

# 数学的モデル化を通じた現実的文脈に則した意思判断ができる生徒の育成

教科指導重点コース（理数・自然科学系）

氏名：岩橋 和輝

## 1 研究を深めたい教育課題

### （1）研究の背景

高等学校学習指導要領解説 理数編（平成30年告示）において、中学校では「数学的な表現を用いた理由の説明」に課題が見られ、高等学校では、「数学の学習に対する意欲が高くないこと」や「事象を式で数学的に表現したり論理的に説明したりすること」に課題が見られると述べられている。また数学教育の意義として「実用的な意義」、「陶冶的な意義」、「文化的な意義」の3つが挙げられていた。

- ・実用的な意義：数学は社会や生活の中で重要な役割を果たしており、数学を活用して学ぶことは、よりよく生きる知恵を身につけることにつながる。
- ・陶冶的な意義：客観的かつ論理的に自分の考えなどを説明する力が育成され、このような力は他教科などの学習や社会生活などでも大いに役立つ。
- ・文化的な意義：数学は人類が生活や社会を発展させる中で継承され発展してきたものであり、我々もその発展に寄与することが重要である。

これらの意義を踏まえ、社会や生活との関連を重視した学習をすることで、数学の学習に対する関心や意欲が高くない生徒にも数学を学習する意義を認識させ、意欲を高め数学的な力を伸ばすことにもつながると述べられている。

### （2）数学的モデルについて

三輪(1983)は、モデルを「理論からモデル」の方向と「事象からモデル」の2つの方向で捉え、後者について「モデルは、その働きから見れば、未知の事象を探求したり、あるいは、それを説明したりする役割をもっていて、事象に対する洞察ないし理解、あるいは、そこに見出される問題の解決に大きく貢献する」(p.118)と述べられている。

また西村(2001)は、「数学的モデルはモデルの部分集合であり、数学的表現を主な表現方法としているものと捉え、数学的な表現として、数値的表現、グラフ的表現、代数的表現、幾何的表現がある」(p.2)と述べている。そして、数学的モデルを「事象を、ある目的に従って、数学的な処理が可能な、数値的表現、グラフ表現、代数的表現、幾何的表現によって表したモデルである」(pp.2-3)と定義している。数学的モデルの中には、数学的概念や数学的理論に対するモデルもある。しかし、西村(2001)は「現実事象を扱うことにより、数学の有用性や意義を感得させることを考えてい

る」(p.3)場合は、数学的概念や数学的理論に対する数学的モデルは除いて考えている。

### （3）数学的モデル化過程について

三輪(1983)は、数学的モデル化過程で次の4段階を踏むことになると述べていた。

- (1) その事象に光を当てるように数学的問題に定式化する（定式化）。
- (2) 定式化した問題を解く（数学的作業）。
- (3) 得られた数学的結果をもとの事象と関連づけて、その有効さを検討し、評価する（解釈、評価）。
- (4) 問題のより進んだ定式化をはかる（よりよいモデル化）。

三輪(1983)は、(1)～(3)で、過程が一応完結するのであるが、(3)で行った評価の結果を踏まえて、いっそうのモデルの改良を求めて再び(1)～(3)を繰り返すというスパイラル的發展を(4)で表した。また(1)の定式化では、熟考したうえで関係のうすい細部を無視ないし省略することが必要であるし、それに基づいた適切な仮定を設定しなければならない。そのため、この4段階で(1)が最も困難かつ重要だと述べていた。

### （4）数学的モデル化を指導する理由について

数学的モデリングを指導する理由を池田(2006)は、数学教育の意義に則して「形成的理由」、「実用的理由」、「文化的理由」の3つにまとめていた。

また、三輪(2004)は、「数学的モデル化の過程が、現実の問題との取り組みであることから、知的好奇心をこえて数学教育に対する動機づけを与えることが出来る」(p.224)と述べていた。一方、服部(2018)は、数学教育における批判的思考力を「与えられた事象について、数学的知識や数学的推論等を駆使してその妥当性や信頼性を正しく判断しようとする能力と積極的な態度」(p.51)と定義し、これらは数学的モデル化過程で育成、発揮されると考えている。

これらのことから筆者は、数学的モデル化を指導することで、数学を学ぶ意義や社会での有用性を伝えることができ、学習指導要領と同様に数学の学習に対する関心や意欲が高くない生徒に対しても、意欲を高め、数学的な力を伸ばすことにつながると考えた。特に、現実的な妥当性や、現実的文脈に則した意思判断に重点をおき、生徒が現実と数学を相互に関連づけられるよう実践していく。そして、数学的モデル化過程の中で、批判的思考力や数学的な表現を用いて理由を説明する力、事象を式で数学的に表現することや論

理的に説明する力の育成が可能であると考えた。

### (5) 数学的モデル化を指導する上での課題

まず、受験との兼ね合いが問題である。多くの生徒、特に3年生は受験を意識して授業に臨んでいる。しかし、数学的モデル化の活動の中で、「受験に使えない」と生徒が感じ、意欲がわかない可能性がある。しかし、センター試験が大学入試共通テストに変更されたことなど問題が日常事象を意識したものに変化していくことは期待できるため、中学・高校生の意識もともに変化していくことに期待したい。

次に、難易度が高いという点である。数学的モデル化過程の(1)定式化のような高度な技能が必要となるため、生徒にとって難易度が上がってしまう。

そして、生徒は文章題などを解いた際、数学的に正しければそれでよいと考えている。数学的に得た結果を現実的に妥当であるか確認するように、生徒自身が数学的モデル化過程のサイクルを回していけるようにする必要がある。そのために数学的文脈と現実的文脈を照らし合わせて妥当性を確認するような授業を行う必要がある。

## 2 教師力向上実習に向けた実践研究課題

### (1) 研究の目的

本研究の目的は2つある。1つ目は、数学科の授業において、日常生活や社会の事象を数学的に捉え、生徒に数学の意義や有用性を感得させ、数学に対する意欲を高めることである。そのために、扱う題材や発問を工夫し、現実的側面を考える場面を設け実践していく。2つ目は、現実的文脈の妥当性を確認させることで、数学と現実を相互に関連づけ、現実的文脈に則した意思判断ができる生徒の育成を目指すことである。

