発問を意識した「数学的な見方・考え方」を働かせる問いかけ方の工夫

教科指導重点コース 理数・自然科学系
氏名 村上智輝

1 はじめに

高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説 数学編 理数編では,「数学的な見方・考え方」について触れている．実習校での授業観察や授業実践を通して,「数学的な見方・考え方」を働かせる方法には教師からの発問を意識した問いかけが有効であると感じた．「数学的な見方・考え方」を働かせるためにどのような問いかけ方があるか研究授業を振り返り関連づけながら述べる．あわせて，実習校で得た学びについても触れる．

2 実習校について

(1) 学校名

A高等学校(実習校の名前は省略)

(2) 学校の概要

[学校の規模]
全校生徒数： 953名
学級数： 24学級
(令和3年4月現在)
[力を入れている活動]

普通科の他にも，コースが併設されており，コミュニケーション能力やプレゼンテーション能力の育成を図る．

[教育課程]

文型・理型の類型選択を2年生から実施し，3年生では文型を国文型と私文型に分け，さらに選択科目を設置するなど，進路に適した学習を取り入れている．
(実習校HPおよび職員資料より一部抜粋)

(3) 担当学級の生徒の実態

実習校の担当生徒については，昨年度から引き続いて同じ生徒を半数程度担当することになったため，教室の雰囲気としては昨年度とはあまり変わらない印象がある．大人しい生徒が多く，基本的には教員の指示の通りに動いている印象である．学校生活では大きな問題もなく全員が規則を守って過ごしている．しかし，実習期間が長く続くと一部の生徒からは慣れ親しく話しかけてくることもあるため，毅然とした態度で接するなどの対応が必要と感じた．今年度は，高校3年生を担当学級としてみることになり，ほとんどの生徒が大学進学に向けて受験を控えている．国公立や私立の大学進学を目指す生徒が多く，数学の授業については教員の話を最後までよく聞いて取り組んでいる生徒が多い．しかし，他の教科の授業を観察した際に，一部の生徒は受験で必要としない教科のためか下を向いている様子もあった．他にも朝の会の時間や帰りの会，特別活動の時間においても，下を向いていたり，他事をしている生徒など授業とは関係の無いことを進めている生徒も2学期以降に何人かみることが増えた印象である．

3 実習・サポーター活動からの学び

主に，(1)～(5)に分けて以下に示す．

(1) 個々の生徒との実態と関わり方

前にもふれたように，私の担当するクラスは大学進学を控えていることもあり，数学の授業は集中して取り組んでいる様子が見られる．休み時間や放課後など授業時間以外ではクラスメイトや担当教員などと雑談する姿も多くみられ，私も会話の中に入ることがあった．そのなかには，実習期間中に学校行事として行われた遠足について，満足したなどの感想があった．さらに，大人しくもありながら全体として明るい雰囲気もみられた．その一方で，受験を控えているためか勉強によるストレスやクラスメイトとの人間関係が原因なのか二学期以降では欠席も目立っていた．また，進路に関しての悩みも学級日誌のコメントや直接聞かれることが何度かあった．そんなとき，できるだけ相手に寄り添いつつ相手の置かれている状況を把握しながら，前を向いて頑張れるようなコメントを送った．また，直接生徒と会話をする際も，最近の生活の様子などを聞いたりするなど，生徒と声をかける機会を増やした．次第に生徒から声を掛けてもらえたりすることも増えて信頼関係を築くことができ，改めて傾聴の大切さを理解できた．

(2) 学級づくりについて

後期の平日連続の実習では朝と帰りの会の時間を担当した．始めた頃は連絡事項の伝達が中心となったため，期間の途中からは他愛のない会話も入れたりすることで単調に進めないように留意した．それでも，下を向いている生徒がおり，話を聞いていない様子もみられた．連絡事項等の伝達を私が一方的に進めすぎたこともあるかもしれない．誰かに挙手させたり，指名するなどして生徒と教師とが対話できる時間をもう少しとるなど，生徒側を意識しながら進めたい．また，この実習期間中に，学校祭についての企画案などを話し合う場面があった．そのなかで話し合う生徒はごくわずかだったことが印象に残った．そこで積極的な参加を促すよう声を掛けたりもしたが，意欲はあまりみられなかった．思うように学級全体で話し合って進め

ることはできなかった．まずは小グループで役割分担をさせ，徐々に他のグループと協力しながら全体で活動させるなど，学級活動に全員で協力して参加する学級づくりを目指したい．

(3) 授業づくりについて

数学の授業は約一年半にわたって同じ数学教員についていただき，授業の様子を観察し省察を行い振り返りながら，何度か授業観察や授業実践をさせていただくことができた．そのなかで，授業観察では担当教員が授業中に問いかけを行い，ペアワークを通して説明を行うことで，生徒が関心を持って内容について理解を深めようとしている様子が印象に残った．そこで，生徒に学ぶ動機づけを持たせるうえでは発問が一つ有効ではないだろうかと考えている．どのような発問の方法があるか授業観察や教材分析などを通してこれまで考えた．授業実践や12月に行った研究授業の際にも，授業観察で担当教員が行っていた問いかけを参考にしながら発問を意識した問いかけを行った．しかし，実際に行ってみると，私の問いかけの内容が伝わりにくいことがあった．また，問いかけ自体は伝わったものの結局何を伝えたかったのか明確になっていないことも多く，上手く生徒に理解が深まるような説明になっていなかった．そこで，問いかけに関しては，内容が伝わっているか机間指導をしながら確認を行った．また，発問を行ったうえで生徒に理解が深まるような説明にするには，その発問で生徒がどのような解答をするか，考えられる誤答を予想し，つまずくポイントを明らかにしておくことで，学習内容を理解することにつなげられると考える．実際の研究授業では机間指導を行いながらどのように解いているかを確かめながら進めた．また，生徒同士がペアワークを通して活発に議論しあう様子が見られた．研究授業については4章でもふれる．発問を通して生徒が深く考える姿，発問を取り入れながら授業全体の構想を立てることが少しずつ身についてきたように感じる．

