって授業をしてきたつもりだったが、生徒の日本語訳は想像以上に数学的な表現に無頓着であった。英語から日本語に置きなおす過程を共有したことで、数学用語や数学の定義を普段どれだけ意識せず問題に取り組んでいたかを再認識できた。今回の実践で、生徒の「数学的な表現力」は、アウトプットのみならず、問題を理解する段階にも課題があるのではないかと新しい仮



説ができた。

「事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能は、数学的な概念や原理・法則と一体的なものとして学ばれるものである（文部科学省、2018）」ことに留意して、継続的な指導をしていく必要性を感じた。「数学的な表現力の向上」に注視して、新たな実践をすることが、今後の課題である。

## 附記

本稿は、日本数学教育学会第 103 回全国大会（埼玉大会）での発表資料に大幅に加筆・修正したものである。

## 参考・引用文献

- 文部科学省(2018).「高等学校学習指導要領解説 数学編理数編」  
増田朋美(2020).「数理コンテスト『A-lympiad』を利用した問題解決の実践 - 学力の三要素のバランスの良い育成を目指して -」愛知教育大学附属高等学校研究紀要第47号pp61-70  
増田朋美(2021).「英語でやったら見えてきた「数学的な表現力」の一考察ー対角線が通るマスの数の規則性は?ー」日本数学教育学会第103回大会発表要旨集（埼玉大会）pp420  
J.Mason.et al (2010). "Thinking Mathematically Second edition" Pearson Education Limited

## 謝辞

本研究の一部は令和 3 年度科学教育研究費奨励研究(21H03969)の助成を受けています。