### (2) 手立て

まず、数学的モデル化の授業を行う上で、数学的モデル化過程の(1)~(3)を充実させることが大切である。(1)~(3)のスパイラルを繰り返し、スパイラル的發展である(4)につなげていく。これらを実現するためには、以下のことが重要であると考えられる。

#### ① 教材開発

数学的モデル化を行う上で、最も重要であるのが「教材開発」である。この教材が、生徒にとって、「難しすぎるもの」や「文脈のないもの」では好ましくない。一方で、教師が難しさを回避するために仮定に手を加え、単純な問題にしてしまうと現実的に意味がないものになってしまう。そのため、バランスを見極めることが重要である。特に、実践後半では価値観などを踏まえることができる問題を作成し、数学と現実の文脈を照らし合わせて、生徒に現実的文脈に則した意思判断を促す。これにより、数学と現実を相互に関連づける意識を育てていく。また、西村(2001)は、「日常生活や身の回りのもの、新聞、テレビ番組等で最適化、予測、運動・軌跡、測定・測量、順序・分類、実験の

解析といった目的を内在するものはないかを見直す、あるいは常にそういう眼をもって物事をみることにより、題材をみつけることができる」(p.5)と述べている。

#### ② ワークシートの充実

ワークシートを充実させ、数学的モデル化過程の(3)を充実させることを期待したい。ここでは、「どのように考えたか」「大切にすることは何か」などの記述を重点的に書かせ、モデルを解釈、評価させる。そして、数学的モデル化過程(1)~(3)スパイラルをワークシートという形に残しておく、生徒の考えの変容を追う。

#### ③ 考えや振り返りの共有

授業の中で、モデルについての評価、解釈を他の生徒と共有し、さらにモデル化に取り組むことで、モデルのよりよいモデル化を期待できる。振り返りを共有により今後のモデル化への発展につながる機会とする。

## 3 授業実践① (教師力向上実習I, 基礎)

### (1) 実践対象

常滑市立A中学校 第1学年-1学級 31名

### (2) 実践日

2020年 10月29日

### (3) 実施単元

比例・反比例

### (4) 授業の実際

図1のルールを提示し、カードゲームを行った。

- ・山札カードは机におき、手札カードは1セットは自分がもち、もう1セットは相手が持ちます。
- ・山札カードには、比例定数・表・グラフが書いてあります。手札には式カードがあります。
- ・「せーの」のかけ声で山札からカードを引き、そのカードに適する式カードを先に手札から出しましょう。そのとき、相手になぜその式カードになるのか説明し、相手が納得したら勝ちです。
- ・山札がなくなるまで繰り返しカードを引き、多く勝ったチームの勝利です。

図1 カードゲームのルール

ゲームを2回行った後、ワークシートを配り、勝つポイントを書かせた。勝つポイントは生徒が考えを整理しやすいように「表カードがでたとき」「グラフカードがでたとき」「その他」と項目を作った。勝つポイントを記入させた後、発表させ他の生徒と共有させた。その後、対戦相手を変え再度ゲームを行った。ゲームを行った後、さらに勝つポイントを記入させた。

数学的モデル化過程に合わせて考察すると、定式化については、今回教師が行っている。数学的作業は、カードゲームを行っている場面である。解釈、評価は、ワークシートにて勝つポイントを考え記入させ、他の生徒と共有させた場面や再度ゲームに取り組んだ後、勝つポイントを記入した場面である。現実的文脈に沿

った教材ではないが、生徒はそれぞれゲームに対して、勝つための必勝法というモデルを作成しており、本授業はモデル化の練習という位置づけに当たる。

#### (5) 授業実践①での課題

ワークシートに勝つポイントを書いた生徒は少数であり、多くの生徒は、「運」などと記入をしていた。原因としては、比例・反比例の理解が甘い状態でカードゲームを進めてしまっていることや勝つポイントを考え記入する時間が十分でなかったことが考えられる。

また、ワークシートの形状から勝つポイントをどのように捉え、考えを変容させたのかを確認することができなかった。今後は、ワークシートの記述欄を分割し考えの変容を視覚化できるよう作成していく。

#### (6) 実施したアンケートと今後の指針

本校の数学に対する意識を分析するために、令和2年12月に1年生58人に対してアンケートを実施した。

約60%の生徒が、「なぜ数学を学習するのか知りたい」という項目に対して、肯定的に答えており、数学を学ぶ意義や有用性を知りたいと思っている。また、記述項目として、「なぜ数学を学習するのか分かっていることを書いてください」という項目に対し、35人の生徒が「なし」と答え、残りの生徒は「将来役立つ」という記述が多かった。しかし、「将来役立つ」という解答も、具体的にどのように将来役立つのか書けていた生徒はほとんど見られなかった。同じく記述項目として「数学を使って考えたことはあるか」という質問に対しては、28人の生徒が「なし」と答え、残りの生徒のほとんどが、「買い物」と「料理」という記述であった。このことから、生徒にとって、数学を使った経験は「買い物」や「料理」のみであり、授業内で数学を使って事象を考えたと経験がないことが予想できる。今後は、現実的文脈に重点を置き、授業を行っていく。

### 4 授業実践②（教師力向上実習基礎）

#### (1) 実践対象

常滑市立A中学校 第1学年-2学級 62名

#### (2) 実践期間

2021年 2月11日～3月14日

#### (3) 実施単元

データの活用

#### (4) 実施授業計画

表1 授業実践② 授業計画（7時間完了）

| 授業時数    | 本時の内容       |
|---------|-------------|
| 第1時     | 代表値         |
| 第2時     | 階級値         |
| 第3時     | おこづかいアップ大作戦 |
| 第4時     | データ収集, 練習問題 |
| 第5時～第6時 | レポート作成      |
| 第7時     | レポート発表      |

#### (5) 単元の概要と指導の力点

本単元では、データの分布について、数学的活動を通して、ヒストグラムや相対度数などの必要性と意味を理解することや、コンピュータなどの情報手段を用いるなどしてデータを表やグラフに整理することができるよう指導する。また、目的に応じてデータを収集して分析し、そのデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断することができるよう指導する。