(4) 学校づくりについて

職員の先生方にお時間を頂戴し，各校務分掌でどのような取り組みをされているかお話を伺うことができた．生徒指導部については，不登校やいじめなどの生徒個人や生徒同士での問題が起きたときに，ただ教員が毅然とした態度で注意して済ませるのではなく，問題行動が起きた背景などを考慮し心のケアも含めて接していることを心かけていた．また，解決が難しい場合は一人で考えようとせず，主任の先生など周りの教職員とも相談をとりながら連携して解決にあたることが大切であった．これは生徒指導部に限らず，他の校務分掌等においても大切なことだと考える．どの校務分掌も業務にあたりながらも，生徒を最優先に考えながらあたっていた．他に，職員会議では，会議のなかで，例えば，来年度はどのような学校づくりを目指していくか，他の教職員の方にも意見を伺いながら進めていたこと．また，学校行事として行われた人権講話では外部の講師を招くことで人権についての理解を深めようと取り組んでいた．また，社会人の方を招いて社会人講座を開いていたり，大学の教授を招いて大学講座を開くなど進路指導に関するサポートも行っていた．職員同士で意見を重ねながらより良い学校づくりを目指すこと，また，それに向けて各校務分掌が協力して運営を行っていることが分かった．学校内部だけでなく，大学講師や専門職の方そして PTA など外部との連携を大切にしながら，生徒に現地の方の声を聞かせるなどして理解を深めようとしている姿があった．

(5) 自己課題について

昨年度の実習から，発問を自己課題のテーマとして考えてきた．学ぶ動機づけを持たせるための一つの方法として発問をテーマに挙げている．しかし，発問とはいえども数学の授業ではどのような問いかけができるのかは疑問に感じている．また，数学の授業で発問を用意することでどのような効果が期待できるかも考えてきた．これまでの授業観察を通して，私は文部科学省[1]が提言している「数学的な見方・考え方を働かせる」ために一連の発問を意識した問いかけが効果的だと感じている．なお，昨年度の中間報告書の題目は“発問を意識した「主体的・対話的で深い学び」につなげるための問いかけ方の工夫”としていた．その後，文部科学省[1]を踏まえ今年度の実習では，主体的・対話的で深い学びを持たせるうえで，まずは自身の担当教科である数学の授業で工夫した発問を図りながら，生徒自らが解きたいと感じる動機をもたせたいと考えた．その際に，数学の授業で生徒に何を考えさせたいかが明確になるようにしたいと考えた．また，単に定義や公式といった知識・技能を確認するだけではなく，一つ一つの問題をどのようにして解いたのか重視しつつ問いかけたい．例えば，グラフを書いて考えたのかといったように，解法に至るまでを筋道を立てて説明する必要があると感じた．そして，数学の問題を解くだけでなく日常生活や身近にある事象にある問題に対しても，グラフや表を用いるなどして「数学的な見方・考え方」を働かせることが，役立てられないかという自己課題をもつようになった．そこで，題目の内容を「主体的・対話的で深い学び」から，「数学的な見方・考え方を働かせる」方法について，発問と関連づけて考察することとした．「数学的な見方・考え方を働かせる」ことができれば，学習課題を把握したのち，その課題に粘り強く取り組む姿勢，自分の意見を相手に筋道を立てて説明すること，そして新たな解決策を発見するといった発展的な考察へとつなげることができ，「主体的・対話的で深い学び」へのアプローチにつながると考える．自己課題で挙げた「数学的な見方・考え方を働かせる」方法と関連した発問づくり

について詳しくは4章で述べる．

4 関心のある今日的な教育課題

数学科の目標や内容等に関する主な改善事項が中央教育審議会答申では示されており，文部科学省平成30年告示の高等学校学習指導要領[1]ではそれを踏まえて改訂が行われている．それによると，「数学的な見方・考え方」について，次のように具体的内容を整理して述べている．

> 数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力 を次のとおり育成することを目指す．
> (1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに，事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする．
> (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力，事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力，数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確 に表現する力を養う．
> (3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度，粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度，問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う．

さらに，次のように述べている[1]．中央教育審議会答申(平成28年12月)においては，「数学的な見方・考え方」は，数学の学習において，どのような視点で物事を捉え，どのような考え方で思考を進めるのかという，事象の特徴や本質を捉える視点，思考の進め方や方向性を意味することと考えられる．また，「数学的な見方・考え方」は，数学の学習の中で働かせるだけでなく，生活の中で数学を用いる場合にも重要な働きをするものと考えられていて，数学の学びの中で鍛えられた見方・考え方を働かせながら，世の中の様々な物事を理解し思考し，よりよい社会や自らの人生を創り出していくことが期待される．「数学的な見方・考え方」のうち，「数学的な見方」は，「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」であると考えられる．また，「数学的な考え方」は，「目的に応じて数，式，図，表，グラフ等を活用しつつ，論理的に考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら， 統合的・発展的に考えたり，体系的に考えたりすること」であると考えられる．以上のことから，「数学的な見方・考え方」は，「事象を，数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的，体系的に考えること」として整理することができる．ここでいう，「事象」は「身の回りのことや日常生活でおこること」を指しており，これを数や量，形などの視点で見てみようと考えている[2]．ここまで学習指導要領の内容について触れた．一方，東京書籍数学I，II，IIIの教科書[3)4)5)]では，数学において，問題を解決する際には，次の図1にあげる4つの段階があり，初めてみる問題で「計画を立てる」ときには，定理や公式のような知識だけでなく，数学的思考法が日常のあらゆる場面における問題を解決するのに役立つと述べている．

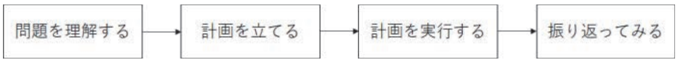

図1 問題解決をするまでの4つの段階

数学的思考法の具体例として以下[1]～[10]にあげるような方法が東京書籍の教科書[3)4)5)]で述べられていた．「数学的な見方・考え方」を働かせることは生活の中で数学を役立てることにつながること，数学的思考法も同じように日常のあらゆる場面における問題を役立つことにつながる．つまり， [1]～[10]にあげる数学的思考法を授業においても取り入れることで「数学的な見方・考え方」を働かせることにつなげることができると私は考えている．

[1]図を用いて考える…例えば，道順を説明するとき，口で説明するよりも地図をかいて説明した方が相手に伝わりやすい．数学においても，特に図形の問題では，問題文で与えられた条件を図にすることで，問題の状況や求めるものが見やすくなる．

(例[5]) $a_n>-2$，$a_{n+1}=\sqrt{a_n+2}$ (n=1，2，3，…)で定められる数列$\{a_n\}$について，$\lim_{n\to\infty} a_n$を求めよ．

(解) この問題を，グラフを用いて考える．

座標平面上に，曲線$y=\sqrt{x+2}$と直線y=xを書き，$y=a_1$から下の図2の矢印のように進むと，順にa_2，a_3，a_4…が求められる．

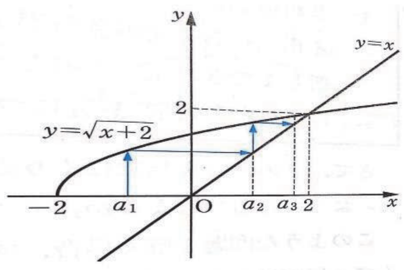

図2 曲線y=$\sqrt{x+2}$と直線y=xのグラフ(5より引用)

この図2から，数列$\{a_n\}$の極限値は，上の曲線と直線の交点のx座標2であることが読み取れる

(実際には，$\lim_{n\to\infty} a_n=2$であることを示す必要があるがここでは割愛する)．

漸化式によって定められる数列の極限は，数列の一般項を用いなくても求められる場合がある．

[2]文字を減らす…連立3元1次方程式を解くときに，1つの文字を消去することで解くことができる．この

ように，定まっていないものを減らそうと考えることが重要である．

[3]対称性…ある変換に関して，変換を適用しても変わらない性質のこと[6]．

(例[4])　$|x|+|y|<1$　　　　…①

の表す領域を図示せよ．

(解) ①のxを$-x$で置き換えても，もとの式と変わらない．①の表す図形をy軸に関して対称移動すると，もとの図形と同じ図形になることが分かるので，①の表す図形はy軸に関して対称であることが分かる．同様に，①の表す図形はx軸に関しても対称な図形であることが分かる．

$x≧0$，$y≧0$ のとき，$x+y<1$…②

と表され，②の表す領域を図示したうえで，x軸に関して対称移動し，さらにy軸に関して対称移動させれば求める領域となる．②の領域と，求める領域①を図示したものを以下，図 3 に示す．

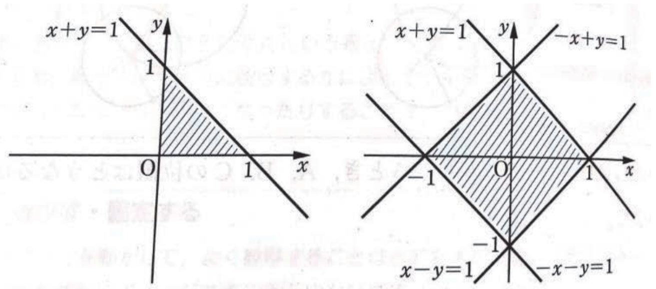

図 3 左側が，$x+y<1$…②を表したグラフ

右側が，$|x|+|y|<1$…①を表したグラフ(4 より引用)

[4]場合分け…すべての場合において，もれなく重複なく分類してから，その場合に応じた処理を行う．

(例[3])　$|x-1|+|x-3|=6$ を解け．

(略解) 実数全体を$x=1$ と$x=3$ を境目にして，

(i)$x<1$ のとき(ii)$1≦x<3$ (iii)$x≧3$ のときの 3 通りに分けて場合分けを行えばよい．求めた解が，場合分けの条件を満たしているか確認する．ここでは(i)について説明する．(ii)(iii)についても，(i)と同様に行う．

(i)　　$x<1$ のとき

$|x-1|=-(x-1)$，$|x-3|=-(x-3)$より，

$-(x-1)-(x-3)=6$

$x=-1$

これは，条件$x<1$ を満たしている．

(ii)　$1≦x<3$ のとき　(iii) $x≧3$ のとき　についても同様．

(i)，(ii)，(iii)より，方程式$|x-1|+|x-3|=6$ の解は，$x=-1$，5

[5]背理法…数学だけでなく，日常生活でもよく用いられる論法．命題が成り立たないと仮定して，矛盾を導く．

(例[3]) 10 個の球を青，黄，赤の 3 つの箱のどれかに入れる．このとき，球が 4 個以上入っている箱があることを証明せよ．

(略解) 球が 4 個以上入っている箱がないと仮定して，矛盾を導くことができればよい．

[6]見方を変える…見方を変えると同じものでも違ったように見えることがある．数学においても，全体のAの考え方に着目するか，Aでない考え方に注目するかによって，解決が難しくなったり，簡単になったりすることがある．

(例[3]) $|2x-6|<x$ を解け．

(解 1:略解) 左辺の絶対値について，$2x-6≧0$ と $2x-6<0$ の 2 つの場合に分けて不等式を解く．得られた解が，場合分けの条件を満たすかどうかを確認する．

(解 2:略解) この不等式を関数のグラフを用いて解く．$y=|2x-6|$と$y=x$のグラフは，図 4 のようになる．

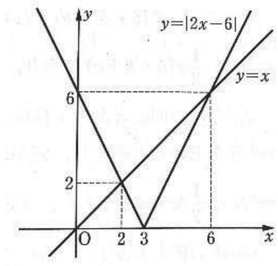

図 4 直線$y=|2x-6|$と直線$y=x$を表したグラフ

(3 より引用)

求める不等式$|2x-6|<x$の解は，関数$y=|2x-6|$のグラフが直線$y=x$より下側にあるxの値の範囲である．したがって，2 つのグラフの共有点のx座標を読み取れば不等式の解が求まる．

[7]逆向きに考える…数学だけでなく，求めるものから出発して，そのためには何がわかればよいか，さらにそのためには何がわかればよいか…と逆向きに考える．

(例[3]) 3 辺の長さが$a=3$，$b=7$，$c=8$ である△ABC がある．このとき，△ABC の内接円の半径rを求めよ．

(略解) 解答の方針を立てる際に次のように逆向きに遡って考えることで解が求まる．

「内接円の半径rを求めるためには，何が分かればよいだろうか」

→△ABC の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$であり，3 辺の長さa，b，cは与えられているから，△ABC の面積 S が分かれば，rが求まる．