身近な題材をもとにデータの分布の傾向を読み取り、批判的に考察し判断できるよう、おこづかいのデータを与えて分析する教材を開発した。おこづかいという生徒にとって身近である問題を提示し、データに40000円という外れ値を設定することで、平均に対し批判的に考察できるデータを作成し、説得プランを複数の代表値を用いて考えさせる。おこづかいのデータは教師が作成しているため、この教材は他者が作成した定式化の検討から始まる教材である。データを分析する活動が、数学的作業にあたり、代表値を分析、特に40000円という外れ値を含めた平均について分析する活動が、解釈、評価に当たる。また、平均のみでなく他の条件も活用して説得プランを考えることや保護者の立場になって他者の説得プランを検討することから、スパイラル的発展を期待している。

レポート作成の授業では、実際の在校生のデータを収集し、分析させることで相対度数の必要性を理解することやデータを表やグラフにまとめさせる。

#### (6) 授業の実際

##### 【第3時】おこづかいアップ大作戦

教師が作成したクラスのおこづかいのデータを提示し、A君の月2000円のおこづかいを上げるために保護者を説得するプランを考えさせた。

|      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
| 3500 | 1000 | 500  | 2000 | 2000 | 2000 | 4000 | 1500 | 0    | 3000 | 7500  |
| 1200 | 3500 | 0    | 5000 | 4500 | 1400 | 3500 | 3500 | 5500 | 3000 | 40000 |
| 1000 | 2000 | 1000 | 0    | 4500 | 2000 | 2000 | 1900 | 7500 | 3000 | 3000  |
| 6000 | 6000 | 2500 | 2000 | 2000 | 500  | 5000 | 4000 | 3500 |      |       |

図2 生徒に提示したデータ

生徒はデータを基に、代表値や範囲、相対度数、度数分布表などを求めた。それらを用いて説得プランを考えるよう伝えた。はじめは、「平均値が3750円だから、2000円より高いので上げてほしい」という説得プランが多かった。この説得プランを全体で共有させ、第1時の授業を思い出させながら、平均値は40000円という外れ値の影響を受けていることを確認させた。さらに、平均のみでなく他の条件も活用して説得プランを再度考えさせた。

図3、4のように平均値以外の代表値も活用しながら説得プランを考える生徒もいれば、図5のように40000円という外れ値をいれない平均値を求めて説得しようとする生徒もいた。

～説得プラン～

2000～4000の人がクラスの43%ぐらいいるから、

図3 相対度数を用いたプラン

クラスの友達のお小遣いの真ん中の値は2750円だよ。  
僕は安いほうなんだ。もとお小遣いをくれてもいいと思う。

図4 中央値を用いたプラン

40,000円の子が 1人居ても、平均が 約 2866円が  
666円じゃない?

図5 40000円を除いた平均を用いたプラン

また、おこづかいをいくらあげるかについても、500円上げてほしいという生徒もいれば、1000円上げてほしいという生徒もいるなどそれぞれであった。その後、机を班の形にして意見を練り上げさせ、全体で発表させた。発表する班以外は、それぞれの説得プランを聞き、保護者の立場になっておこづかいをあげるかどうか判断させた。「複数の代表値を用いているか」や「40000円という外れ値を考慮できているか」などを基に判断できている生徒や、あげてほしいと主張している金額や、言い方や頼み方の様子を基に判断している生徒などさまざまいた。

表2は数学的モデル化に関するルーブリックを用いた評価である。( )の内の値は、欠席人数を除いた56人中の該当人数である。

表2 ルーブリックによる評価

|       | A                                    | B                                   | C                                |
|-------|--------------------------------------|-------------------------------------|----------------------------------|
| 数学的処理 | 中央値や相対度数、4万円を含めない平均値などを複数求める。(22)    | 外れ値を含めた平均値が妥当でないことを理解し、中央値を求める。(22) | 外れ値を考慮せず、平均値のみ求める。もしくは求められない(12) |
| 解釈・評価 | 数学的処理の結果に加え、付加価値をつけて説得プランを検討している。(8) | 数学的処理の結果に基づいて、説得プランを検討している。(41)     | 数学的処理の結果を考慮せず、自己判断している。(7)       |

数学的処理に関しては、約半数の生徒が能力を十分に発揮できている。解釈、評価に関して、Aの評価を得られた生徒は少ないが、教材の性質上、自由な発想が生まれづらかったことが原因と考えられる。

【第4時】身の周りのデータを調べよう

まず、授業準備として1A、1B、2Bの3クラスから、ChromebookにてGooglefoamを活用して、アンケートを行った。アンケートの後、どのテーマについてレポートにまとめるのか図6の中から決めさせた。男子は、「スマホは1日何時間使っている？」と「ゲー

ムは1日何時間する？」について調べた生徒が多く、女子は「理想の結婚する年齢」や「初恋は何歳？」など身近な題材が人気だった。その後、次回から行う調べ学習のために、データをまとめる練習を行った。

- ・1日の睡眠時間は？
- ・ぶっちゃけ1日何時間勉強する？
- ・スマホは1日何時間使っている？
- ・一ヶ月のお小遣いの金額は？
- ・将来身長は何cmほしい？
- ・理想の結婚する年齢は？
- ・初恋は何歳？
- ・ゲームは1日何時間する？
- ・1ヶ月で何冊本を読む？
- ・身長は何cmですか？
- ・靴のサイズは？

図6 アンケートの質問事項

【第5時～第6時】データをレポートにまとめよう  
度数分布表を与え、平均値と最頻値、中央値が含まれる階級、相対度数、相対度数の度数分布多角形を求めさせた。また、そのテーマを選択した理由と調べて分かったことについてもレポートに記述するよう伝えた。また、Chromebookにて詳細なデータも与え、2つのデータを分析することや、独自の視点からデータを分析してもよいと伝えた。実際には、求めたことを自分自身と比較して考察している生徒が多かった。また、発表すると伝えていたのでイラストや色をつけて興味をひくように作成する生徒もいた。

【第7時】レポートを発表しよう

生徒の中から6名指名し、発表させた。発表する生徒のレポートをiPadで写真を撮り、iPadを教室の電子黒板に接続して調べた内容と感想について発表させた。

(7) 授業実践②での成果

「おこづかい」や「身の周りのデータ」といった現実世界と関連づけた題材を基に授業を行い、数学と現実を関連づけることができた。また、授業の中で、自分の考えや成果を発表させる活動を通して、他者に説明し、考えを共有することができた。