→S を求めるためには，何が分かればよいだろうか．

→$S=\frac{1}{2}bc\sin A$ であり，3 辺の長さa，b，cは与えられているから，$\sin A$ の値が分かればよい．

→$\sin A$ の値を求めるためには，何が分かればよいだろうか．

→3 辺の長さしか与えられていないから，正弦定理は使えない．余弦定理から cos$A$ を求めて，
$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ を利用すればよい．

[8]動かす，固定する…図形やグラフを動かして，観察する．問題の状況が具体的にイメージできるようになる．

(例[4]) 3 本の棒 A, B, C があり，その長さ a，b，c を $a>b>c>0$ とする．3 本の棒を端点同士でつなげるとき，2 本の棒がつながった点を連結点と呼ぶ．連結点では棒は自由に回転することができる．また，連結点ではない方の端点を自由点と呼ぶ．下の図 5 のように，A と B, B と C をつなげ，A と B の連結点を M, B と C の連結点を N とする．また，A の自由点を P, C の自由点を Q とする．

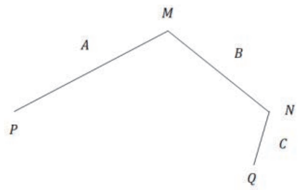

図 5 A と B, B と C をつなげたもの(4 より引用)

このとき，A を固定して，B と C を動かしたときの点 Q の動く範囲を考える．A と B の両方を固定して，C を動かすと，Q は N を中心に半径 c の円を描く．また，B を動かすと，N は M を中心に半径 b の円を描く．以上より，点 Q の動く範囲は，下の図 6 の斜線部分になる．

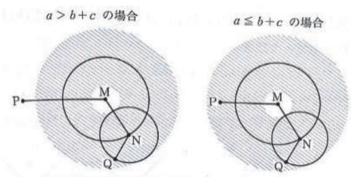

図 6 a>b+c の場合と a≦b+c の場合(4 より引用)

[9]数学的帰納法…数学的帰納法は，自然数 n に関する命題が，すべての自然数 n に対して，成り立つことを証明する際に有効である．

(例[5]) ド・モアブルの定理

整数 n に対して

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ ...①

が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する．

(略解) $z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく．

[1] $n=1$ のとき①が成り立つことを示す．

[2] $n=k$ のとき成り立つ．すなわち，

$z^k = (\cos\theta + i\sin\theta)^k$

$= \cos k\theta + i\sin k\theta$

と仮定する．このとき，$n=k+1$ のときにも①が成り立つことを示すことですべての正の整数 n について①が成り立つ．

[10]規則性を見つける…問題が抽象的な場合，実験したり，具体的な値をいくつか代入したりすることで，その問題がもつ規則性を見つけることができることがある．

(例[5]) 1 辺の長さが 1 の正三角形 A_1 がある．この正三角形から始めて，次の①，②の操作を繰り返してできる多角形を考える．

① 多角形 A_n の各辺を 3 等分し，それぞれの中央の線分を 1 辺とする正三角形を元の多角形 A_n の外側にかく．新しくできた正三角形と元の多角形 A_n の境界線を消す．

② 得られた多角形 A_{n+1} について，①の操作を行う．

この操作を無限に繰り返して行って得られる多角形の周の長さはどうなるか．

(略解) 図を書いてみて規則性をみつける．

多角形 A_2，A_3 を書くと下の図 7 のようになる．

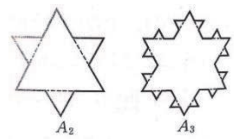

図 7 多角形 A_2，A_3 を描いたもの(5 より引用)

ここで，A_n から A_{n+1} をつくるとき，辺の数が 4 倍になり，1 辺の長さは $\frac{1}{3}$ 倍になるという規則性がある．すなわち，A_n の周りの長さを a_n とすると，a_{n+1} と a_n には，$a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n$ という関係式がある．これと，$a_1 = 3$ から，$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ となり，この多角形の周りの長さは発散する．

以上，数学的な見方・考え方を働かせる方法として，[1]～[10]で挙げた数学的思考法について取り上げた．図 1 で挙げた 4 つの段階のなかで数学の問題を解くうえで肝となるのはやはり「計画を立てる」段階であると感じている．数学を苦手としてしまう要因の一つには，この「計画を立てる」段階で解法が見つからずに諦めてしまった経験が何度もあって苦手意識を残してしまったからではないかと感じている．さらに，問題を出した後で生徒自らが試行錯誤，手を動かして解法に向けて問題に取り組む，考える場面を設けることが必要である．これに加えて授業者が生徒の能力に応じて適宜問いかけを行うことが必要と考える．できるだけ生徒自らが解法を発見できるような工夫を行う．さらに発問を意識した問いかけを行うことで，表面的な理解で終えるだけでなく，問題そのものの本質的な理解ができるなど，さらなる理解を深めることができると期待している．ここで，発問についての意味は何かを確認する．文部科学省[7]によると，発問の簡略な定義として，子供の思考・認識過程を経るものとしており，一方，質問の簡略な定義を，子供が本文を見ればわかるものとしている．

また，小沢，重光の論文[8]では，授業研究の分野で使われる発問について，日常的に使われている質問とはどのように区別されているのか，算数の授業を例に挙げながら着目している．その中で，質問と発問のそれぞれが何を学び手に求めているか，また，どのような問題形式によって評価を行うかについて，図８のように表している．

教師→学び手→評価における問題形式

質問→記憶　→選択・穴埋め問題
知識の習得　全国学力検査A問題
発問→　理解　→記述問題
知識の活用　全国学力検査B問題

図８ 質問と発問での教師が学び手に求めるもの

例えば，「三角形の面積はどのようにして求めたらよいのでしょうか」と教師が子どもたちに問いかける．この問いかけに対して，教師が求めるものが「底辺×高さ÷2」という公式であれば，この問いかけは，質問に相当する．これに対し，「なぜ三角形の面積は底辺×高さ÷2 で求められるのでしょうか」と問いかけたとすれば，この問いかけは，公式という知識の習得以上のものであり，質問ではなく発問となる．中間報告書では，発問の意味について質問と区別をしながら確認した．今回は，これに加えて中井[9]の文献を参考に発問についての機能や発問の種類についてみていくことで発問についての理解を深めた．以下，その内容を整理したものである．

a. 発問のさまざまな機能

a. 1 <u>学習意欲を喚起する</u>…授業の中で教員による説明が続くと，学習への集中力を低下させる可能性がある．発問を取り入れることで，学生の注意を引きつけ学習意欲を喚起することができる．

a. 2 <u>重要な問題に対峙する</u>…授業の中で最も学生に考えてほしい内容を問いの形にして，学生に考えさせることができる．教育学ではこれを主発問と呼ぶ．

a. 3 <u>思考を焦点化させる</u>…授業の目標に合わせて思考の観点を絞る．

a. 4 <u>思考を拡張させる</u>…学生に意見を自由に述べさせる．答えを限定しない問いかけで，学生が意見を述べやすくする役割をもたせる．

a. 5 <u>学生に問いをつくらせる</u>…良質な問いを学生に与えることは，学生が自分自身で問いをつくる能力を向上させることにつながる．

a. 6 <u>学生の学習状況を把握する</u>…発問に対する学生の反応によって，学生がどこまで理解できているか，あるいはどのように考えているかを知ることができる．

b. 効果的な発問の方法

b. 1 <u>発問を明確に与える</u>…複雑な発問やあいまいな発問は学習者に混乱を与えてしまう．学生が何を問われているのか理解できるような内容にする．

b. 2 <u>多様な種類の発問を活用する</u>…発問の種類については以下のようなものがある．中井[9]では，日本の人口減少に関しての発問を例にあげている．鍵括弧内がその例である．

[b. 2. 1]基礎知識「出生率はどのような計算式で求めることができますか」

[b. 2. 2]比較　　「都市と地方では人口減少にどのような違いがありますか」

[b. 2. 3]動機や原因「なぜ人口減少が起きているのでしょうか」

[b. 2. 4]行動　　「人口減少に対して国は何をすべきでしょうか」

[b. 2. 5]因果関係　「都市への若者流入は，人口の増減にどのような影響を与えていますか」

[b. 2. 6]発展　　「この授業で私が説明したこと以外に少子化の原因はありませんか」

[b. 2. 7]仮説　　「子育て支援が進めば，人口の減少が抑制されますか」

[b. 2. 8]優先順位　「少子化対策の中で最も有効な方法は何でしょうか」

[b. 2. 9]総括　　「A 市の少子化現象の事例からどのような教訓が得られますか」

発問について理解は深めたものの，授業実践では，発問を意識しながら問いかけることが上手くできていないことが何度かあった．例えば，問題を与えて，時間をとって生徒に考えさせたものの，そもそも何も書かずに手を止めていた生徒がいた．これは，私の問いかけが伝わらないあまり，生徒が何を考えればよいのか問いかけ方が曖昧になってしまったこともあると思う．また，生徒に考えさせた後ペアワークを行ったものの，生徒の解答を上手く拾えずにただ解答を説明しただけに終わってしまったことがこれまで何度かあった．授業観察や授業実践を通して，数学の授業ではどのような問いかけが発問につながるか考えてきた．

中間報告書では，逆関数についての理解を，自動販売機を例に日常生活と関連した問いかけ，そして，既習の単元とつながりのある問いかけを発問の種類として例に挙げた．他にどのような問いかけ方があるか，授業観察を例にしたものと授業実践を行ったときのものと２例をここでは触れる．

初めに，授業観察での場面を例に挙げる．

[単元名] 数学 III 平均値の定理

[使用教材]クリアー数学演習 III 受験編(数研出版)[10]

[クラス]3-6, 7 組(6 組と 7 組の合同クラス)

平均値の定理：$f(x)$が$a≦x≦b$で連続，$a<x<b$で微分可能であるとき，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

を満たす実数$c\ (a<c<b)$が存在する．

冒頭で，平均値の定理について，定理そのものを上の枠内のように板書した．この平均値の定理がどういう意味かを何か適当なグラフを書くなどして，まずは自分で考えてみるように問いかけを行っていた．ペアワークで意見共有した後，平均値の定理について授業者が，$(a,f(a))$と$(b,f(b))$の2点間を結ぶ直線の傾きと，接線の傾きが等しくなる接点のx座標が，開区間(a,b)のなかに存在することを説明した．これを自分で書いたグラフで$(a,f(a))$と$(b,f(b))$の2点間を結ぶ直線の傾きと接線の傾きに注目しながら確かめることで，納得が容易だったように感じている．さらに，次のような場面があった．平均値の定理が成り立つには，$f(x)$が$a \leqq x \leqq b$で連続，$a<x<b$で微分可能でなければならない．この条件が成り立たないと，平均値の定理を用いることができないことを同じようにグラフを書いて確かめるように問いかけた．連続でないときは，例えば，下の図9左側のようにグラフが途切れている場合である．また，ある点で微分可能でない場合は，下の図9右側のような折れ線グラフの場合に，$(a,f(a))$と$(b,f(b))$を結んだ直線の傾きと等しくなる接線が存在しないことを確かめた．

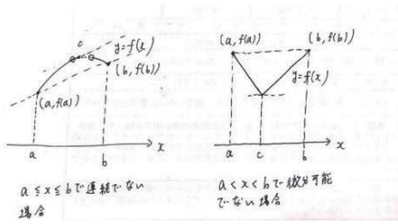

図9 平均値の定理が成り立たない例

ここまでの一連の問いかけは，発問の種類でいえば[b.2.2]比較であり，平均値の定理が成り立つときとそうでないときとを図を用いて比較させた．このように，定理そのものを敢えて自分で考えさせたり，逆に定理が成り立たなくなる場合を考えるよう問いかけてみても理解が深められると期待できる．

次に，授業実践をさせていただいたなかでの場面を例にあげる．

［単元名］数学A 場合の数，組み合わせ

［使用教材］リンク数学IA，受験編(数研出版)[11)]