(8) 授業実践②での課題

第3時のおこづかいアップ大作戦については2000円という金額が生徒にとって自然ではなく、「おこづかいをもらっていない生徒」や「おこづかいではなくほしいと思ったものを買ってもらおう」といった生徒が多かったことで、「データを分析して、2000円からおこづかいをあげる」ということが生徒にとって解決の必要性がある問題ではなかった。また、おこづかいをあげるかどうか判断する際は、「自分のお金ではないのであげてしまおう」と当事者意識のない理由から、判断してしまっている生徒が見受けられた。今後、2000円という金額を下げることや、お金を教材に選

ばないほうがよいだろう。授業実践③では、解決の必要性のある教材を実践し、価値観を踏まえた自由な発想を促し、現実的文脈に則した意思判断を期待する。

5. 授業実践③（教師力向上実習II）

(1) 実践対象

常滑市立 A 中学校 第2学年-2学級 63名

(2) 実践期間

2021年 5月26日～6月22日

(3) 実施単元

連立方程式

(4) 実施授業計画

表3 授業実践③ 授業計画（15時間完了）

| 授業時数      | 本時の内容             |
|-----------|-------------------|
| 第1時       | 連立方程式と解           |
| 第2時～第3時   | 加減法               |
| 第4時       | 何倍かして加減法          |
| 第5時       | 代入法               |
| 第6時       | いろいろな連立方程式        |
| 第7時       | ●=■=▲             |
| 第8時       | 連立方程式の利用（得点）      |
| 第9時       | 連立方程式の利用（割合）      |
| 第10時      | 連立方程式の利用（道のり）     |
| 第11時      | 連立方程式の利用（代金、解の吟味） |
| 第12時～第14時 | 連立方程式の文章問題作成      |
| 第15時      | 文章問題 発表           |

(5) 単元の概要と指導の力点

本単元では、連立二元一次方程式について、数学的活動を通して、二元一次方程式とその解の意味を理解することや連立二元一次方程式の必要性和意味及びその解の意味を理解すること、簡単な連立二元一次方程式を解くことができるよう指導する。また、一元一次方程式と関連づけて、連立二元一次方程式を解く方法を考察し表現することや連立二元一次方程式を具体的な場面で活用することができるよう指導していく。

第1時では、「さっさ立て」を実演し、生徒の興味をひいた。第2時から第7時までは、連立方程式の解の意味などを説明しながら、解くことができるよう問題演習の時間と他者に説明する時間を多く設ける。

第8時から第11時の利用の範囲では、生徒に数学と現実を関連づける意識をもってもらうために、すべての問題を現実を意識して出題する。特に第11時では、アメとチョコの個数が整数にならない問題を出題し、生徒の批判的思考力や現実的な妥当性を考える姿を期待する。授業実践②では、おこづかいアップを目指した授業を行い、多くの生徒の生活スタイルから、生徒にとって解決の必要性が低かったことが課題であった。よって、アメとチョコの教材では、生徒に店員という立場を指定することで解決の必要性を与える。

また、文章問題に対して、価値観を踏まえ自由な発想を促すことで、現実的文脈に則した意思判断につなげていくことをめざし、実践する。日常生活と関連づけた文章問題から立式した部分を、定式化、式を解き解を求めた部分を数学的作業、答えへの違和感から問題を見つめ直す段階を解の解釈、評価、問題場面を修正することや、班で話し合い提案するプランを決める部分をよりよい定式化と考え、実践する。

第12時～第15時では、生徒自らが現実的な問題を作成し、発表する活動を行う。

(6) 授業の実際

【第8時～第10時】連立方程式の利用

一般的な文章題にて、漫画や身近な登場人物を題材として出題し、具体的なエピソード等を交えながら授業を進めることで現実を意識できるよう工夫した。

第8時では漫画の値段を題材とした文章題を出題した。漫画の値段は現実的には484円や594円であるが、今回は400円や600円といった計算しやすい数字に変更して出題した。値段を正確に知っている生徒も一定数いたが、値段の違いを指摘するような生徒はなく、違和感もないようだった。このことから生徒にとって問題のために数字を簡単にするのは当然であり、数学と現実を乖離して考えていることが予想できる。

第9時では割合の文章問題を行った。筆者が実際にコンビニで買い物した際の割引を題材とした。その後、入学者数の増減の割合問題を出題した。この際、入学者数を割合で考えることは妥当ではなく、人数で増減を表した方が自然であることを生徒と確認した。

第10時では、道のり問題を出題した。実際に筆者が体験した話を基に問題を作成した。解答を確認した後、現実的には速さは一定ではなく、グラフは、直線ではなく曲線になることについて確認した。

【第11時】連立方程式の利用（代金、解の吟味）

あなたは店員さんです。  
「1個50円のアメと1個90円のチョコを合わせて9個入れたギフトセットを予算600円で作ってほしいです」と言われました。  
アメとチョコをそれぞれ何個入れればよいですか。

図7 出題した問題 代金、解の吟味

（塩浦（2020）を参考に筆者改題）

問題は、予算という言葉から妥当である考えが複数出るような金額となっている。また、「あなたは店員です」と当事者意識をもたせる問い方をしたことで、解決の必要性を与え、問題を解く動機づけを行った。

多くの生徒は、アメを $x$ 個、チョコを $y$ 個として  

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 50x + 90y = 600 \end{cases}$$
と立式していた。この式を解くと、  
 $x = 5.25, y = 3.75$ と求められる。この値を求めた生

徒は、「答えがおかしい」と不安そうに尋ねてきた。アメやチョコに対して、小数や分数で個数を表すことはおかしいという批判的思考力が生徒にはしっかり備わっていることが分かる。全体で答えが正しいことを確認し、問題文に気になる言葉はないか尋ねると、「予算だからちょうど600円ではない」と、ある生徒が発言した。生徒が計算に躓き、本授業の目標である解の吟味を行えないことがないよう、ここまでの考え方は全体で確認した。この考えを全体で共有し、生徒にあなたが店員ならば「アメとチョコそれぞれ何個で提案するか」と問いかけ、図8の表を作成させた。

|       |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x個    | 0   | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
| y個    | 9   | 8   | 7   | 6   | 5   | 4   | 3   | 2   | 1   | 0   |
| 代金(円) | 810 | 770 | 730 | 690 | 650 | 610 | 570 | 530 | 490 | 450 |