［クラス］第3学年3組

授業実践では使用教材に掲載されている練習問題を解いてもらった．練習問題には組み合わせについての問題が小問として4問用意されていた．以下，その内容である．

(練習問題)8冊の異なる本を次のように分ける方法は何通りあるか．

(1)4冊，3冊，1冊の3組に分ける．

(2)2冊ずつ4人の子どもに分ける．

(3)2冊ずつ4組に分ける．

(4)4冊，2冊，2冊の3組に分ける．

［解法］(1) 8冊の本の中から4冊を選び，残り4冊の中から3冊を選ぶと，4冊，3冊，1冊の3組に分けられる．${}_8C_4 \times {}_4C_3 \times 1=280$(通り)

(2) 8冊の本の中から2冊ずつ4人の子どもA，B，C，Dに分ける方法は，${}_8C_2 \times {}_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1=2520$(通り)

(3) (2)でA，B，C，Dの区別をなくすと，同じ分け方が4!通りずつできる．よって，

$2520 \div 4!=105$(通り)

(4) 4冊，2冊，2冊の組をそれぞれa，b，cとする．a，b，cに分ける方法は，${}_8C_4 \times {}_4C_2 \times {}_2C_2=420$(通り)

b，cの区別をなくすと，同じ分け方が2!通りずつできる．よって，$420 \div 2!=210$(通り)

授業計画の段階では，(1)から順に(4)まで進める予定だった．(3)で2冊ずつ4組に分けるところで，4!で割っていたが，(1)も同様に3組に分けるため，3!で割って良いのではないかと考える生徒がいると予想される．そこで，(1)ではなぜ3!で割ることができないのか問いかけてみても良いのではと担当教員からの指摘があった．実際に授業実践の場面でも，(3)まで進めた後に，(1)にもう一度戻って同様に問いかけたことで，隣同士話し合いながら理解しようとする姿がみられた．また，(4)についても比較的容易に理解できた生徒が多かったと考える．ここまでの一連の問いかけは，こんな考え方をしてみたがなぜ違うのか，予想される誤答を拾いながら敢えてそれを取り上げることで組み合わせについての理解を深めることができたと感じている．また，式や図を書いて考えてみるように問いかけることで数学的な見方・考え方を働かせることにもつながったと感じている．以上，数学的な見方・考え方を働かせるための方法を発問と関連づけながら進めてきた．これを踏まえ，5では，12月に行った研究授業について振り返りながら，発問を意識した数学的な見方・考え方を働かせるための問いかけ方を数学的思考法および発問を視点に考察する．

5 教育課題についての授業実践例(研究授業を例に)

［単元］ 数A 「整数の性質」

(今回扱う単元は，東京書籍検定済教科書数学A「整数の性質」p147「数学でアクティブ・ラーニングをしよう」を参考にして[12)]，授業計画を立てた)

［授業日］令和3年12月15日（水）4限

［クラス］第3学年3組25名

［クラスについて］生徒は整数の性質についてはこれまでに一度学んでおり，教科書にあるような基本例題については解ける生徒が多い．しかし，文系の生徒のため，数学を苦手とする生徒も多く，公式や定理の意味を表面上の理解のみで終えている生徒も多い印象である．そのため，問題演習などは多少の時間をとって進める必要がある．しかし，問題に取り組む態度は意欲的で，隣同士で話し合いもとりながら粘り強く取り組む姿勢が表れている．

[使用教材]ワークシート
(ワークシートには，この授業で砂時計を用いた一次不定方程式についての問題を 3 問用意した．あわせて，本時の授業の感想を書く欄を用意した)

[本時の目標]：一次不定方程式$ax+by=c$が整数解x，yをもつためのcの必要十分条件は，cがaとbの最大公約数で割り切れることである．このことを 2 つの砂時計から得られる具体例を用いて理解する．

[本時の展開，指導上の留意点]

2 つの砂時計を用いる．時間の計測を開始するタイミングはいつでも良い．砂時計は砂がすべて落ちきるまでひっくり返すことはできない．例えば，3 分の砂時計と 5 分の砂時計を用いる場合，次のように①～③を行うことで 2 分を計ることができる．

① 3 分の砂時計と 5 分の砂時計を同時にひっくり返す．
② 3 分後，3 分の砂時計がすべて落ちきる．ここから時間の計測を開始する．
③ 5 分後，5 分の砂時計がすべて落ちきる．②と③の時間差から 2 分を計る．

これを板書では図 10 のように書いて説明をした．

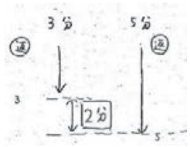

図 10 2 分を計る方法

そして，第 1 問として，3 分の砂時計と 5 分の砂時計，2 つの砂時計を使って 1 分を計る方法をいくつか考えさせた．2 分を計る方法で図を用いて説明したためか，多くの生徒が図 11 のように書いてペアワークを設けて説明することができていた．

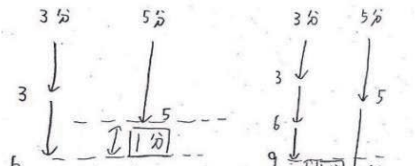

図 11 1 分を計る方法

例えば，3 分の砂時計を 2 回，5 分の砂時計を 1 回ひっくり返すこと…(※1)で 1 分を計ることができる．解いたワークシートを振り返っても，1 分を計る方法をいくつか図で表して考えている様子があった．他にもどのような計り方があるか，それを考えるために今度は図だけでなく式で表す方法を考えさせた．上で挙げた(※1)を式にすると，$3\times2+5\times(-1)=1$ と表すことで 1 分を計る方法が分かる．ここから，$3x+5y=1$ と立式し，この等式を満たす整数解x，yを調べることで，1 分を計る方法を見つけることができることに気づかせた．今度は，この等式を満たすx，yはどのように見つければよいか問いかけた…(※2)．解けた生徒は半数程度であった．解いている間に，すべての整数解x，yを求めるためのヒントを与えたが，それで解けた生徒は少なかったように感じる．また，生徒の理解度に応じた問いかけ方が曖昧だったようにも感じる．1 次不定方程式の整数解については次のように求めることができる．

$3x+5y=1$…(*1)