図8 アメをx個、チョコをy個とした表

生徒の意見はアメを5個、チョコ4個で610円とアメを6個、チョコ3個で570円の2通りに分かれた。アメを5個、チョコを4個の意見は、アメとチョコの個数のバランスと価格が600円に近いという理由が主だった。アメを6個、チョコを3個の意見は、予算が600円なので600円以内に抑えるという理由が主だった。その後、店員として別の提案をしてもよいと伝えた。「食べる人が平等に食べられるよう、個数を均等に作る」意見や、「ちょうど600円になるよう個数を変更する」意見、「消費税を考慮した」意見、「独自にラッピング料金を設定した」意見など、さまざまな価値づけに基づく意見が出された。

表4は生徒の解答とその解答を行った生徒の人数を示す。すべての生徒が予算600円については変更せず、一部の生徒が個数を変更した解答を行った。これは、実際の場面でも、予算は変更せず個数は変更可能かもしれないという場面が予想できるので、現実的側面を考慮した適切な判断をしていることが分かる。

表4 生徒の解答と類型

|   |             |          |     |
|---|-------------|----------|-----|
| A | アメ6個, チョコ3個 | 570円     | 10人 |
| B | アメ5個, チョコ4個 | 610円     | 24人 |
| C | アメ9個, チョコ1個 | 594円(税込) | 1人  |
| D | アメ4個, チョコ4個 | 560円     | 2人  |
| E | アメ12個       | 600円     | 1人  |
| F | アメ3個, チョコ5個 | 600円     | 5人  |
| G | アメ5個, チョコ4個 | 618円     | 3人  |
|   | ラッピング込み     |          |     |
| H | アメ7個, チョコ2個 | 583円(税込) | 2人  |

前述したようにすべての解答が予算600円を大切にしながら、それぞれ解答にアレンジを加えている。

類型A, B, Hは、お客さんの要望である、数は9個を重要視している。さらに類型Hは税を考慮して、解答を作成している。類型B, D, Gは、食べる人たちに対する気づかひを行い、数をなるべく均等にすることを重要視している。類型E, Fは予算600円ちょうどになることを重要視している。類型C, Eは数が9個より多いほうが、お徳感がある、もしくは数が多ければ困らないという考えから、数を9個よりも増やしている。それに加えて、類型C, G, Hは税込みやラッピング料金など現実的な側面を重要視している。しかし、類型Gのラッピング料金は8円という金額設定になっており、これは現実的ではないと筆者は考えている。なぜ8円なのか聞くと、生徒は「なんとなく」と答えた。本来、10円や100円といったラッピング料金が予想されるが、これは生徒の中に、ラッピングをしてもらった経験がないことが原因であると筆者は考えている。一方で、問題文の「ギフトセット」という言葉から、ラッピング料金という条件を追加したことは現実的側面を考慮することができているといえる。

類型A, Bはもとの問題文で与えられた条件を遵守するものであり、類似した他の問題場面でも利用できる。それゆえ、類型A, Bの根拠には、「2つの連立方程式を考慮した忠実性」が含まれているといえる。

類型B, D, Gの根拠には、数の均等という「平等性」が含まれているといえる。

類型E, Fは、「予算600円」という言葉から、「600円ちょうどであることが好ましい」と考え、数を無視して解答している。それゆえ、類型E, Fは、「連立方程式の片方である $50x + 90y = 600$ の式のみを重要視している」といえる。

加えて、類型C, G, Hの根拠には税やラッピング料金という「現実的付加価値」が含まれているといえる。

本来、類型A, Bにおける解答が正答とされるが、多様な価値観に基づくことで、多様な結論を求めることができている。生徒による解答には、必ずしも適切であるとはいえないものも含まれている。しかし、平林(2016)は、問題場面に対する自由な発想を促すことは、生徒が問題場面についてより考えるようになり、数学的モデル化の素地になり得ると述べており、本研究においても価値ある考えだと判断した。

それらの意見を班で話し合わせ、教師を客に見立て、ホワイトボードで説明させた。その際、班で適切だと思う意見を1つ決めて、発表した生徒もいれば、図9のように複数のプランを提案し、お客さんに決めてもらう発表、ラッピングなどの要望に関しては、相談してほしいというような発表もあった。

さらに、ワークシートに改めて個人でどのようなプランを提案するか考え、そのプランを選択した理由、考える上で大切にすることを記すよう伝えた。

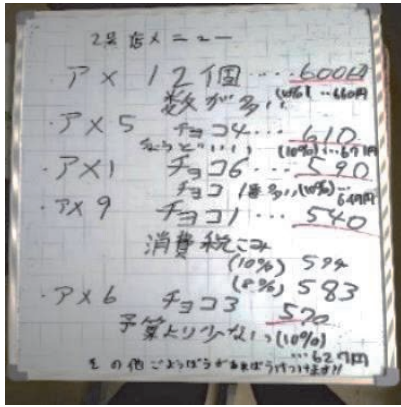


図9 複数のプランを提案するホワイトボード

表5は数学的モデル化に関するルーブリックを用いた評価である。( )の内の値は、欠席人数を除いた48人中の該当人数である。

表5 ルーブリックによる評価

|         | A   | B  | C                           |
|---------|---|--|-----------------------------|
| 定式化     | 式を2つ作ることができている。(36)                                 | 式を1つ作ることができている。(10)                            | 式を1つも作ることができない。(2)          |
| 数学的作業   | 610円、570円という解に気づき、600円ちょうどの解を求めるなど改めて、定式化を行っている。(7) | 解に違和感を持ち、610円、570円という解を求めることができている。(28)        | 小数の解に違和感がない、もしくは解けていない(13)  |
| 解釈・評価   | 再考した上で、610円、570円という解に気づき、600円ちょうどの解を求めるなどしている。(11)  | 再考した上で、解に違和感があり、610円、570円という解を求めることができている。(37) | 再考した上で、解に違和感がない。(0)         |
| よりよい定式化 | 価値観や現実を意識した自主的判断ができおり、現実的に妥当である。(45)                | 価値観や現実を意識した自主的判断ができているが、現実的に妥当でない。(3)          | 価値観や現実を意識した自主的判断ができていない。(0) |

最終的にすべての生徒が現実的な意思判断ができしており、現実的に妥当である答えをほとんどの生徒が求めることができている。

【第12～第14時】連立方程式の文章問題作成

図10のように作成のポイントの説明し、自分たちで連立方程式に関する問題を作成させた。

ポイントにも記したが、現実的に妥当であるものが望ましいと伝え、作成させた。ChromebookにてGoogleスライドを使って作成させ、教師と常に共有できる形で進めた。

1. 身の回りのことや現実の事象から問題を作る。
2. chromebook を活用して情報収集してもよい。
3. 授業で解いてきた問題や教科書・リープなどの問題を参考にしてもよいし、他教科と関連させてもよい
4. 解く人に解いてみたいと思わせる問題、おもしろい問題、楽しい問題、ひっかけ問題など、自分独自の問題づくりに挑戦しよう
5. 問題を作成した際、どのような点を大事にしたのか・工夫したポイントは何なのか書く。

図10 問題作成のポイント

「Rさんはある日洋菓子店に行きました。そこで、いちごタルト3個とマカロン5個を買い、100円の箱に入れてもらったところ代金が2140円でした。会計したら次回使える500円の割引券をもらいました。数日後、友達の家に行くので洋菓子店に手土産を買いに行きました。その日は、いちごタルト5個とマカロンを10個買い、通常のお土産用の箱に入れてもらいました。そして先日もらった500円の割引券を使ったので代金は3300円になりました。いちごタルトとマカロンの値段を求めてください。」

図11 地域のお店を題材にした問題

「午前8時30分にスタートせいやチームは200kmの道を走った。まずせいやくんが走り途中でせいやちゃんと交代した。せいやくんは時速40kmせいやちゃんは時速60kmで走った。午後1時にゴールした。せいやくんとせいやちゃんの走った距離を求めなさい」






図12 題材は友達だが、設定が現実的でない問題

図11のように身近なお店の現実的な設定などを用いて問題を作成している生徒が多かったが、図12のように友達など身近な題材を使っているが、設定が現実的ではない問題も見受けられた。

【第15時】文章問題 発表

班で代表となる問題を1つ選出し、発表させた。選出された問題を電子黒板で提示し、班で協力して他の問題を解き、「現実の世界と関連づけているか」「解く人に、解きたいと思わせるかどうか」「解いていておもしろい、もしくは解いた結果おもしろい工夫がされているか」という3観点を4段階で評価させた。他の班の問題を1問解けたら1ポイント、3観点の評価を集計し、1位には3ポイント、2位には2ポイント、3位には1ポイントというルールで、最終的に1番ポイントが多かった班が優勝とした。各班の正解数を黒板で記録し、評価シートの点数は、事前に作成したGooglefoamに入力させ、集計した。

ここでは、問題に対する意欲について、表6を基に「解きたいと思った理由」について分析する。

表6 解きたいと思った理由解答類型

|                     |     |
|---------------------|-----|
| 現実的にあることだから         | 15人 |
| 自分では思いつかない工夫        | 2人  |
| 解けそう、簡単そう           | 14人 |
| 問題文のおもしろさ           | 4人  |
| 文の短さ                | 2人  |
| 難しそう                | 11人 |
| 現実に関連づけられていなくて簡単だから | 1人  |

解きたいと思う理由として、「現実的にあること」「解けそう、簡単そう」という理由が多くあげられた。やはり「できる喜び」は意欲に確かな効果がある。それに加え、「現実的である」ということも問題に対する意欲に一定の効果があると考察できる。一方で、「解けそう、簡単そう」とは対極である「難しそう」という理由も多い。このことから難しい問題に直面したときの挑戦心も意欲に対して効果があり、「解けそう、簡単そう」と「難しそう」のどちらの理由も多いことから、問題に対する意欲は問題ではなく、生徒の特性に依存していることが予想される。

(7) 授業実践③での成果

授業実践②にて、解決の必要性が低い問題であり、考えを巡らせて問題を現実的に解釈しようとする姿を見ることができなかったことを受けて、今回のアメとチョコの教材では、解決の必要性を与え価値観を踏まえることで、現実的な意思判断を促すことができた。実際に表4のような解答を生徒は行い、表5の評価から分かるように、ほとんどの生徒が現実的な妥当性を考慮することができている。

(8) 授業実践③での課題

アメとチョコの教材にて、生徒はさまざまな現実的文脈を考慮した解答を行ったが、ギフトを受け取る側のことまで考えを巡らせることや、箱にどのように詰めると見栄えがよいかなど、高いレベルの現実的文脈を考慮することができていなかった。そのため、授業実践④では、現実的な条件を増やし問題に対する解答の自由度を増すことで、さらに現実的文脈に考えを向けてくれることを期待する。

6 授業実践④ (教師力向上実習Ⅲ)

(1) 実践対象

常滑市立 A 中学校 第2学年-2学級 63名

(2) 実践期間

2021年 9月14日～10月4日

(3) 実施単元

一次関数

(4) 実施授業計画

表7 授業実践④ 授業計画

| 授業時数 | 本時の内容              |
|------|--------------------|
| 第1時  | 一次関数の利用(速さ・時間・道のり) |

|     |                    |
|-----|--------------------|
| 第2時 | 一次関数の利用(動点)        |
| 第3時 | 一次関数の利用(ポップコーンの代金) |

(5) 単元の概要と指導の力点

本単元では、利用の範囲のみ授業を行う。特に第1時、第3時では一次関数の意味と一次関数として捉えられる事象があることを理解し、現実と数学を関連づけられるよう、指導していく。

授業実践③のアメとチョコの授業では、現実的文脈を考慮して、解答を作成させることができた一方で、ギフトを受け取る側のことまで考えを巡らせることや、箱への詰め方による見栄えの良さなど、高いレベルの現実的文脈を考慮することができていなかった。そのため、今回は遊園地でのポップコーンを題材に、現実的な条件の多い、解答の自由度の高い教材を実践する。本教材では、文章問題から立式する部分を定式化、式を解く部分を数学的処理、数学的処理の結果を受けて個人や班でどちらのポップコーンを買うか判断する部分を解釈・評価とする。