(*1)を満たす整数解x，yを 1 組見つける．

整数解x，yとして，$x=2$，$y=-1$ が取れ，すなわち，$3\times2+5\times(-1)=1$…(*2) が成り立つ．

(*1)－(*2)より，

$3(x-2)+5(y+1)=0$

移項して，

$3(x-2)=-5(y+1)$

3 と 5 が互いに素であることに注意すると，$x-2=5n$ (n：整数)，$y+1=-3n$ (n：整数)と表せる．nに任意の整数を代入することで整数解x，yが 1 組見つかる．

ここで，$n=1$ としたときに，$x=7$，$y=-4$ という整数解が見つかる．つまり，3 分の砂時計を 7 回，5 分の砂時計を 4 回ひっくり返すことで 1 分を計ることができる．他にもnに整数をあてはめることで，整数解x，yが見つかる．整数解x，yが見つかることで砂時計で 1 分を計ることができる．式と図を互いに比較しながら進めたことで，1 分を計る方法は何通りでも見つかることが分かった．ここまでの発問としては，[b. 2. 1]基礎知識を確認するものであり，数学的思考法でみると板書にもあるように[1]図を用いて考えることでも定着に結びついたと考える．一方，(※2)の問いかけについては解法の確認をしたのにすぎないため，発問よりは質問に依った問いかけだったとも感じている．実際，ほとんどの生徒が板書の内容を写して理解している生徒が何人かいた印象だったため一次不定方程式についての理解はあまり深められなかったと感じている．

2 つの砂時計を使って 1 分を計る方法を確かめた後，同じ 3 分の砂時計と 5 分の砂時計を使って分単位ですべての時間を計ることができるか第 2 問で問いかけた．考える時間を与えた後，何人かの生徒はできるのではないかという予想を立てていた．ある生徒は 1 分，2 分，3 分を計ることができるので他の時間も計ることができるのではないかと具体的数値を入れて確かめている様子もあった．すべての時間を計ることができるかどうか先ほどの第 1 問で問いかけたときと同じように図と式の両方で確かめた．図に関しては第 1 問で 1 分をはかるときに調べた図 11 を使って説明した．例えば，2 分であれば図 12 のように，1 分を計るときに用いた図 11 を繰り返し用いることで，1 分を 2 回分計ることができる．ここから 5 分の砂時計において矢印の位置をずらすことで 2 分を計ることができることに気づかせた．

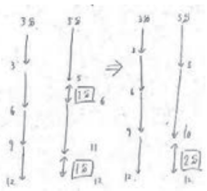

図 12 2 分を計る方法

2 分の計り方について確かめたが，同じように他の時間でも図 11 を工夫して作ることで計ることができる．つまり，分単位ですべての時間を計ることができる．式で確認しても，$3x+5y=a$ (aを正の整数)について 3 と 5 が互いに素であることを利用することで，整数解x，yが存在することを説明した．ここから，分単位ですべての時間を計ることがいえる．第 2 問では，分単位ですべての時間を計ることができるか予想をさせた．この問いかけは[b.2.7]仮説にあたると考える．実際に，ペアワークでも計ることができるか隣同士意見をよく話し合っていたため，この仮説に結びつけた発問は，興味関心を持たせたり，数学的な見方・考え方を働かせることにもつながったと考える．

そして，図で確認した際も図 11 を繰り返し用いて図 12 ですべての時間を確かめたことは，数学的思考法でみると，図 12 において 1 分の矢印の位置を[8]動かすことで，すべての時間を計ることが確認できたと考えている．しかし，生徒が問題を解いている際に，解法のヒントとして思うように問いかけることができなかった．また，式の説明については下を向いていた生徒もいた．内容が伝わりにくかったか，第 1 問で考えた一次不定方程式について理解が曖昧なままで第 2 問に進めてしまったからように感じる．第 1 問で一次不定方程式についての理解をもう少し時間をかけて考えてみても良かった．最後に第 3 問で，今度は使う砂時計の種類を変えて 4 分の砂時計と 6 分の砂時計を使って 1 分を計ることができるか問いかけた．同じように，隣同士で話し合うなかで，今度は計ることができないことを何人かの生徒が気づいていた．その理由を何人かの生徒は図を書いて考えることができていた．なかには何分のときは計れるか調べあげている生徒も見られた．下の図 13 のように 4 分の砂時計と 6 分の砂時計を使って考えたときに，ともに偶数単位の砂時計を使っているため，奇数分の単位で砂時計を使って時間を計ることはできないこと．つまり，1 分を計ることができないことを確認した．

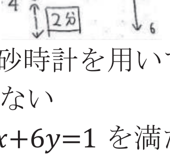

図 13 偶数分単位の砂時計を用いているので 1 分を計ることができない

式で確認しても $4x+6y=1$ を満たす整数解x，yが存在するか調べる．4 と 6 の最大公約数が 2 であることから，$2(2x+3y)=1$ とおいたときに，左辺に 2 を約数としてもっているため，右辺も 2 を約数としてもつ必要がある．右辺の 1 は 2 を約数としてもたないため，1 分を計ることはできない．第 3 問の問いかけでは，[b.2.2]比較にあたると考える．第 2 問ではすべての時間を砂時計を使って計ることができたものの，使う砂時計の種類を変えることで第 3 問では 1 分を計ることができなかった．なぜ計ることができなかったのかを第 2 問のときと比較しながら考えることで，理解を深められたと考える．また，数学的思考法でいえば 2 分，4 分といった偶数分なら計れるのではないかと見つけたことは[10]規則性を見つけることにつながったと考えられる．ここから，この問題について関心を高めることができたとも感じる．第 3 問では最大公約数に注目することで，最大公約数の倍数単位での時間であれば，計ることができた．本来であればさらに一次不定方程式$ax+by=c$において，整数解x，yをもつためのcの必要十分条件は，cがaとbの最大公約数で割り切れることを時間を割いて確認を取りたかったが，時間の都合上考える余裕がなかった．しかしながら，2 つの砂時計を使って一次不定方程式についての理解を深めることはできたと考えている．

授業後に，ワークシートを用いて生徒に本時の授業について感想を書いてもらったところ，次のようなコメントがあった．コメント A～コメント C については，原文ママであるが，コメント D，コメント E については「実践研究報告論集掲載のまとめ」を作成するにあたり一部表現などを改めた箇所がある．