(6) 授業の実際

【第1時、第2時】一次関数の利用

第1時では、電子黒板にて Google マップを提示し、家、学校、コンビニなどの位置関係を確認した後、筆者が家からコンビニを経由し、中学校まで向かうという問題を出題した。その後、解答を確認した後、姉が忘れ物を届けるという練習問題を出題した。練習問題では、「姉が中学校まで進んだとして」と出題したため、答えとしては、図13左図のようになる。しかし、ある生徒が「忘れ物を届けにきたのに、中学校まで行くのはおかしい。追いついて忘れ物を届けた地点で家に帰るはず。帰る速さが分からないからグラフは書けないけど」と発言し、図13右図のグラフを書いていた。

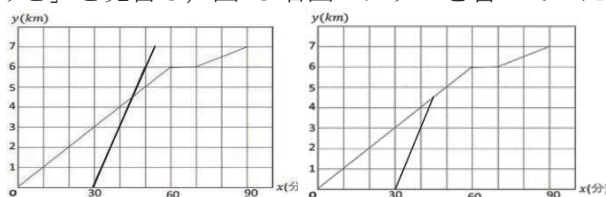


図13 姉が中学校まで進んだグラフ(左)と姉が追いついて終わっているグラフ(右)

問題文に「中学校まで進んだとして」という記述があるため、正解ではないが、現実的に考えると生徒の主張は正しいものである。この発言から生徒に、批判的思考力や現実的文脈を考慮する意識が身につけていることが分かり、教師の意図していない現実的文脈についても考えることができていた。これは、繰り返し現実と関連づけた授業を行ってきた成果と言えるだろう。

第2時では、動点問題を扱った。苦手意識を示す生徒は多かったが、パワーポイントで実際動点の動きを確認しながら行うことで、理解の手助けを行った。



【第3時】一次関数の利用（ポップコーンの代金）

遊園地のポップコーンは、少し高いキャラクター付きのバケツを買おうと、おかわりが安くすることができ、紙のボックスで買おうと、バケツを買うよりは安い、毎回ボックスの値段を払わなければいけないというシステムがある。このシステムを活用して授業を行った。値段はバケツが 1400 円でおかわりは1回 500 円、ボックスは 700 円として生徒に説明した。その後、図 14 の問題を提示した。

あなたは友人と遊園地に来ています。  
「4人でバケツを買おう。その方がボックスを買うよりお得だからね」本当にそうだろうか、確かめよう！

図 14 ポップコーンの問題

(富沢 (2012) を参考に筆者改題)

生徒はポップコーンの個数を $x$ 個、代金を $y$ 円としてバケツとボックスそれぞれの式を考えていた。立式は多くの生徒ができていたが、どちらがお得かということについては、どうすればよいか分からない様子だった。これを理解するためにはグラフからの解釈がよいが、時間の都合上グラフを書かせることはできなかった。そこで、バケツとボックスの式を確認した後、スライドにグラフを提示し、交点でお得が切り替わっていることを確認した。交点の $x$ 座標は4.5であり、このことから4個買う場合はボックス、5個買う場合はバケツの方がお得となった。ここで生徒から「何人前?」「何杯食べられるか分からない」「味は?」と質問がきた。そこで、実際は質問のようにさまざまな条件を考えて周りの意見なども踏まえた上で、購入を判断することを全体で共有させた。3人から5人の班の形になり、その班で遊園地に行くことを想定して、さまざまな条件や価値観を出し合いながら判断するよう伝えた。こちらからは、味の種類とバケツのイラスト、各バケツを買った際、最初に入っている味を資料にまとめて各班に配布した。

各班、食べられる個数だけでなく、味の好みやバケツのイラスト、持ち運びやすさなど現実的なさまざまな条件を踏まえて考えることができていた。考えをホワイトボードに記入させ、発表させた。

表 8 生徒の解答と類型

|   |         |            |    |
|---|---------|------------|----|
| A | ボックス購入  | 1杯, 700円   | 2班 |
| B |         | 2杯, 1400円  | 2班 |
| C |         | 4杯, 2800円  | 1班 |
| D | バケツ購入   | 5杯, 3400円  | 1班 |
| E |         | 6杯, 3900円  | 2班 |
| F |         | 7杯, 4400円  | 1班 |
| G |         | 4杯, 2900円  | 2班 |
| H | バケツ2つ購入 | 10杯, 6800円 | 1班 |

類型 A, B, C, D, E, F は基本的に食べる杯数に合わせて、バケツかボックスを購入するかを決めていた。杯数に関しては、個人の食べられる量やポップコーンの好み、食べたいと思える味があるかなどを理由に決めていた。加えて、ボックスを買う意見には、「バケツは持って帰る際、邪魔になる」という理由が含まれており、バケツを買う意見は「ストラップやふたによって、遊園地を周りながら食べやすい」や「形に残るから思い出になる」という理由が含まれていた。

類型 G は本来、4杯購入するならばボックスを買った方がお得である。しかし、この班は、「好みのデザインのバケツがある」「思い出に残る」「もっと食べるかも」という理由でバケツを買うことにしていた。

類型 H は、班で買いたいバケツが分かれたため、2つ買うことにしていた。さらに、バケツは5杯以上買う方がお得ということを理解しているため、バケツそれぞれ5杯ずつ10杯買うことにしていた。

表 9 大切にしたことについての類型

|   |                       |     |
|---|-----------------------|-----|
| 1 | 食べられる杯数や値段            | 15人 |
| 2 | ボックスは捨てることができ、荷物にならない | 3人  |
| 3 | 味の好み                  | 6人  |
| 4 | 味や杯数を班員に合わせる          | 9人  |
| 5 | バケツはふたとストラップで持ち運びやすい  | 2人  |
| 6 | バケツのデザイン              | 9人  |
| 7 | バケツは次も使うことができる        | 2人  |
| 8 | バケツは思い出になる            | 2人  |