コメント A:数学や記号が並ぶ問題ではなくて，砂時計という物に置き換えてあることで，数学が苦手でもとっかかりやすくなっているなと思いました．

コメント B:図から式に戻すことがあまりないので，頭をたくさん使った．出した答えから発展させて次の答えを出すと楽に求められることが分かった．

コメント C:図で考えてから，式にして全てに対応させていくという流れがすごく分かりやすくて数学的だなと思いました．周りと話す時間が合って楽しかったです．

コメント D:時間がなかったため仕方がないが，第 1 問で解いたユークリッドの互除法の説明も欲しかった(自分が知らなかっただけだが，途中で分からないところがあるとモヤモヤする)．

コメント E:ユークリッドの互除法について覚えていないため第 1 問で急に出されると，余計分からなくなった．公式の証明をしてもらえると嬉しかったです．図を書いて考えたことで，感覚的に分かるところを，わざわざ式で書いて考えるのが，なんだか変な感じでした．感覚では分かりにくいような問題を解いた方が楽しいです．

コメント A～C に類似したコメントが他の生徒からもいくつかあった．今回の授業では砂時計を題材に一

次不定方程式についての理解を，式や図を活用するなどして数学的に考えたことで理解が深まった．砂時計の場合だけでなく，他にも日常生活や身の回りにある事象に対しても，同じように数学的な見方・考え方を働かせながら考察をすることで，自らが粘り強く取り組んでみたり，さらなる理解を深められると考える．また，コメントCであるように，ペアワークを設けて話し合いを進めたことは，自らが考えたことを整理することができたり，新たな考えを取り入れたりなど効果的だと感じている．一方，コメントD，コメントEについては今回の授業についての指摘，改善点に関する内容である．日常生活や身の回りにある事象を今回でいえば砂時計を題材に，数学的に考える力は1時間の研究授業で働かせることができたと期待できるものの，一次不定方程式についての理解，いわば数学的な理解を深めるためにはこの授業だけでは身につかなかったと考えている．また，第2問，第3問へと砂時計を使った応用へと話を進めるためには，第1問で既習である「一次不定方程式の解法」だけでなく，「ユークリッドの互除法の原理」についても触れておかないと，第2問，第3問へと曖昧なまま進めてしまうことになると考えた．さらに，コメントEであるように図を書けばイメージできる問題が，なぜ式を書いてまで考える必要があるのか疑問に感じた生徒もいた．第2問，第3問ともに砂時計で時間を計ることができるかどうか，ある程度の生徒は図を書くことで，単純になんとなく，いわば感覚的に砂時計で時間を計れるかどうか確かめることができたため，図を書いて考えることの良さが伝わった．反対に，式で考えることの良さはあまり伝わらなかったようにも感じ取る生徒もいたように感じる．これは先ほどでも触れた第2問での式の説明で顔を下に向いた生徒がいたことからも想定できる．コメントEであるように図で考えることが複雑な問題に対しては，式で考えることができないか問いかけてみるなどすれば式で表すことの良さがみえる．式で表すことの良さが感じ取れるように発問の内容を変えてみても良かった．以上を踏まえ，研究授業を振り返って，発問の内容や，問いかけを行う場面，発問を通して何を考えさせたいか，授業計画を今後教員になってからも綿密に立てていきたい．

6 終わりに

「数学的な見方・考え方」を働かせる方法として，数学的思考法からのアプローチおよび発問を意識した問いかけをみてきた．4章で挙げた数学的思考法の具体例や，発問の種類をもとに問いかけを行うことで生徒が興味関心を持ち，深い学びにつなげることができると期待している．加えて，ただ問いかけを行うだけでなく生徒が解いている様子を観察し，習熟度に応じてさらなる問いかけが必要と感じる．教材分析を重ねながら，どのような解答をするか，どこで躓くかを予想しながら授業を進めたい．教員の職に就いてからも，「数学的な見方・考え方」を働かせることができるような問いかけ方を常に考えながら授業を進めたい．

謝辞：本研究を進めるにあたり，ご指導ご鞭撻を受け賜りました指導教員の野崎先生，連携協力校の校長先生，教科担当および担当クラスの先生をはじめご指導いただいた先生方に厚く御礼申し上げます．

参考文献

1. 高等学校学習指導要領(平成30年告示) 文部科学省平成31年3月28日，学校図書株式会社
2. 「数学的な見方・考え方」をどこよりも詳しく解説します！ | 算数を究める (mathematicalpapyrus. com) (2022. 01. 10に閲覧)
3. 高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書 数学I Advanced p184〜p191 俣野博・河野俊丈ほか31名平成28年2月15日東京書籍 東京書籍株式会社
4. 高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書 数学II Advanced p235〜p236 俣野博・河野俊丈ほか31名東京書籍平成29年2月14日東京書籍 東京書籍株式会社
5. 高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書 数学III Advanced p260〜p265 俣野博・河野俊丈ほか32名東京書籍平成30年2月9日東京書籍 東京書籍株式会社
6. 対称性wikipedia https://ja. wikipedia. org/wiki/対称性 (2022. 01. 26に閲覧)
7. CLARINETへようこそ 4 発問 文部科学省 https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/clarinet/002/003/002/004.htm (2021. 02. 20に閲覧)
8. 授業現場における質問と発問の違い-語用論と心理学の視点から- 小沢一仁 重光由加 東京工芸大学工学部紀要 vol. 41 No. 2 (2018) (2022. 02.09に閲覧)
9. シリーズ大学の教授法 アクティブラーニング 中井俊樹 玉川大学出版部(2015. 12. 25)
10. 三訂版クリアー数学演習III 受験編 (1990.02.01) 東京 数研出版株式会社 p46
11. 改訂版 リンク数学演習I・A 受験編および解答編 (2012.10.01) p76 東京 数研出版株式会社 (解答編はb-p11)
12. 高等学校数学科用 文部科学省検定済教科書 数学A Advanced p147 俣野博・河野俊丈ほか31名東京書籍平成28年3月8日 東京書籍株式会社
13. この「実践研究報告論集掲載のまとめ」は一部，著者の実践研究報告書の内容，および実践研究報告書要旨から引用した箇所がある．