類型 1 はバケツのデザインなどではなく、食べられる杯数と値段という多くの人が考えることを大切にしており、根拠には「一般的価値観」が含まれている。

類型 2, 5 はボックスとバケツの遊園地を回る上での良さをそれぞれ重要視しており、根拠には「利便性」が含まれている。

類型 3, 6 は味やデザインの好みという個人の好みを重要視しており、根拠には「嗜好」が含まれている。

類型 4 は班員の味や杯数に合わせて、決めたという遊園地で遊ぶ上で、自分のみならず周りが楽しめるようにという「社交性」が根拠に含まれている。

類型 7, 8 は次も使うことができるや、持ち帰って思い出にできるといった、遊園地から帰った後を見据えており、「未来」が根拠に含まれている。

(7) 授業実践④での成果

今までの授業実践と比べ、現実的な条件を増やし、解答の自由度が高いポップコーンの教材を実践した。生徒の大切にしたことの種類は8種類出るなど、授業実践③と比べ、現実的文脈を踏まえた解答を行うことができていた。また、数学の世界のみで考えを留まらせるのではなく、文脈を見据え現実的に考えようとする意識を育てることができたと考えている。

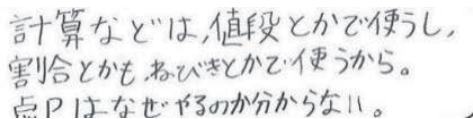
## (8) 授業実践④での課題

ポップコーンの教材では、現実的文脈を考慮できていない一方で、数学的には一次関数の低いレベルに留まっており、数学的によい教材とは言えないだろう。現実的文脈に加えて、関連した数学的文脈も生徒が考えられることが理想であるが、今後の課題としておく。

## (9) 実施したアンケート

本校の数学に対する意識の変化を分析するために、令和3年10月に2年生52人に対してアンケートを実施した。アンケートでは、約50%の生徒が、「なぜ数学を学習するのか知りたい」という項目に対して、肯定的に答えており、前回よりわずかに低下しているが大きな変化は見られなかった。また、記述項目として、「なぜ数学を学習するのか分かっていることを書いてください」という項目に対し、「なし」と答えた生徒は13人と減り、残りの生徒は「将来役立つ」という抽象的な記述もあったが、「買い物での割合計算ができる」や、「時速何キロでいけば、何時間かかるか分かる」など具体的な内容の記述が多かった。このことから数学の有用性は少し伝えることができたといえるだろう。

一方で、図15のような記述もあった。



計算などは、値段とかで使うし、  
割合とかもあひぎとかで使うから。  
点Pはなぜやるのか分からない。

図15 アンケートの記述欄

これは、「現実と関連づけられた数学」を学習する意義はわかるが、「動点問題」など現実との関連が薄い題材に関して、やる意義を見いだせないという記述である。これは、現実的な問題に対してしか意義を見いだせないと捉えられるが、現実的な数学の有用性を意識づけることができたとも捉えられる。また、現実との関連が薄い題材に対しても意義について考えられるきっかけを作ることができ、そのような何気ない疑問を大切に授業展開を行うことで、生徒が実用的な意義のみならず、陶冶的な意義、文化的な意義それぞれを考えられるよう努力していきたい。

また、「数学の授業が好きである」の項目に肯定的に答えた生徒は約55%に対し、「数学と現実を関連づけて考えることが楽しい」の項目に肯定的に答えた生徒は25%だった。これにより、数学と現実を結びつけることで意欲に対する肯定的な結果は得られなかった。

## 7 研究のまとめ

### (1) 数学的モデル化という手立ての有効性

多くの現実と関連づけた教材の実践を通して、現実の世界と数学の関連性を意識づけて、数学の意義や有用性を伝え、意欲向上を期待してきた。その中で、問題場面に対する自由な発想を促し、数学的文脈と現実的文脈を照らし合わせ、現実的文脈に則した意思判断を目指してきた。アンケートの結果から、数学の意義

や有用性を伝えることはできたかもしれないが、数学や問題に対する意欲に肯定的な結果は見られなかった。現実的文脈に則した意思判断については、問題場面に対する自由な発想を促し、生徒はそれぞれの価値観に基づいて多様な解釈を行った。妥当でない解釈もあったが、数学と現実を乖離して考えるのではなく、相互に結びつけて考えていく姿勢は高まったといえる。

### (2) おわりに

授業実践③では、単元のすべての授業を行わせていただいたが、その他の授業実践では、単元の一部を行うという形での実践であった。その状況であっても教材を工夫することで、数学という授業をこえて、現実的な意思判断をする生徒の姿を見ることができた。

授業実践④では、現実的文脈に則した意思判断を目標にポップコーンの授業を行ったが、一次関数の数学的能力の育成が目標の場合、ポップコーンの授業は適していない。このように目標に合わせた教材開発が重要である。この点についても今後、課題としておく。

### <引用参考文献一覧>

- ・池田敏和 (2006) 「数学的モデリングを促進する考え方を育成する教育的理由」、『日本科学教育学会』、年会論文集 30, pp.65-68
- ・高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編 (平成30年告示) pp.6-8
- ・西村圭一 (2001) 「数学的モデル化の教材開発とその授業実践に関する研究 —高等学校数学科を中心に—」, 東京学芸大学大学院教育学研究科修士論文, 2001
- ・服部裕一郎 (2018) 「数学的モデル化過程における批判的思考力の役割に関する一考察」、『日本科学教育学会』、年会論文集 42, pp.51-54
- ・三輪辰郎 (1983) 「数学教育におけるモデル化についての一考察」、『筑波大学教育研究』, no2, pp.117-125
- ・三輪辰郎 (2004) 「数学教育における数学的モデル化の教授-学習の意義と課題」、『日本科学教育学会』、年会論文集 28, pp.223-224
- ・平林真伊 (2016) 「数学的モデル化過程からみた算数科文章題の特質—余りのある割り算に関する調査を通して—」、『日本科学教育学会』、科学研究 40 巻 2号 pp.144-154
- ・塩浦康平 (2020) 「数学と現実を結びつけて考える生徒を育てるための授業改善—解の解釈・評価に焦点をあてた課題の工夫を通して—」、『実践研究論集』第30集, pp.61-66
- ・富沢勝典 (2012) 「日常生活で数学の知識・技能を活用する 生徒を育てる中学校数科学習指導の工夫 —日常生活の事象を題材とした「活用型学習」を取り入れて—」、『群馬県総合教育センター』長期研修員の研究報告書. 平成24年度 246集